BASISBOEK WISKUNDE

Jan van de Craats en Rob Bosch

Tweede editie

PEARSON Education

ISBN: 978-90-430-1673-5
NUR: 123
Trefw: wiskunde, wiskundeonderwijs

Dit is een uitgave van Pearson Education Benelux bv,
Postbus 75598, 1070 AN Amsterdam
Website: www.pearsoneducation.nl – e-mail: amsterdam@pearson.com

Illustraties en LaTeX-opmaak: Jan van de Craats
Omslag: Inkahootz, Amsterdam

Prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit, dr. R. Bosch is universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie.

Dit boek is gedrukt op een papiersoort die niet met chloorhoudende chemicaliën is gebleekt. Hierdoor is de productie van dit boek minder belastend voor het milieu.

Leeswijzer

Dit is een oefenboek. Elk hoofdstuk begint op de linkerbladzijde met opgaven. Je kunt er direct mee aan de slag, want de eerste opgaven zijn altijd gemakkelijk. Geleidelijk worden ze moeilijker. Zodra je een opgave gemaakt hebt, kun je je antwoord achterin controleren.

Op de rechterbladzijden staat, heel beknopt, de theorie die je nodig hebt om de opgaven links te kunnen maken. Je kunt daar naar behoefte gebruik van maken. Kom je termen of begrippen tegen die daar niet verklaard worden, dan kun je via het trefwoordenregister dat achterin het boek staat, de plaats vinden waar die uitleg wél staat.

Belangrijke formules, definities en stellingen zijn op de rechterbladzijden in de kleur blauw gedrukt. De meeste ervan vind je ook weer terug in het formuleoverzicht op bladzijde **??** en verder.

In dit boek werken we met een decimale punt, en niet met een decimale komma, in overeenstemming met wat thans algemeen gebruikelijk is in de internationale wetenschappelijke en technische literatuur.

Het Griekse alfabet

α	A	alfa	ι	I	jota	ρ	P	rho
β	B	bèta	κ	K	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	mu	υ	Y	upsilon
ϵ	E	epsilon	ν	N	nu	φ	Φ	phi
ζ	Z	zèta	ξ	Ξ	xi	χ	X	chi
η	H	èta	o	O	omicron	ψ	Ψ	psi
ϑ	Θ	thèta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

Inhoudsopgave

Dankbetuiging

Veel lezers en gebruikers hebben in 2005 commentaar gegeven op voorlopige internetversies van dit boek en daarbij onduidelijkheden en fouten gesignaleerd. Met nadruk willen we in dit verband Frank Heierman bedanken, die de gehele tekst nauwkeurig heeft doorgelezen en tal van nuttige suggesties voor verbeteringen heeft gedaan. Daarnaast zijn we ook Henk Pfaltzgraff, Hans De Prez, Erica Mulder, Rinse Poortinga, Jaap de Jonge, Jantine Bloemhof, Wouter Berkelmans en Pia Pfluger erkentelijk voor hun commentaar. Chris Zaal, André Heck en Wybo Dekker hebben ons met raad en daad bijgestaan. Rosa Garcia Lopez en Eveline Korving van Pearson Education Benelux danken we voor de plezierige en stimulerende samenwerking.

Sinds enige jaren is Marc Appels onze uitgever bij Pearson. Het is een groot genoegen met hem samen te werken. Ook de verdere contacten met directie en medewerkers van Pearson verlopen altijd buitengewoon plezierig, efficiënt en professioneel. Namen noemen brengt het risico met zich mee dat we stille werkers vergeten. Daarom bij deze een collectief dankwoord voor allemaal!

De auteurs

Voorwoord

Dit boek bevat alle basiswiskunde die nodig is als ingangsniveau voor een universitaire of hogeschoolstudie op het gebied van de bètavakken, informatica, economie en verwante studierichtingen. Voor bètastudies zijn alle behandelde onderwerpen van belang, voor informatica en economische richtingen kunnen sommige stukken uit de hoofdstukken 17 (goniometrie), 22 (integratietechnieken) en 23 (toepassingen) terzijde gelaten worden. Met basiswiskunde bedoelen we algebra, getallenrijen, vergelijkingen, meetkunde, functies en calculus (dat wil zeggen differentiaal- en integraalrekening). Kansrekening en statistiek – aparte wiskundevakken met een eigen invalshoek – behandelen we niet.

In de hier gekozen didactische opzet staat oefenen centraal. Net als bij iedere vaardigheid, of het nu om voetballen, pianospelen of het leren van een vreemde taal gaat, is er ook maar één manier om wiskunde onder de knie te krijgen: veel oefenen. Bij voetballen moet je trainen, bij pianospelen studeren en bij het leren van een vreemde taal woordjes leren. Zonder basistechniek kom je nergens; bij wiskunde is het niet anders.

Waarom wiskunde leren? Natuurlijk gaat het de meeste gebruikers uiteindelijk om toepassingen in hun vak. Maar daarbij kun je wiskunde als taal en als instrument niet missen. Wie bijvoorbeeld een studieboek op het gebied van de exacte vakken openslaat, ziet vaak een stortvloed aan formules. Formules die wetmatigheden in het vak uitdrukken die met behulp van wiskundige technieken afgeleid zijn. Via wiskundige bewerkingen worden ze met andere formules gecombineerd om weer nieuwe wetmatigheden op het spoor te komen. Die manipulaties omvatten gewone algebraïsche omvormingen, maar ook het toepassen van logaritmen, exponentiële functies, goniometrie, differentiëren, integreren en nog veel meer. Dat zijn wiskundige technieken die de gebruiker moet leren hanteren. Het invullen van getalswaarden in formules om in een concreet geval een numeriek eindresultaat te verkrijgen, is daarbij slechts bijzaak; waar het om gaat, zijn de ideeën die erachter zitten, de wegen naar nieuwe formules en de nieuwe inzichten die je daardoor verwerft.

Het hoofddoel van wiskundeonderwijs dat voorbereidt op het hoger onderwijs moet dan ook het aanleren van die universele wiskundige vaardigheden zijn. Universeel, omdat dezelfde wiskundige technieken in de meest uiteenlopende vakgebieden toegepast worden. Formulevaardigheid verwerven, daar draait het vooral om. En vaardigheid in het omgaan met functies en hun grafieken. Gecijferdheid, het handig kunnen rekenen en het vlot kunnen werken met getallen, is bij dit alles slechts een klein onderdeel. De rol van een rekenmachine (al dan niet grafisch) is in dit boek dan ook uitermate bescheiden; we zullen er nauwelijks gebruik van maken. Waar zo'n apparaat bij het maken van de opgaven noodzakelijk is, hebben we dat expliciet aangegeven.

Voor wie is dit boek bedoeld?

Om te beginnen voor alle scholieren en studenten die zich bij wiskunde onzeker voelen omdat er gaten in hun basiskennis zitten. Zij kunnen hun wiskundige vaardigheden hiermee bijspijkeren. Maar het kan ook gebruikt worden als leerboek of als cursusboek. Door de doordachte, stapsgewijze opbouw van de stof met korte toelichtingen is het geschikt voor zelfstudie. Toch zal het altijd moeilijk blijven een vak als wiskunde helemaal door zelfstudie te leren: de waarde van een goede leraar als gids door de lastige materie kan moeilijk overschat worden.

Hoe zit dit boek in elkaar?

Alle hoofdstukken (op de laatste drie na) zijn op dezelfde manier opgebouwd: op de linkerbladzijden opgaven, op de rechterbladzijden de bijbehorende uitleg. De gebruiker wordt uitdrukkelijk uitgenodigd om eerst aan de opgaven links te beginnen. Wie vastloopt, onbekende begrippen of notaties tegenkomt of bepaalde details niet helemaal goed meer weet, raadpleegt de tekst rechts en indien nodig het trefwoordenregister. De opgaven zijn zorgvuldig uitgekozen: eenvoudig beginnen met veel soortgelijke sommen om de vaardigheden goed te oefenen. Met heel kleine stapjes wordt de moeilijkheid geleidelijk opgevoerd. Wie alle opgaven van een hoofdstuk gemaakt heeft, kan er zeker van zijn dat hij of zij de stof begrijpt en beheerst.

Bij onze uitleg gaan we niet op alle wiskundige finesses in. Wie meer over de wiskundige achtergronden wil weten, vindt achterin drie hoofdstukken zonder opgaven met verdere verklaringen. Ze staan niet voor niets achterin: alleen wie al behoorlijk wiskundig bedreven is, zal ze kunnen waarderen. En de lezer die er niet aan toe komt, heeft geen probleem: wat voor de toepassingen nodig is, staat in de eerdere hoofdstukken. Een formuleoverzicht, een trefwoordenregister en een volledige antwoordenlijst completeren het boek.

Bij de tweede editie

Wanneer een boek binnen vier jaar acht drukken bereikt, kun je gerust van een succes spreken. Dat stemt tot dankbaarheid. Van heel wat gebruikers hebben we positieve reacties ontvangen, soms met suggesties voor verbeteringen. Gesignaleerde fouten in de antwoordenlijst konden we telkens al in de volgende druk corrigeren. De eerste auteur houdt een erratalijst bij op zijn homepage (gemakkelijk te vinden via Google). Daarnaast konden we tussentijds enige kleine verbeteringen in de tekst doorvoeren. Zo ontstond een steeds beter product.

Maar volmaakt was het niet: gebruikers meldden ons dat we sommige onderwerpen te summier behandeld hadden en dat er in enkele gevallen ook behoefte was aan meer opgaven op elementair niveau. Een apart probleem was het gebrek aan rekenvaardigheid onder studenten: de vrucht van falend rekenonderwijs op de basisschool. Om dit te repareren, hebben we het *Basisboek rekenen* geschreven. Wie al in de eerste hoofdstukken van *Basisboek wiskunde* vastloopt op rekenproblemen, zou dat boek eerst door moeten werken, liefst van a tot z.

Met deze tweede editie van *Basisboek wiskunde* zijn we in de gelegenheid enige meer ingrijpende wijzigingen en uitbreidingen aan te brengen. Aan de opzet en de structuur van onze succesformule veranderen we echter niets: heldere opbouw, opgaven links, uitleg en theorie rechts. Er zijn ook geen nieuwe onderwerpen toegevoegd; de hoofdstukindeling is ongewijzigd gebleven.

De belangrijkste wijzigingen

De belangrijkste veranderingen zijn de volgende. De algebra-hoofdstukken 4 en 5 zijn beter gestructureerd. Hoofdstuk 8 (rijen en limieten) is uitgebreid. In de meetkunde-hoofdstukken 12 tot en met 15 zijn tekstverbeteringen aangebracht en enige minder geslaagde opgaven verwijderd.

In hoofdstuk 16 is in verband met de factorstelling een eenvoudig geval van de staartdeling voor polynomen toegevoegd, samen met een aantal nieuwe opgaven. Substantiële uitbreidingen zijn er in de hoofdstukken 17 (goniometrie) en 18 (exponentiële functies en logaritmen). Deze hoofdstukken zijn deels herschreven om beter aan te sluiten op de voorkennis van scholieren in het voortgezet onderwijs. Ook de calculus-hoofdstukken 20, 21 en 22 hebben we nog een keer onder handen genomen. Daarbij is tevens de opgavencollectie aangevuld.

Niet alle suggesties voor wijzigingen en verbeteringen die we de afgelopen jaren ontvingen, hebben we overgenomen. Wel hebben we ze allemaal zeer serieus in overweging genomen. Maar in een klein aantal gevallen hadden we andere ideeën over wat belangrijk is voor onze doelgroep en hoe je bepaalde stukken wiskunde voor hen zou moeten presenteren.

De vraag van enige gebruikers om ook aandacht te schenken aan onderwerpen als matrixrekening en complexe getallen, hebben we niet gehonoreerd. Daaraan wordt tegemoetgekomen in het *Vervolgboek wiskunde* van de eerste auteur dat eveneens in 2009 bij Pearson is verschenen.

Veel dank!

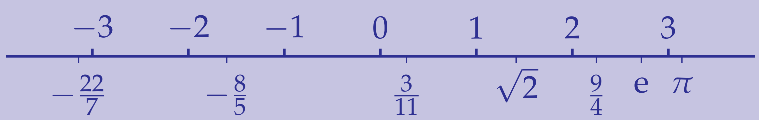
Zonder anderen tekort te willen doen, willen we in de eerste plaats Lia van Asselt, Henri Ruizenaar, Frank Arnouts, Doortje Goldbach, Abdelhak El Jazouli, Robbert van Aalst en René van Hassel bedanken. Hun commentaar heeft tot substantiële verbeteringen geleid. Ook de opmerkingen van Jan Essers, Jan Los, Wim Caspers, Adri van den Boom, C.E. van Wijk, G.J.J. Baas, Erik Beijeman, Hermien Beverdam, A. Dolfing, en Marjan van der Vegt hebben we zeer

op prijs gesteld. Daarnaast zijn we de gebruikers die fouten in de antwoordenlijst hebben gesignaleerd, zeer erkentelijk: Nabi Abudaldah, ing. A.S. Tigelaar, N.J. Schoonderbeek, Evert van de Vrie, Mathijs Schuts, Niël Dogger, Paul Bles, J. Bon, Max van den Aker, Evelien de Greef, Bas Bemelmans, Kevin de Berk, Veditam Bishoen, Loek Spitz, Robert van Eekhout, Tim de Graaff, Rik Kaasschieter, Jerry van Ulden en Theo de Jong. Een antwoordenlijst zonder fouten is ons doel; alle bijdragen die dat ideaal dichterbij brengen, zijn welkom!

We hopen dat ook de tweede editie van *Basisboek wiskunde* voor studenten en scholieren een betrouwbare gids in de wiskunde zal zijn.

Oosterhout en Breda, maart 2009,
Jan van de Craats en Rob Bosch

I Getallen



Dit deel gaat over het rekenen met getallen. Ze komen in allerlei soorten voor: positieve getallen, negatieve getallen, gehele getallen, rationale en irrationale getallen. De getallen $\sqrt{2}$, π en e zijn voorbeelden van irrationale getallen. In de hogere wiskunde wordt ook met imaginaire en complexe getallen gewerkt, maar in dit boek zullen we ons beperken tot de *reële getallen*, dat wil zeggen de getallen die je meetkundig voor kunt stellen als punten op een getallenlijn.

In de eerste twee hoofdstukken worden de rekenvaardigheden van de basisschool (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van gehele getallen en breuken) in kort bestek opgehaald. Wie hier moeite mee heeft, doet er verstandig aan om eerst ons *Basisboek rekenen* (Pearson Education, 2007) door te werken.

1 Rekenen met gehele getallen

Voer de volgende berekeningen uit:

1.1

a.
$$\begin{array}{rl} 873 & \\ 112 & \\ 1718 & \\ 157 & \\ 3461 & \\ \hline & + \\ \dots & \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 1578 & \\ 9553 & \\ 7218 & \\ 212 & \\ 4139 & \\ \hline & + \\ \dots & \end{array}$$

1.2

a.
$$\begin{array}{rl} 9134 & \\ 4319 & \\ \hline & - \\ \dots & \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 4585 & \\ 3287 & \\ \hline & - \\ \dots & \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rl} 7033 & \\ 1398 & \\ \hline & - \\ \dots & \end{array}$$

1.3 Bereken:

a. 34×89

b. 67×46

c. 61×93

d. 55×11

e. 78×38

1.4 Bereken:

a. 354×83

b. 67×546

c. 461×79

d. 655×102

e. 178×398

Bereken het quotiënt en de rest met behulp van een staartdeling:

1.5

a. $154 : 13$

b. $435 : 27$

c. $631 : 23$

d. $467 : 17$

e. $780 : 37$

1.6

a. $2334 : 53$

b. $6463 : 101$

c. $7682 : 59$

d. $6178 : 451$

e. $5811 : 67$

1.7

a. $15457 : 11$

b. $4534 : 97$

c. $63321 : 23$

d. $56467 : 179$

e. $78620 : 307$

1.8

a. $42334 : 41$

b. $13467 : 101$

c. $35641 : 99$

d. $16155 : 215$

e. $92183 : 83$

Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen

De rij $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$ is de rij van de *positieve gehele getallen*. Met deze rij leert ieder kind tellen. Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van zulke getallen zonder rekenmachine leer je op de basisschool. Hiernaast staan voorbeelden.

$$\begin{array}{r} 341 \\ 295 \\ 718 \\ 12 \\ 1431 \\ \hline 2797 \end{array} + \qquad \begin{array}{r} 8135 \\ 3297 \\ \hline 4838 \end{array} - \qquad \begin{array}{r} 431 \\ 728 \\ \hline 3448 \\ 862 \\ 3017 \\ \hline 313768 \end{array} \times$$

Delen met rest

Delen zonder rekenmachine gaat met een *staartdeling*. Hiernaast zie je de staartdeling voor 83218 : 37, dat wil zeggen 83218 gedeeld door 37. Het *quotiënt* 2249 vind je rechtsboven, en de *rest* 5 onderaan de staart. De staartdeling leert dat

$$83218 = 2249 \times 37 + 5$$

We kunnen dit ook schrijven als

$$\frac{83218}{37} = 2249 + \frac{5}{37}$$

Het rechterlid wordt meestal vereenvoudigd tot $2249\frac{5}{37}$, zodat we krijgen

$$\frac{83218}{37} = 2249\frac{5}{37}$$

$$\begin{array}{lrl} 37 \; / & 83218 & \backslash \; 2249 \\ & 74 & \quad \uparrow \\ \cline{2-2} & 92 & \text{quotiënt} \\ & 74 & \\ \cline{2-2} & 181 & \\ & 148 & \\ \cline{2-2} & 338 & \\ & 333 & \\ \cline{2-2} & 5 & \leftarrow \text{rest} \end{array}$$

Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

1.9

a. 24
b. 72
c. 250
d. 96
e. 98

1.10

a. 288
b. 1024
c. 315
d. 396
e. 1875

1.11

a. 972
b. 676
c. 2025
d. 1122
e. 860

1.12

a. 255
b. 441
c. 722
d. 432
e. 985

1.13

a. 2000
b. 2001
c. 2002
d. 2003
e. 2004

1.14

a. je geboortejaar
b. je postcode
c. je pincode

Bepaal alle delers van de volgende getallen. Werk nauwkeurig en systematisch, want als je niet goed oplet, mis je er snel een paar. Het is handig om eerst de priemontbinding van zo'n getal op te schrijven.

1.15

a. 12
b. 20
c. 32
d. 108
e. 144

1.16

a. 72
b. 100
c. 1001
d. 561
e. 196

Delers en priemgetallen

Soms gaat een deling op, dat wil zeggen dat de rest nul is. Zo is bijvoorbeeld $238 : 17 = 14$. Dan geldt dus $238 = 14 \times 17$. De getallen 14 en 17 heten *delers* van 238 en de schrijfwijze $238 = 14 \times 17$ heet een *ontbinding in factoren* van 238. De woorden 'deler' en 'factor' zijn in dit verband synoniemen.

Van de beide delers is 14 zelf ook weer te ontbinden, namelijk als $14 = 2 \times 7$, maar verder kan de ontbinding van 238 niet worden voortgezet, want 2, 7 en 17 zijn alle drie *priemgetallen*, dat wil zeggen getallen die niet in kleinere factoren zijn te ontbinden. Daarmee is de *ontbinding in priemfactoren* van 238 gevonden: $238 = 2 \times 7 \times 17$.

Omdat $238 = 1 \times 238$ ook een ontbinding van 238 is, zijn 1 en 238 ook delers van 238. Elk getal heeft 1 en zichzelf als deler. De interessante, *echte* delers zijn echter de delers die groter dan 1 zijn en kleiner dan het getal zelf. De priemgetallen zijn de getallen die groter dan 1 zijn en geen echte delers hebben. De rij van alle priemgetallen begint als volgt:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, \ldots$$

Elk geheel getal dat groter dan 1 is, kan ontbonden worden in priemfactoren. Hiernaast staat in voorbeelden geïllustreerd hoe je zo'n *priemontbinding* vindt door systematisch naar steeds grotere priemdelers te zoeken. Telkens als je er een vindt, deel je die uit, en ga je met het quotiënt verder.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3003 & 3 \\ 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Je bent klaar als je op 1 bent uitgekomen. De priemfactoren staan rechts. Uit de drie ladderdiagrammen lezen we de priemontbindingen af:

$$\begin{array}{rcccl} 180 & = & 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 & = & 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 & = & 3 \times 3 \times 5 \times 13 & = & 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 & = & 3 \times 7 \times 11 \times 13 & & \end{array}$$

Je ziet dat het handig is om priemfactoren die vaker dan één keer voorkomen, samen te nemen als een macht: $2^2 = 2 \times 2$ en $3^2 = 3 \times 3$. Nog meer voorbeelden (maak zelf de ladderdiagrammen):

$$\begin{array}{rcccl} 120 & = & 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 & = & 2^3 \times 3 \times 5 \\ 81 & = & 3 \times 3 \times 3 \times 3 & = & 3^4 \\ 48 & = & 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 & = & 2^4 \times 3 \end{array}$$

Bepaal de grootste gemene deler (ggd) van:

1.17

a. 12 en 30
b. 24 en 84
c. 27 en 45
d. 32 en 56
e. 34 en 85

1.18

a. 45 en 225
b. 144 en 216
c. 90 en 196
d. 243 en 135
e. 288 en 168

1.19

a. 1024 en 864
b. 1122 en 1815
c. 875 en 1125
d. 1960 en 6370
e. 1024 en 1152

1.20

a. 1243 en 1244
b. 1721 en 1726
c. 875 en 900
d. 1960 en 5880
e. 1024 en 2024

Bepaal het kleinste gemene veelvoud (kgv) van:

1.21

a. 12 en 30
b. 27 en 45
c. 18 en 63
d. 16 en 40
e. 33 en 121

1.22

a. 52 en 39
b. 64 en 80
c. 144 en 240
d. 169 en 130
e. 68 en 51

1.23

a. 250 en 125
b. 144 en 216
c. 520 en 390
d. 888 en 185
e. 124 en 341

1.24

a. 240 en 180
b. 276 en 414
c. 588 en 504
d. 315 en 189
e. 403 en 221

Bepaal de ggd en het kgv van:

1.25

a. 9, 12 en 30
b. 24, 30 en 36
c. 10, 15 en 35
d. 18, 27 en 63
e. 21, 24 en 27

1.26

a. 28, 35 en 49
b. 64, 80 en 112
c. 39, 52 en 130
d. 144, 168 en 252
e. 189, 252 en 315

De ggd en het kgv

Twee getallen kunnen delers gemeen hebben. De *grootste gemene deler* (ggd) is, zoals de naam al zegt, hun grootste gemeenschappelijke deler. Wanneer de ontbinding in priemfactoren van beide getallen bekend is, kan de ggd hieruit direct worden afgelezen. Zo hebben we op bladzijde 9 de volgende priemontbindingen gevonden:

$$\begin{aligned} 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 &= 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Hieruit zien we dat

$$\begin{aligned} \text{ggd}(180, 585) &= \text{ggd}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 3^2 \times 5 = 45 \\ \text{ggd}(180, 3003) &= \text{ggd}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \\ \text{ggd}(585, 3003) &= \text{ggd}(3^2 \times 5 \times 13\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \times 13 = 39 \end{aligned}$$

Het *kleinste gemene veelvoud* (kgv) van twee getallen is het kleinste getal dat zowel een veelvoud van het ene getal, als van het andere getal is. Met andere woorden, het is het kleinste getal dat door allebei die getallen deelbaar is. Ook het kgv kan uit de priemontbindingen worden afgelezen. Zo is

$$\text{kgv}(180, 585) = \text{kgv}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13 = 2340$$

Een handige eigenschap van de ggd en het kgv van twee getallen is dat hun product gelijk is aan het product van de beide getallen. Zo is

$$\text{ggd}(180, 585) \times \text{kgv}(180, 585) = 45 \times 2340 = 105300 = 180 \times 585$$

Ook van meer dan twee getallen kun je de ggd en het kgv direct uit hun priemontbindingen aflezen. Zo is

$$\begin{aligned} \text{ggd}(180, 585, 3003) &= 3 \\ \text{kgv}(180, 585, 3003) &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 180180 \end{aligned}$$

Een slim idee

Er is een methode om de ggd van twee getallen te bepalen waarbij priemontbindingen niet nodig zijn, en die vaak veel sneller werkt. Het basisidee is dat de ggd van twee getallen ook een deler moet zijn van het *verschil* van die twee getallen. Zie je ook waarom dit zo is?
Zo moet $\text{ggd}(4352, 4342)$ ook een deler zijn van $4352 - 4342 = 10$. Het getal 10 heeft alleen maar de priemdelers 2 en 5. Het is duidelijk dat 5 geen deler is van de beide getallen, maar 2 wel, en dus geldt $\text{ggd}(4352, 4342) = 2$. Wie slim is kan zich door dit idee te gebruiken veel rekenwerk besparen!

2 Rekenen met breuken

2.1 Vereenvoudig:

a. $\frac{15}{20}$

b. $\frac{18}{45}$

c. $\frac{21}{49}$

d. $\frac{27}{81}$

e. $\frac{24}{96}$

2.2 Vereenvoudig:

a. $\frac{60}{144}$

b. $\frac{144}{216}$

c. $\frac{135}{243}$

d. $\frac{864}{1024}$

e. $\frac{168}{288}$

2.3 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{7}$

c. $\frac{4}{9}$ en $\frac{2}{5}$

d. $\frac{7}{11}$ en $\frac{3}{4}$

e. $\frac{2}{13}$ en $\frac{5}{12}$

2.4 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

b. $\frac{3}{10}$ en $\frac{2}{15}$

c. $\frac{3}{8}$ en $\frac{5}{6}$

d. $\frac{5}{9}$ en $\frac{7}{12}$

e. $\frac{3}{20}$ en $\frac{1}{8}$

2.5 Maak gelijknamig:

a. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$

b. $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$

c. $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ en $\frac{1}{9}$

d. $\frac{2}{10}, \frac{1}{15}$ en $\frac{5}{6}$

e. $\frac{5}{12}, \frac{7}{18}$ en $\frac{3}{8}$

2.6 Maak gelijknamig:

a. $\frac{2}{27}, \frac{5}{36}$ en $\frac{5}{24}$

b. $\frac{7}{15}, \frac{3}{20}$ en $\frac{5}{6}$

c. $\frac{4}{21}, \frac{3}{14}$ en $\frac{7}{30}$

d. $\frac{4}{63}, \frac{5}{42}$ en $\frac{1}{56}$

e. $\frac{5}{78}, \frac{5}{39}$ en $\frac{3}{65}$

Bepaal telkens welke van de volgende twee breuken de grootste is door ze eerst gelijknamig te maken.

2.7

a. $\frac{5}{18}$ en $\frac{6}{19}$

b. $\frac{7}{15}$ en $\frac{5}{12}$

c. $\frac{9}{20}$ en $\frac{11}{18}$

d. $\frac{11}{36}$ en $\frac{9}{32}$

e. $\frac{20}{63}$ en $\frac{25}{72}$

2.8

a. $\frac{4}{7}$ en $\frac{2}{3}$

b. $\frac{14}{85}$ en $\frac{7}{51}$

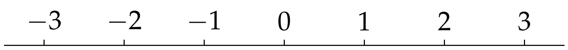
c. $\frac{26}{63}$ en $\frac{39}{84}$

d. $\frac{31}{90}$ en $\frac{23}{72}$

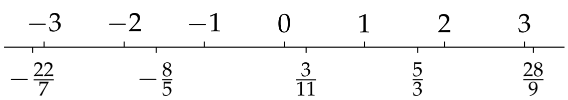
e. $\frac{37}{80}$ en $\frac{29}{60}$

Rationale getallen

De rij $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ is de rij van alle gehele getallen. Een meetkundig beeld ervan geeft de *getallenlijn* die hieronder is getekend.



Ook de *rationale getallen*, dat wil zeggen de getallen die als een breuk geschreven kunnen worden, liggen op de getallenlijn. Hieronder zijn enige rationale getallen op die lijn aangegeven.



In een breuk staan twee gehele getallen, de *teller* en de *noemer*, gescheiden door een horizontale of een schuine breukstreep. Zo is 28 de teller en 6 de noemer van de breuk $\frac{28}{6}$. De noemer van een breuk mag niet nul zijn. Een rationaal getal is een getal dat je als breuk kunt schrijven, maar die schrijfwijze ligt niet ondubbelzinnig vast: als je teller en noemer met hetzelfde gehele getal (ongelijk aan nul) vermenigvuldigt of door een gemeenschappelijke deler deelt, verandert de waarde ervan niet. Zo is

$$\frac{28}{6} = \frac{14}{3} = \frac{-14}{-3} = \frac{70}{15}$$

Breuken als $\frac{-5}{3}$ en $\frac{22}{-7}$ schrijven we meestal als $-\frac{5}{3}$, respectievelijk $-\frac{22}{7}$. Ook gehele getallen kun je als breuk schrijven, bijvoorbeeld $7 = \frac{7}{1}$, $-3 = -\frac{3}{1}$ en $0 = \frac{0}{1}$. De gehele getallen behoren dus ook tot de rationale getallen.

Delen van teller en noemer door dezelfde factor (groter dan 1) heet *vereenvoudigen*. Zo kun je $\frac{28}{6}$ vereenvoudigen tot $\frac{14}{3}$ door teller en noemer door 2 te delen. Een breuk is *onvereenvoudigbaar* als de grootste gemene deler (ggd) van teller en noemer 1 is. Zo is $\frac{14}{3}$ een onvereenvoudigbare breuk, maar $\frac{28}{6}$ niet. Je kunt van elke breuk een onvereenvoudigbare breuk maken door teller en noemer te delen door hun ggd.

Breuken heten *gelijknamig* als ze dezelfde noemer hebben. Twee breuken kun je altijd gelijknamig maken. Voorbeeld: $\frac{4}{15}$ en $\frac{5}{21}$ zijn niet gelijknamig. Je kunt ze gelijknamig maken door ze allebei als noemer $15 \times 21 = 315$ te geven: $\frac{4}{15} = \frac{84}{315}$ en $\frac{5}{21} = \frac{75}{315}$. Maar als je als gemeenschappelijke noemer het kgv van de oorspronkelijke noemers kiest, in dit geval dus $\text{kgv}(15, 21) = 105$, krijg je de eenvoudigste gelijknamige breuken, namelijk $\frac{28}{105}$ en $\frac{25}{105}$.

Bereken:

2.9
a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
b. $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$
c. $\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$
d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$
e. $\frac{1}{2}+\frac{1}{15}$

2.10
a. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$
b. $\frac{3}{5}-\frac{4}{7}$
c. $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$
d. $\frac{4}{9}-\frac{3}{8}$
e. $\frac{5}{11}+\frac{4}{15}$

2.11
a. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$
b. $\frac{1}{9}-\frac{2}{15}$
c. $\frac{3}{8}+\frac{1}{12}$
d. $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$
e. $\frac{4}{15}-\frac{3}{10}$

2.12
a. $\frac{2}{45}+\frac{1}{21}$
b. $\frac{5}{27}-\frac{1}{36}$
c. $\frac{5}{72}+\frac{7}{60}$
d. $\frac{3}{34}+\frac{1}{85}$
e. $\frac{7}{30}+\frac{8}{105}$

2.13
a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$
b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$
c. $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$
d. $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}-\frac{1}{3}$
e. $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

2.14
a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$
c. $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$
d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$
e. $\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.15
a. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$
c. $\frac{1}{12}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}$
d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}-\frac{1}{18}$
e. $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$

2.16
a. $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$
b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{2}{15}$
c. $\frac{1}{18}-\frac{7}{30}-\frac{3}{20}$
d. $\frac{3}{14}-\frac{1}{21}+\frac{5}{6}$
e. $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}+\frac{4}{15}$

2.17
a. $\frac{2}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{10}$
b. $\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$
c. $\frac{8}{21}-\frac{2}{7}+\frac{3}{4}$
d. $\frac{2}{11}-\frac{5}{13}+\frac{1}{2}$
e. $\frac{4}{17}-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$

Optellen en aftrekken van breuken

Optellen van twee gelijknamige breuken is eenvoudig: de noemer blijft hetzelfde en de tellers worden bij elkaar opgeteld. Hetzelfde geldt voor het aftrekken van gelijknamige breuken. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13}+\frac{12}{13}=\frac{17}{13} \qquad \text{en} \qquad \frac{5}{13}-\frac{12}{13}=\frac{-7}{13}=-\frac{7}{13}$$

Zijn de breuken niet gelijknamig, dan moet je ze eerst gelijknamig maken. Het is weer het zuinigst om als gemeenschappelijke noemer het kgv van de afzonderlijke noemers te kiezen. Voorbeelden:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}+\frac{8}{3} &= \frac{6}{15}+\frac{40}{15} &&= \frac{46}{15} \\ -\frac{7}{12}+\frac{4}{15} &= -\frac{35}{60}+\frac{16}{60} &&= -\frac{19}{60} \\ -\frac{13}{7}-\frac{18}{5} &= -\frac{65}{35}-\frac{126}{35} &&= -\frac{191}{35} \end{aligned}$$

Ook wanneer je meer dan twee breuken moet optellen of aftrekken, is het handig om ze eerst allemaal gelijknamig te maken. Het zuinigste is het om als noemer het kgv van de oorspronkelijke noemers te kiezen. Voorbeeld:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{10}-\frac{2}{15}=\frac{20}{30}+\frac{9}{30}-\frac{4}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

Je ziet dat je je antwoord soms nog kunt vereenvoudigen.

Breuken en rationale getallen

Een breuk is een *schrijfwijze* van een rationaal getal. Door teller en noemer met dezelfde factor te vermenigvuldigen, verander je wel de breuk, maar niet het rationale getal dat erdoor wordt voorgesteld. Je kunt ook zeggen dat de *waarde* van de breuk niet verandert als je teller en noemer met dezelfde factor vermenigvuldigt. De breuken $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{6}$ en $\frac{50}{20}$ hebben allemaal dezelfde waarde, en op de getallenlijn hebben ze ook allemaal dezelfde plaats, namelijk halverwege 2 en 3.
In de praktijk is men overigens meestal niet zo precies: vaak wordt 'breuk' gebruikt op plaatsen waar je strikt genomen 'waarde van de breuk' zou moeten zeggen. We doen dat trouwens ook wanneer we schrijven $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$ of wanneer we zeggen dat $\frac{5}{2}$ gelijk is aan $\frac{15}{6}$.

Bereken:

2.18

a. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$

b. $\frac{4}{9} \times \frac{2}{5}$

c. $\frac{2}{13} \times \frac{5}{7}$

d. $\frac{9}{13} \times \frac{7}{2}$

e. $\frac{1}{30} \times \frac{13}{10}$

2.19

a. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{2}$

b. $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$

c. $\frac{14}{15} \times \frac{10}{7}$

d. $\frac{25}{12} \times \frac{18}{35}$

e. $\frac{36}{21} \times \frac{28}{27}$

2.20

a. $\frac{63}{40} \times \frac{16}{27}$

b. $\frac{49}{25} \times \frac{30}{21}$

c. $\frac{99}{26} \times \frac{39}{44}$

d. $\frac{51}{36} \times \frac{45}{34}$

e. $\frac{46}{57} \times \frac{38}{69}$

2.21

a. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{15}{4}$

b. $\frac{6}{35} \times \frac{15}{4} \times \frac{14}{9}$

c. $\frac{26}{33} \times \frac{22}{9} \times \frac{15}{39}$

d. $\frac{18}{49} \times \frac{35}{12} \times \frac{4}{21}$

e. $\frac{24}{15} \times \frac{4}{27} \times \frac{45}{16}$

2.22

a. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$

b. $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$

c. $6 : \frac{1}{5}$

d. $\frac{6}{5} : \frac{10}{9}$

e. $\frac{4}{5} : \frac{5}{7}$

2.23

a. $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$

b. $\frac{7}{10} : \frac{21}{15}$

c. $10 : \frac{5}{3}$

d. $\frac{12}{25} : \frac{18}{35}$

e. $\frac{24}{49} : \frac{36}{49}$

2.24

a. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$

b. $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{10}}$

c. $\dfrac{\frac{12}{7}}{\frac{9}{14}}$

2.25

a. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$

b. $\dfrac{\frac{5}{9}+\frac{3}{10}}{\frac{3}{4}-\frac{8}{9}}$

c. $\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}$

2.26

a. $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}$

b. $\dfrac{\frac{1}{6}-\frac{5}{3}}{\frac{2}{7}-\frac{2}{5}}$

c. $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{11}{12}}{\frac{6}{7}+\frac{3}{11}}$

Vermenigvuldigen en delen van breuken

Het *product* van twee breuken is de breuk die als teller het product van de tellers, en als noemer het product van de noemers heeft. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13} \times \frac{12}{7} = \frac{5 \times 12}{13 \times 7} = \frac{60}{91} \qquad \text{en} \qquad \frac{8}{7} \times \frac{-5}{11} = \frac{8 \times (-5)}{7 \times 11} = -\frac{40}{77}$$

Voor delen van breuken geldt: *delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk.* De omgekeerde breuk krijg je door teller en noemer te verwisselen. Voorbeelden:

$$\frac{5}{13} : \frac{12}{7} = \frac{5}{13} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{156} \qquad \text{en} \qquad \frac{8}{7} : \frac{-5}{11} = \frac{8}{7} \times \frac{11}{-5} = -\frac{88}{35}$$

Soms gebruikt men ook een andere notatie voor het delen van breuken, namelijk met de horizontale breukstreep. Voorbeeld:

$$\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{7}} \qquad \text{in plaats van} \qquad \frac{5}{13} : \frac{12}{7}$$

Er staat dan dus een 'breuk' met een breuk in de teller en een breuk in de noemer.

Andere notaties voor breuken

In plaats van een horizontale scheidingsstreep tussen teller en noemer wordt soms ook een schuine streep gebruikt: $1/2$ in plaats van $\frac{1}{2}$. Soms is het ook om typografische redenen handiger om de schuine-streepnotatie te gebruiken. De notaties worden ook wel samen gebruikt, vaak ook weer om de typografie overzichtelijker te maken, bijvoorbeeld

$$\frac{5/13}{12/7} \qquad \text{of} \qquad \frac{5}{13} \Big/ \frac{12}{7}$$

In sommige situaties kan het voordelen hebben om breuken in een *gemengde notatie* te schrijven, dat wil zeggen dat men het gehele deel ervan apart zet, bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}$ in plaats van $\frac{5}{2}$. Bij vermenigvuldigen en delen is die notatie echter niet handig, vandaar dat we er in dit boek haast nooit gebruik van zullen maken.

II Algebra

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

De algebra is de kunst van het rekenen met letters. Die letters stellen meestal getallen voor. In de eerste twee hoofdstukken van dit deel behandelen we de grondprincipes van de algebra: prioriteitsregels, haakjes uitwerken, termen buiten haakjes brengen, de *bananenformule* en de *merkwaardige producten*. Het laatste hoofdstuk gaat over het rekenen met breuken waarin letters voorkomen, met name over het vereenvoudigen, het onder één noemer brengen en het splitsen van zulke breuken.

4 Rekenen met letters

Bij de volgende opgaven gaat het er om de gegeven waarden in te vullen (te *substitueren*) in de gegeven algebraïsche uitdrukking en het resultaat te berekenen. Voorbeeld: als je $a = 5$ substitueert in de uitdrukking $3a^3 - 2a + 4$ krijg je $3 \times 5^3 - 2 \times 5 + 4 = 375 - 10 + 4 = 369$.

4.1 Substitueer $a = 3$ in
a. $2a^2$
b. $-a^2 + a$
c. $4a^3 - 2a$
d. $-3a^3 - 3a^2$
e. $a(2a - 3)$

4.2 Substitueer $a = -2$ in
a. $3a^2$
b. $-a^3 + a$
c. $3(a^2 - 2a)$
d. $-2a^2 + a$
e. $2a(-a + 3)$

4.3 Substitueer $a = 4$ in
a. $3a^2 - 2a$
b. $-a^3 + 2a^2$
c. $-2(a^2 - 2a)$
d. $(2a - 4)(-a + 2)$
e. $(3a - 4)^2$

4.4 Substitueer $a = -3$ in
a. $-a^2 + 2a$
b. $a^3 - 2a^2$
c. $-3(a^2 - 2a)$
d. $(2a - 1)(-3a + 2)$
e. $(2a + 1)^2$

4.5 Substitueer $a = 3$ en $b = 2$ in
a. $2a^2b$
b. $3a^2b^2 - 2ab$
c. $-3a^2b^3 + 2ab^2$
d. $2a^3b - 3ab^3$
e. $-5ab^2 - 2a^2 + 3b^3$

4.6 Substitueer $a = -2$ en $b = -3$ in
a. $3ab - a$
b. $2a^2b - 2ab$
c. $-3ab^2 + 3ab$
d. $a^2b^2 - 2a^2b + ab^2$
e. $-a^2 + b^2 + 4ab$

4.7 Substitueer $a = 5$ en $b = -2$ in
a. $3(ab)^2 - 2ab$
b. $a(a + b)^2 - (2a)^2$
c. $-3ab(a + 2b)^2$
d. $3a(a - 2b)(a^2 - 2ab)$
e. $(a^2b - 2ab^2)^2$

4.8 Substitueer $a = -2$ en $b = -1$ in
a. $-(a^2b)^3 - 2(ab^2)^2$
b. $-b(3a^2 - 2b)^2$
c. $(3a^2b - 2ab^2)(2a^2 - b^2)$
d. $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
e. $\big((-a^2b + 2b)(ab^2 - 2a)\big)^2$

Prioriteitsregels

Letters in algebraïsche uitdrukkingen stellen in dit deel steeds getallen voor. Met die letters zijn dan ook gelijk rekenkundige bewerkingen gedefinieerd. Zo is $a + b$ de som van a en b, $a - b$ het verschil van a en b enzovoort.

Bij het vermenigvuldigen vervangen we het maalteken vaak door een punt, of we laten het helemaal weg. We schrijven dus vaak $a \cdot b$ of ab in plaats van $a \times b$. Vaak gebruiken we ook mengvormen van letters en getallen: $2ab$ betekent $2 \times a \times b$. Het is gebruikelijk om in zulke mengvormen het getal voorop te zetten, dus $2ab$ en niet $a2b$ of $ab2$.

Het is gebruikelijk om de volgende *prioriteitsregels* te hanteren:

a. Optellen en aftrekken geschieden in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
b. Vermenigvuldigen en delen geschieden in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
c. Vermenigvuldigen en delen hebben voorrang boven optellen en aftrekken.

We geven hieronder enige getallenvoorbeelden, waarbij we in het rechterlid eerst de volgorde van de bewerkingen met haakjes expliciet aangeven en vervolgens het antwoord berekenen.

$$\begin{array}{rcccr} 5-7+8 & = & (5-7)+8 & = & 6 \\ 4-5\times 3 & = & 4-(5\times 3) & = & -11 \\ 9+14:7 & = & 9+(14:7) & = & 11 \\ 12:3\times 4 & = & (12:3)\times 4 & = & 16 \end{array}$$

Nu met letters. Het rechterlid geeft de uitrekenvolgorde met haakjes aan.

$$\begin{array}{lcl} a-b+c & = & (a-b)+c \\ a-bc & = & a-(b\times c) \\ a+b:c & = & a+(b:c) \\ a:b\times c & = & (a:b)\times c \end{array}$$

Let op: als je in het onderste voorbeeld het linkerlid noteert als $a : bc$ zullen velen dit opvatten als $a : (b \times c)$, en dat is echt iets anders dan $(a : b) \times c$. Neem bijvoorbeeld $a = 12$, $b = 3$ en $c = 4$, dan is $(12 : 3) \times 4 = 16$ maar $12 : (3 \times 4) = 1$. Schrijf dus niet $a : bc$ maar $a : (bc)$ wanneer je dat laatste bedoelt. Meer in het algemeen:

Gebruik haakjes in alle gevallen waarin misverstanden omtrent de volgorde van het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen zouden kunnen ontstaan!

Vuistregel: beter te veel haakjes gebruiken dan te weinig!

Schrijf de volgende uitdrukkingen zo eenvoudig mogelijk als een macht of een product van machten.

4.9
a. $a^3 \cdot a^5$
b. $b^3 \cdot b^2$
c. $a^4 \cdot a^7$
d. $b \cdot b^3$
e. $a^7 \cdot a^7$

4.10
a. $(a^2)^3$
b. $(b^3)^4$
c. $(a^5)^5$
d. $(b^4)^2$
e. $(a^6)^9$

4.11
a. $(ab)^4$
b. $(a^2b^3)^2$
c. $(a^4b)^3$
d. $(a^2b^3)^4$
e. $(a^3b^4)^5$

4.12
a. $a^4 \cdot a^3 \cdot a$
b. $2a^5 \cdot 3a^5$
c. $4a^2 \cdot 3a^2 \cdot 5a^2$
d. $5a^3 \cdot 6a^4 \cdot 7a$
e. $a \cdot 2a^2 \cdot 3a^3$

4.13
a. $(2a^2)^3$
b. $(3a^3b^4)^4$
c. $(4a^2b^2)^2$
d. $(5a^5b^3)^3$
e. $(2ab^5)^4$

4.14
a. $3a^2b \cdot 5ab^4$
b. $6a^3b^4 \cdot 4a^6b^2$
c. $3a^2b^2 \cdot 2a^3b^3$
d. $7a^5b^3 \cdot 5a^7b^5$
e. $8a^2b^4 \cdot 3ab^2 \cdot 6a^5b^4$

4.15
a. $3a^2 \cdot -2a^3 \cdot -4a^5$
b. $-5a^3 \cdot 2a^2 \cdot -4a^3 \cdot 3a^2$
c. $4a^2 \cdot -2a^4 \cdot -5a^5$
d. $2a^4 \cdot -3a^5 \cdot -3a^6$
e. $-3a^2 \cdot -2a^4 \cdot -4a$

4.16
a. $(-2a^2)^3$
b. $(-3a^3)^2$
c. $(-5a^4)^4$
d. $(-a^2b^4)^5$
e. $(-2a^3b^5)^7$

4.17
a. $3a^2 \cdot (2a^3)^2$
b. $(-3a^3)^2 \cdot (2a^2)^3$
c. $(3a^4)^3 \cdot -5a^6$
d. $2a^2 \cdot (5a^3)^3 \cdot 3a^5$
e. $-2a^5 \cdot (-2a)^5 \cdot 5a^2$

4.18
a. $2a^3b^4(-3a^2b^3)^2$
b. $(-2a^2b^4)^3(-3a^2b^5)^2$
c. $2a^2b(-2a^2b)^2(-2a^2b)^3$
d. $3a^4b^2(-3a^2b^4)^3(-2a^3b^2)^2$
e. $(2a^3)^4(-3b^2)^2(2a^2b^3)^3$

4.19
a. $(3a^2b^3c^4)^2(2ab^2c^3)^3$
b. $(-2a^3c^4)^2(-a^2b^3)^3(2b^3c^2)^4$
c. $2a^2c^3(3a^3b^2c)^4(-5ab^2c^5)$
d. $(-2a^3c)^6(5a^3b^2)^2(-5b^3c^4)^4$
e. $-(-3a^2b^2c^2)^3(-2a^3b^3c^3)^2$

4.20
a. $\left((a^3)^4\right)^3$
b. $\left((-a^2)^3(2a^3)^2\right)^2$
c. $\left((2a^2b^3)^2(-3a^3b^2)^3\right)^2$
d. $\left(-2a(-a^3)^2\right)^5$
e. $\left(-2(-a^2)^3\right)^2\left(-3(-a^4)^2\right)^3$

Rekenen met machten

In het vorige hoofdstuk hebben we onder andere de volgende rekenregels voor machten behandeld:

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n\times m} \\ (a \times b)^n &= a^n \times b^n \end{aligned}$$

We hebben toen alleen maar met concrete getallenvoorbeelden gerekend, maar nu kunnen we het ook met letters. In deze paragraaf zullen de exponenten wel steeds gegeven gehele getallen zijn, maar voor de grondtallen nemen we nu letters. Met de rekenregels kunnen we dan ingewikkelde algebraïsche uitdrukkingen met machten vereenvoudigen.

We geven een aantal voorbeelden. Eerst vier eenvoudige gevallen.

$$\begin{aligned} &a^4 \cdot a^5 = a^{4+5} = a^9 \\ &(a^2)^4 = a^{2\times 4} = a^8 \\ &(ab)^5 = a^5 \times b^5 = a^5 b^5 \\ &(a^2b^4)^3 = (a^2)^3(b^4)^3 = a^6 b^{12} \end{aligned}$$

Nu met getallen erbij:

$$\begin{aligned} &2a^3 \cdot 5a^7 = (2 \times 5)\, a^{3+7} = 10\, a^{10} \\ &(2a)^4 \cdot (5a)^3 = (2^4 \times 5^3)\, a^{4+3} = 2000\, a^7 \\ &(-2a)^7 = (-2)^7\, a^7 = -128\, a^7 \\ &(4a^2)^3 \cdot (-5a)^2 = 64 \cdot 25\, (a^2)^3 \cdot a^2 = 1600\, a^8 \end{aligned}$$

Maak nu alle opgaven op de tegenoverliggende bladzijde. Let daarbij ook op de mintekens, als die er zijn. Bedenk:

Een negatief getal tot een even *macht geeft een positief getal.*
Een negatief getal tot een oneven *macht geeft een negatief getal.*

Werk bij de volgende opgaven de haakjes uit.

4.21

a. $3(2a+5)$
b. $8(5a-2)$
c. $-5(3a-2)$
d. $12(-5a+1)$
e. $-7(7a+6)$

4.22

a. $2a(a-5)$
b. $7a(2a+12)$
c. $-13a(9a-5)$
d. $8a(8a-15)$
e. $-21a(3a+9)$

4.23

a. $2a(a^2+9)$
b. $3a^2(4a-7)$
c. $-5a^2(2a^2+4)$
d. $9a^2(a^2+2a)$
e. $-3a(a^2-4a)$

4.24

a. $4a^2(3a^2+2a+3)$
b. $-3a^2(2a^3+5a^2-a)$
c. $7a^3(2a^2+3a-6)$
d. $12a^2(-6a^3-2a^2+a-1)$
e. $-5a^2(3a^4+a^2-2)$

4.25

a. $2(3a+4b)$
b. $-5(2a-5b)$
c. $2a(a+2b)$
d. $16a(-4a+6b)$
e. $-22a(8a-11b)$

4.26

a. $3a(9a+5b-12)$
b. $2a^2(7a-6b)$
c. $-8a^2(7a+4b-1)$
d. $6a^2(-2a+2b+2)$
e. $-13a^2(13a+12b-14)$

4.27

a. $2a^2(3a^2+2b-3)$
b. $-5a^3(2a^2+a-2b)$
c. $2b^2(3a^2+2b^2)$
d. $4a^3(-2a^2+5b^2-2b)$
e. $-14b^3(14a^2+2a-5b^2)$

4.28

a. $2a^2(a^2+3ab)$
b. $-5a^2(3a^2+2ab-3b^2)$
c. $2a^3(3a^3+2a^2b^2-b^2)$
d. $-3a^4(2a^3+2a^2b^2+2ab^2)$
e. $7a^3(-7a^3+3a^2b-4ab^2)$

4.29

a. $2ab(a^2+2ab-b^2)$
b. $-5ab(-3a^2b+2ab^2-6b)$
c. $6ab^2(2a^2b-5ab-b^2)$
d. $-12a^2b^2(-12a^2b^2+6ab-12)$
e. $6ab^2(2a^2b+9ab-ab^2)$

4.30

a. $a^3b^2(-5a^2b^3+2a^2b^2-ab^3)$
b. $-a^2b^3(-a^3b^2-a^2b-14)$
c. $15a^4b^3(-a^3b^4-6a^2b^3+ab^4)$
d. $-a^5b^4(13a^4b^5-12a^2b^3+9ab^5)$
e. $7a^2b^2(-7a^3-7ab^2-1)$

4.31

a. $2a(a+6)-4(a+2)$
b. $-4a(3a+6)+2(a-3)$
c. $7a(-2a-1)-2a(-7a+1)$
d. $-8a(a-8)-2(-a+5)$
e. $5a(2a-5)+5(2a-1)$
f. $-2a(a+1)-(a-1)$

4.32

a. $3a(a+2b)-b(-2a+2)$
b. $-a(a-b)+b(-a+1)$
c. $2a(2a+b)-2b(-a+b)-2(a-b)$
d. $-b(-a+2b)+3(2a-b)-a(2a+b)$

Haakjes uitwerken

De *distributieve wetten* luiden:

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab+ac \\ (a+b)c &= ac+bc \end{aligned}$$

Ze zijn algemeen geldig, welke getallen je ook invult voor a, b en c.
Voorbeelden: $15(3+8) = 15 \times 3 + 15 \times 8 = 45 + 120 = 165$,
$(3-8)(-11) = 3 \times (-11) + (-8) \times (-11) = -33 + 88 = 55$.

Met de distributieve wetten kun je 'haakjes uitwerken'. Voorbeelden:

$$\begin{aligned} 5a^2(4b-2c) &= 20a^2b - 10a^2c \\ 3ab(c+2b) &= 3abc + 6ab^2 \\ (5a-2b)3c^2 &= 15ac^2 - 6bc^2 \end{aligned}$$

Let erop dat de distributieve wetten in hun meest eenvoudige, 'kale' vorm zijn geformuleerd, maar dat we bij de voorbeelden voor a, b en c allerlei algebraische uitdrukkingen hebben gesubstitueerd. Het is juist deze mogelijkheid om met formules te manipuleren die de algebra tot zo'n nuttig instrument maakt. Bedenk ook dat het maalteken in al deze voorbeelden weggelaten is. Mét maaltekens luidt het eerste voorbeeld

$$5 \times a^2 \times (4 \times b - 2 \times c) = 20 \times a^2 \times b - 10 \times a^2 \times c$$

waarmee zo'n formule weliswaar omslachtiger, maar voor de beginner wel begrijpelijker wordt.

We kunnen het bovenstaande ook toepassen in samenstellingen en combinaties. Voorbeelden:

$$\begin{aligned} &3a(4b-2c) + 2b(a-3c) = 12ab - 6ac + 2ab - 6bc = 14ab - 6ac - 6bc \\ &4a(b+c) - 5a(2b-3c) = 4ab + 4ac - 10ab + 15ac = -6ab + 19ac \\ &-2a(b-3c) - 5c(a+2b) = -2ab + 6ac - 5ac - 10bc = -2ab + ac - 10bc \end{aligned}$$

Let in de laatste twee voorbeelden vooral op de tekens. Bedenk dat bij vermenigvuldigen geldt:

Plus maal plus is plus	*Min maal plus is min*
Plus maal min is min	*Min maal min is plus*

Breng bij de volgende opgaven zo veel mogelijk factoren buiten haakjes.

4.33

a. $6a + 12$
b. $12a + 16$
c. $9a - 12$
d. $15a - 10$
e. $27a + 81$

4.34

a. $3a - 6b + 9$
b. $12a + 8b - 16$
c. $9a + 12b + 3$
d. $30a - 24b + 60$
e. $24a + 60b - 36$

4.35

a. $-6a + 9b - 15$
b. $-14a + 35b - 21$
c. $-18a - 24b - 12c$
d. $-28a - 70b + 42c$
e. $-45a + 27b - 63c - 18$

4.36

a. $a^2 + a$
b. $a^3 - a^2$
c. $a^3 - a^2 + a$
d. $a^4 + a^3 - a^2$
e. $a^6 - a^4 + a^3$

4.37

a. $3a^2 + 6a$
b. $9a^3 + 6a^2 - 3a$
c. $15a^4 - 10a^3 + 25a^2$
d. $27a^6 - 18a^4 - 36a^2$
e. $48a^4 - 24a^3 + 36a^2 + 60a$

4.38

a. $3a^2b + 6ab$
b. $9a^2b - 9ab^2$
c. $12ab^2 - 4ab$
d. $14a^2b^2 - 21ab^2$
e. $18a^2b^2 - 15a^2b$

4.39

a. $3a^3b^2 + 6a^2b$
b. $6a^4b^3 - 9a^3b^2 + 12a^2b$
c. $10a^3b^2c^2 - 5a^2bc^2 - 15abc$
d. $8a^6b^5c^4 - 12a^4b^4c^3 + 20a^3b^4c^3$
e. $a^3b^3c^3 + a^3b^3c^2 + a^3b^3c$

4.40

a. $-4a^2b^3c^2 + 2a^2b^2c^2 - 6a^2bc^2$
b. $a^6b^5c^4 - a^4b^6c^4 - a^3b^7c^3$
c. $-2a^3c^4 + 2a^2b^2c^3 - 4a^2bc^2$
d. $-a^7b^6 + a^6b^7 - a^5b^6$
e. $-a^8b^7c^6 - a^7b^6c^7 + a^6b^6c^6$

4.41

a. $a(b+3) + 3(b+3)$
b. $a(b-1) - 2(b-1)$
c. $2a(b+4) + 7(b+4)$
d. $a^2(2b-1) + 2(2b-1)$
e. $a(b-2) - (b-2)$

4.42

a. $a^2(b+1) - a(b+1)$
b. $6a(2b+1) + 12(2b+1)$
c. $-2a(b-1) + 4(b-1)$
d. $a^3(4b+3) - a^2(4b+3)$
e. $-6a^2(2b+3) - 9a(2b+3)$

4.43

a. $(a+1)(b+1) + 3(b+1)$
b. $(2a-1)(b+1) + (2a-1)(b-1)$
c. $(a+3)(2b-1) + (2a-1)(2b-1)$
d. $(a-1)(a+3) + (a+2)(a+3)$
e. $(a+1)^2 + (a+1)$

4.44

a. $2(a+3)^2 + 4(a+3)$
b. $(a+3)^2(b+1) - 2(a+3)(b+1)$
c. $(a-1)^2(a+2) - (a-1)(a+2)^2$
d. $3(a+2)^2(a-2) + 9(a+2)(a-2)^2$
e. $-2(a+4)^3 + 6(a+4)^2(a+2)$

Factoren buiten haakjes brengen

De distributieve wetten kun je ook andersom lezen:

$$\begin{aligned} ab + ac &= a(b+c) \\ ac + bc &= (a+b)c \end{aligned}$$

en ze op die manier gebruiken om een factor *buiten haakjes te brengen*. We geven weer een aantal voorbeelden. Eerst brengen we alleen maar gehele getallen buiten haakjes:

$$\begin{aligned} 3a + 12 &= 3(a+4) \\ 27a + 45b - 9 &= 9(3a + 5b - 1) \end{aligned}$$

Maar het kan ook met letters of combinaties van letters en getallen:

$$\begin{aligned} a^4 - a &= a(a^3 - 1) \\ 15a^2b + 5ab^3 &= 5ab(3a + b^2) \end{aligned}$$

Of zelfs met hele algebraïsche uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} (a+1)b - 3(a+1) &= (a+1)(b-3) \\ 7a^2(b^2-3) - 35(b^2-3) &= 7(a^2-5)(b^2-3) \end{aligned}$$

Werk de haakjes uit.

4.45

a. $(a+3)(a+1)$
b. $(2a+3)(a+3)$
c. $(a-6)(3a+1)$
d. $(4a-5)(5a+4)$
e. $(3a+9)(2a-5)$
f. $(6a-12)(4a+10)$

4.46

a. $(-3a+8)(8a-3)$
b. $(7a+12)(8a-11)$
c. $(17a+1)(a-17)$
d. $(-2a+6)(-3a-6)$
e. $(a+3)(b-5)$
f. $(2a+8)(3b+5)$

4.47

a. $(-4a+1)(b-1)$
b. $(3a-1)(-b+3)$
c. $(13a+12)(12b-13)$
d. $(a^2+4)(a-4)$
e. $(a-1)(a^2+7)$
f. $(a^2+3)(a^2+9)$

4.48

a. $(2a^2-7)(a+7)$
b. $(-3a^2+2)(-2a^2+3)$
c. $(a^2+2a)(2a^2-a)$
d. $(3a^2-4a)(-2a^2+5a)$
e. $(-6a^2+5)(a^2+a)$
f. $(9a^2+7a)(2a^2-7a)$

4.49

a. $(-8a^2-3a)(3a^2-8a)$
b. $(2a^3-a)(-5a^2+4)$
c. $(-a^3+a^2)(a^2+a)$
d. $(9a^4-5a^2)(6a^3+2a^2)$
e. $(7a^3-1)(8a^3-5a)$
f. $(-6a^5-5a^4)(-4a^3-3a^2)$

4.50

a. $(2ab+a)(3ab-b)$
b. $(3a^2b+ab)(2ab^2-3ab)$
c. $(-2a^2b^2+3a^2b)(2ab^2-2ab)$
d. $(8a^3b^2-6ab^3)(-4a^2b^3-2ab^2)$
e. $(-a^5b^3+a^3b^5)(a^3b^5-ab^7)$
f. $(2a+3)(a^2+2a-2)$

4.51

a. $(-3a+2)(4a^2-a+1)$
b. $(2a+b)(a+b+4)$
c. $(-3a+3b)(3a-3b-3)$
d. $(9a+2)(2a-9b+1)$
e. $(a^2+a)(a^2-a+1)$
f. $(2a^2+2a-1)(3a+2)$

4.52

a. $(-2a-1)(-a^2-3a-4)$
b. $(a-b-1)(a+b)$
c. $(a^2+ab+b^2)(a^2-b^2)$
d. $(a+1)(a+2)(a+3)$
e. $(a-1)(a+2)(a-3)$
f. $(2a+1)(a-1)(2a+3)$

4.53

a. $(2a+b)(a-b)(2a-b)$
b. $(5a-4b)(4a-3b)(3a-2b)$
c. $-3a(a^2+3)(a-2)$
d. $(-3a+1)(a+3)(-a+1)$
e. $2a^2(a^2-1)(a^2+2)$
f. $(a^2b-ab)(ab^2+ab)(a+b)$

4.54

a. $3a^2b(a^2-b^2)(2a+2b)$
b. $(a+1)(a^3+a^2-a+2)$
c. $(a^2+2a+1)(a^2-a+2)$
d. $(-2a^2+3a+1)(3a^2-2a-1)$
e. $3a(a^2+1)(a^2-2a+4)$
f. $(2a+b-5)(5a-2b+2)$

De bananenformule

Voor het product van twee sommen van twee termen geldt de formule

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

die, zoals de boogjes al aangeven, ontstaat door twee maal een distributieve wet toe te passen:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

De boogjes vormen een handig geheugensteuntje; vanwege de vorm van de boogjes wordt deze formule soms de *bananenformule* genoemd. Ook deze formule kan weer in allerlei gecompliceerdere situaties gebruikt worden. Voorbeeld:

$$(3a^2 + 7bc)(5ab - 2c) = 15a^3b - 6a^2c + 35ab^2c - 14bc^2$$

In sommige gevallen kunnen na uitwerken van de haakjes met behulp van de bananenformule nog termen worden samengenomen. Voorbeeld:

$$(5a+3b)(2a-7b) = 10a^2 - 35ab + 6ab - 21b^2 = 10a^2 - 29ab - 21b^2$$

Wanneer er meer dan twee termen tussen haakjes staan, gaat het uitwerken volgens hetzelfde principe als bij de bananenformule. Voorbeeld:

$$\begin{aligned}(3a+2b)(2c-d+8e) &= 3a(2c-d+8e) + 2b(2c-d+8e)\\ &= 6ac - 3ad + 24ae + 4bc - 2bd + 16be\end{aligned}$$

Producten met meer dan twee factoren werk je stap voor stap uit. Voorbeeld:

$$\begin{aligned}(3a+2b)(a-4b)(2a+c) &= (3a^2 - 12ab + 2ab - 8b^2)(2a+c)\\ &= (3a^2 - 10ab - 8b^2)(2a+c)\\ &= 6a^3 + 3a^2c - 20a^2b - 10abc - 16ab^2 - 8b^2c\end{aligned}$$

III Getallenrijen

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Als je de formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ wilt generaliseren tot formules voor $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, ..., ontdek je al snel regelmatige patronen. Je kunt ze rangschikken in de *driehoek van Pascal*. De getallen in die driehoek zijn de *binomiaalcoëfficiënten*. We zullen laten zien hoe je ze snel kunt berekenen. Het *binomium van Newton* geeft een algemene uitdrukking voor de formule voor $(a+b)^n$ in termen van de binomiaalcoëfficiënten. We introduceren daarbij de ook elders in de wiskunde veel gebruikte *sigma-notatie* voor sommen van getallenrijen. In een volgend hoofdstuk stappen we over op rekenkundige en meetkundige getallenrijen en hun somformules. Ten slotte leggen we uit wat we in het algemeen verstaan onder de *limiet* van een getallenrij.

7 Faculteiten en binomiaalcoëfficiënten

Werk met behulp van de formules op de volgende bladzijde de haakjes uit en vereenvoudig indien mogelijk:

7.1
- a. $(a+1)^3$
- b. $(a-1)^3$
- c. $(2a-1)^3$
- d. $(a+2)^3$
- e. $(2a-3)^3$

7.2
- a. $(1-a^2)^3$
- b. $(ab+1)^3$
- c. $(a+2b)^3$
- d. $(a^2-b^2)^3$
- e. $(2a-5b)^3$

7.3
- a. $(2a-1)^3+(a-2)^3$
- b. $(a-2b)^3$
- c. $(a+3b)^3$
- d. $(5a+2)^3$
- e. $(a-7)^3+(a+7)^3$

7.4
- a. $(a^2-b)^3$
- b. $(a^4+2b^2)^3$
- c. $(a+2b)^3+(a-2b)^3$
- d. $(a+2b)^3-(a-2b)^3$
- e. $(a+2b)^3-(2a+b)^3$

7.5
- a. $(a+1)^4$
- b. $(a-1)^4$
- c. $(2a-1)^4$
- d. $(a+2)^4$
- e. $(2a-3)^4$

7.6
- a. $(1-a^2)^4$
- b. $(ab+1)^4$
- c. $(a+2b)^4$
- d. $(a^2-b^2)^4$
- e. $(a-b)^4+(a+b)^4$

De formules voor $(a+b)^3$ en $(a+b)^4$

Het merkwaardige product $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vormt het uitgangspunt voor de afleiding van formules voor $(a+b)^n$ voor grotere waarden van n dan 2. We beginnen met het geval $n = 3$.

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)^3 & = & (a+b)(a+b)^2 \\
 & = & (a+b)(a^2+2ab+b^2) \quad \text{(merkwaardig product)} \\
 & = & a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2) \\
 & = & a^3 + 2a^2b + \ \ ab^2 \\
 & & \quad + \ \ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}$$

Je ziet hoe we gebruik hebben gemaakt van het merkwaardig product voor $(a+b)^2$ en vervolgens stap voor stap de haakjes hebben uitgewerkt. In de vierde en vijfde regel hebben we gelijksoortige termen onder elkaar gezet, waardoor we ze in de zesde regel gemakkelijk konden optellen. Het resultaat is de formule

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Gewapend met deze formule kunnen we nu op dezelfde manier het geval $n = 4$ aanpakken:

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)^4 & = & (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \quad \text{(formule voor } (a+b)^3\text{)} \\
 & = & a(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) + b(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\
 & = & a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + \ \ ab^3 \\
 & & \quad + \ \ a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
 & = & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{array}$$

met als resultaat de formule

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Opgaven over de driehoek van Pascal

7.7 Vul de driehoek van Pascal op de bladzijde hiertegenover aan met de rijen voor $n = 8$, $n = 9$ en $n = 10$.

7.8 Werk met behulp van de vorige opgave de haakjes uit in $(a+1)^8$, $(a-1)^9$ en $(a-b)^{10}$.

7.9 Als je in de driehoek van Pascal de getallen op de n-de rij bij elkaar optelt, krijg je als uitkomst 2^n. Controleer dit voor $n = 1$ tot en met $n = 10$, en geef vervolgens een verklaring door in de uitdrukking voor $(a+b)^n$ de getallen $a = 1$ en $b = 1$ te substitueren.

7.10 Als je in de driehoek van Pascal de getallen op de n-de rij, afwisselend voorzien van plus- en mintekens, bij elkaar optelt, krijg je als uitkomst 0. Controleer dit voor $n = 1$ tot en met $n = 10$, en geef vervolgens een verklaring door in de uitdrukking voor $(a+b)^n$ de getallen $a = 1$ en $b = -1$ te substitueren.

7.11 Vervang in de driehoek van Pascal elk even getal door een 0 en elk oneven getal door een 1. Teken de eerste 20 rijen van de 'binaire driehoek van Pascal' die je dan krijgt, en verklaar het patroon dat je ziet ontstaan. Een mooie variant krijg je als je alle nullen door open plaatsen vervangt en alle enen door sterretjes.

Binomiaalcoëfficiënten en de driehoek van Pascal

Tot nu toe hebben we de volgende formules afgeleid:

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 & = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{array}$$

We hebben de termen systematisch gerangschikt naar dalende machten van a en stijgende machten van b. Elke keer gaat de macht van a een stapje omlaag, en die van b een stapje omhoog. De gehele getallen die ervoor staan, heten *binomiaalcoëfficiënten*. Voor $n = 2$ zijn het de getallen 1, 2 en 1, voor $n = 3$ zijn het 1, 3, 3 en 1, en voor $n = 4$ zijn het 1, 4, 6, 4 en 1. Overigens, de coëfficiënten 1 zie je natuurlijk niet terug in de formules: we schrijven a^2 in plaats van $1a^2$ enzovoort. Maar je vindt ze wel terug in de *driehoek van Pascal*, waaruit je alle binomiaalcoëfficiënten kunt aflezen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \qquad \leftarrow n=0\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \qquad \leftarrow n=1\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \qquad \leftarrow n=2\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \qquad \leftarrow n=3\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \qquad \leftarrow n=4\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \qquad \leftarrow n=5\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \qquad \leftarrow n=6\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \qquad \leftarrow n=7\\
&&&&&&&&\dots&&&&&&&& \qquad \dots
\end{array}$$

De driehoek van Pascal

Hieruit zie je bijvoorbeeld dat

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Bovenin hebben we ook de gevallen $n = 0$ en $n = 1$ opgenomen, in overeenstemming met $(a+b)^0 = 1$ en $(a+b)^1 = a+b$. De driehoek van Pascal is geconstrueerd volgens de volgende regel:

> *Langs de linker- en de rechterrand staan enen en verder is elk getal de som van zijn linker- en rechterbovenbuur.*

Als je de afleidingen op bladzijde 53 voor $n = 3$ en $n = 4$ hebt gevolgd, zul je begrijpen waarom deze regel algemeen opgaat. Met deze regel kun je de driehoek van Pascal zo ver voortzetten als je wilt.

Bereken de volgende binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k}$ met behulp van de formule van de bladzijde hiertegenover. Pas daarbij telkens eerst de onder die formule beschreven vereenvoudiging toe en deel daarna ook nog alle overblijvende factoren uit de noemer tegen factoren in de teller weg alvorens de berekening daadwerkelijk uit te voeren. (Dat kan altijd, want er moet een geheel getal uitkomen!) Controleer voor $n \leq 10$ je uitkomsten met behulp van de driehoek van Pascal.

7.12
a. $\binom{4}{2}$
b. $\binom{5}{0}$
c. $\binom{4}{4}$
d. $\binom{5}{3}$
e. $\binom{6}{3}$

7.13
a. $\binom{7}{1}$
b. $\binom{6}{4}$
c. $\binom{7}{5}$
d. $\binom{7}{2}$
e. $\binom{7}{7}$

7.14
a. $\binom{8}{2}$
b. $\binom{9}{3}$
c. $\binom{9}{8}$
d. $\binom{8}{4}$
e. $\binom{8}{5}$

7.15
a. $\binom{8}{3}$
b. $\binom{9}{4}$
c. $\binom{9}{7}$
d. $\binom{7}{3}$
e. $\binom{9}{6}$

7.16
a. $\binom{12}{0}$
b. $\binom{15}{14}$
c. $\binom{13}{5}$
d. $\binom{21}{2}$
e. $\binom{18}{14}$

7.17
a. $\binom{12}{7}$
b. $\binom{11}{5}$
c. $\binom{48}{2}$
d. $\binom{49}{3}$
e. $\binom{50}{48}$

7.18
a. $\binom{17}{3}$
b. $\binom{51}{50}$
c. $\binom{12}{9}$

7.19
a. $\binom{42}{3}$
b. $\binom{13}{6}$
c. $\binom{27}{5}$

7.20
a. $\binom{78}{75}$
b. $\binom{14}{5}$
c. $\binom{28}{4}$

Het berekenen van binomiaalcoëfficiënten

Met behulp van de driehoek van Pascal kun je alle binomiaalcoëfficiënten berekenen. Voor grote waarden van n is dat echter nogal bewerkelijk. Omdat die binomiaalcoëfficiënten bij veel toepassingen een rol spelen (onder andere in de kansrekening), is het goed om ook een formule te hebben om ze direct te berekenen. Alvorens die te geven, maken we enige notatieafspraken.

Op de horizontale rij bij $n = 2$ van de driehoek van Pascal vind je drie coëfficiënten: 1, 2 en 1. In het algemeen vind je op de n-de rij $n + 1$ coëfficiënten. We nummeren ze van links naar rechts van 0 tot en met n. De k-de coëfficiënt op de n-de rij noteren we als $\binom{n}{k}$, uitgesproken als 'n boven k'. Voorbeelden:

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{6}{6} = 1 \quad \text{en} \quad \binom{7}{4} = 35$$

Een andere notatie die we vaak zullen gebruiken is die van $k!$, uitgesproken als '*k-faculteit*'. We definiëren:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ k! &= 1 \times \cdots \times k \quad \text{voor elk positief geheel getal } k \end{aligned}$$

Voorbeelden: $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ en $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$.

Met deze notatieafspraken geldt de volgende formule:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Let echter op: Bij het daadwerkelijk berekenen van binomiaalcoëfficiënten moet je *nooit* die drie faculteiten afzonderlijk berekenen. In de breuk in het rechterlid kun je altijd de grootste van de twee faculteiten uit de noemer wegdelen tegen het beginstuk van $n!$. Omdat k-faculteit zeer snel groeit met k is het zelfs bij berekeningen met een rekenmachine of computer lonend om deze vereenvoudiging toe te passen. Voorbeeld:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times 7}{(1 \times 2 \times 3) \times (1 \times 2 \times 3 \times 4)} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

Dit is heel makkelijk te onthouden: in teller en noemer staan evenveel factoren (drie in dit geval), in de noemer staat een faculteit (hier 3!) en in de teller staan net zo veel factoren, aftellend vanaf n, dus in dit geval $7 \times 6 \times 5$.
Leer de volgende bijzondere gevallen uit je hoofd:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Schrijf met behulp van het binomium van Newton in de sigma-notatie:

7.21

a. $(a+1)^7$
b. $(a-1)^{12}$
c. $(a+10)^{12}$
d. $(2a-1)^9$
e. $(2a+b)^{10}$

7.22

a. $(a+5)^7$
b. $(1-a)^5$
c. $(ab+1)^{18}$
d. $(a+2b)^9$
e. $(a-b)^8$

Bereken de volgende sommen met behulp van het binomium van Newton; kies daartoe telkens geschikte waarden voor a en b. Voorbeeld:

$$\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} = \binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\cdots+\binom{5}{5} = (1+1)^5 = 2^5 = 32$$

Hier hebben we het binomium $(a+b)^5$ genomen met $a=b=1$.

7.23

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}$
b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(-1)^k$
c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}2^k$

7.24

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(-2)^k$
b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$

De volgende opgaven zijn bedoeld als verdere oefening met de sigma-notatie. De opdracht luidt telkens: bereken de gegeven som.

7.25

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}k^2$
b. $\displaystyle\sum_{k=-4}^{4}k^3$
c. $\displaystyle\sum_{k=3}^{7}(2k+4)$

7.26

a. $\displaystyle\sum_{j=-1}^{4}(j^2-1)$
b. $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}(j+\frac{1}{j})$
c. $\displaystyle\sum_{j=2}^{5}j^4$

Het binomium van Newton en de sigma-notatie

Op de n-de rij van de driehoek van Pascal staan de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$, en dus geldt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Deze formule staat bekend als het *binomium van Newton*.

Letterlijk betekent binomium *tweeterm*. Dat slaat op de twee termen a en b tussen de haakjes van het linkerlid. De binomiaalcoëfficiënten kunnen berekend worden met behulp van de driehoek van Pascal of met de formule van bladzijde 57.

De $n+1$ termen in het rechterlid van de bovenstaande formule hebben allemaal dezelfde vorm, namelijk een product van een binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$, een macht van a en een macht van b. Zelfs de eerste term $\binom{n}{0}a^n$ en de laatste term $\binom{n}{n}b^n$ zijn van die vorm, want daar zijn de 'ontbrekende' machten van respectievelijk b en a te schrijven als b^0 en a^0.

Alle termen zijn dus van de vorm $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, waarbij k loopt van 0 tot en met n. In zo'n situatie, waarbij een aantal gelijksoortige termen bij elkaar opgeteld moeten worden, en waarbij alleen een 'index' k van term tot term verandert, wordt vaak een notatie met behulp van de Griekse hoofdletter Σ (sigma) gebruikt. In deze notatie wordt de formule voor het binomium van Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

waarbij dus rechts van de sigma de algemene uitdrukking met een letter k (de zogenaamde *sommatie-index*) erin staat, en onder en boven de sigma de begin- en eindwaarde van de sommatie-index k. In plaats van de letter k kan natuurlijk ook elke andere letter als sommatie-index gebruikt worden.

We geven nog twee voorbeelden van de sigma-notatie voor een som:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} k^2 &= 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\\ \sum_{j=-2}^{2} 3^j &= 3^{-2}+3^{-1}+3^0+3^1+3^2\end{aligned}$$

IV Vergelijkingen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In veel toepassingen van de wiskunde moeten vergelijkingen of ongelijkheden worden opgelost. Je moet dan alle getallen bepalen die aan een of meer gegeven vergelijkingen of ongelijkheden voldoen. In dit deel leren we de meest elementaire oplossingstechnieken. In het bijzonder geven we methodes om eerstegraadsvergelijkingen en tweedegraadsvergelijkingen op te lossen. De beroemde *abc*-formule is daarvan een belangrijk voorbeeld. In het laatste hoofdstuk behandelen we een oplossingsmethode voor eenvoudige stelsels eerstegraadsvergelijkingen.

9 Eerstegraadsvergelijkingen

Bepaal de oplossing x van elk van de volgende vergelijkingen.

9.1
- a. $x+7=10$
- b. $x-12=4$
- c. $x+3=-10$
- d. $x-10=-7$
- e. $x+8=0$

9.2
- a. $-x+15=6$
- b. $-x-7=10$
- c. $-x+17=-10$
- d. $-x-8=-9$
- e. $-x-19=0$

9.3
- a. $2x+7=9$
- b. $3x-8=7$
- c. $4x+3=11$
- d. $9x-10=17$
- e. $6x+6=0$

9.4
- a. $-3x+15=21$
- b. $-2x-7=11$
- c. $-5x+17=32$
- d. $-4x-8=16$
- e. $-6x-18=0$

9.5
- a. $2x+9=12$
- b. $3x-12=9$
- c. $-4x+3=-11$
- d. $5x-12=17$
- e. $-6x+9=0$

9.6
- a. $-x-15=6$
- b. $-9x-7=-10$
- c. $6x+17=12$
- d. $-9x-18=-6$
- e. $5x-19=0$

9.7
- a. $x+7=10-2x$
- b. $x-12=4+5x$
- c. $2x+3=-10+x$
- d. $3x-10=2x-7$
- e. $5x+9=2x$

9.8
- a. $-x+15=6-4x$
- b. $-2x-7=2x-10$
- c. $3x+17=-11+x$
- d. $-x-8=-9x-4$
- e. $2x-19=19-2x$

9.9
- a. $x-12=3-4x$
- b. $-3x+5=2x-8$
- c. $-x+7=-12-x$
- d. $4x-1=-7x+4$
- e. $2x+12=9+4x$

Werk bij de volgende opgaven eerst de breuken weg door het linker- en rechterlid te vermenigvuldigen met een geschikt getal (eigenschap V2).

9.10
- a. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=1+\frac{5}{2}x$
- b. $-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}x-1$
- c. $\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}-\frac{1}{5}x$
- d. $-\frac{3}{7}x-\frac{3}{7}=-\frac{6}{7}-\frac{1}{7}x$
- e. $\frac{2}{9}x-\frac{1}{9}=x-\frac{2}{9}$

9.11
- a. $\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}=1+\frac{1}{6}x$
- b. $-\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}=\frac{4}{3}x-1$
- c. $\frac{2}{5}x+\frac{5}{3}=-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}x$
- d. $-\frac{2}{9}x-\frac{1}{4}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}x$
- e. $\frac{1}{8}x-\frac{5}{6}=x-\frac{3}{4}$

9.12
- a. $3(x+4)=-2(x+8)$
- b. $-2(x-3)+1=-3(-x+7)+2$
- c. $2-(x+4)=-2(x+1)-3$

9.13
- a. $6(-x+2)-(x-3)=3(-x+1)$
- b. $2x-(-x+1)=-3(-x+1)$
- c. $5(-2x+3)+(2x-5)=4(x-4)$

Algemene oplossingsregels

Stel dat van een getal x gegeven is dat het voldoet aan de volgende vergelijking:

$$3x + 7 = -2x + 1$$

en dat gevraagd wordt x te bepalen.

Oplossing:

1. tel bij het linker- en rechterlid $2x$ op: $\quad 5x + 7 = 1$,
2. tel bij het linker- en rechterlid -7 op: $\quad 5x = -6$,
3. deel het linker- en rechterlid door 5: $\quad x = -\dfrac{6}{5}$.

Hiermee is in drie stappen het onbekende getal x gevonden. Ter controle kun je de gevonden waarde $x = -\frac{6}{5}$ in de oorspronkelijke vergelijking substitueren en constateren dat het klopt.

We hebben gebruikgemaakt van de volgende algemene regels:

> V1. *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je bij het linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.*
>
> V2. *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je het linker- en rechterlid met hetzelfde getal vermenigvuldigt of door hetzelfde getal deelt, mits dat getal niet 0 is.*

De beide eerste stappen van de oplossing in het gegeven voorbeeld kun je ook zien als

> *het verplaatsen van een term van de ene kant van het gelijkteken naar de andere kant waarbij die term van teken wisselt (van plus naar min of omgekeerd).*

Dat is de manier waarop regel V1 meestal wordt gebruikt. In stap 1 hebben we de term $-2x$ van het rechterlid naar het linkerlid overgebracht, en in stap 2 de term $+7$ van het linkerlid naar het rechterlid.

Schrijf de volgende ongelijkheden in een van de volgende gedaanten:
$x < a,\ x \leq a,\ x > a$ of $x \geq a$.

Voorbeeld: $-3x + 7 > 5$. Aftrekken van 7 geeft $-3x > -2$ en delen door -3 geeft vervolgens $x < \frac{2}{3}$.

9.14

a. $x + 6 < 8$

b. $x - 8 > 6$

c. $x + 9 \leq 7$

d. $x - 1 \geq -3$

e. $x + 6 > 7$

9.15

a. $-2x + 4 < 8$

b. $-3x - 8 > 7$

c. $-5x + 9 \leq -6$

d. $-4x + 1 \geq -3$

e. $-2x + 6 > 5$

9.16

a. $2x + 6 < x - 8$

b. $3x - 8 > 7 - 2x$

c. $x + 9 \leq 7 - 3x$

d. $2x - 1 \geq x - 3$

e. $5x + 6 > 3x + 7$

9.17

a. $-2x + 6 < x + 9$

b. $x - 8 > 3x + 6$

c. $2x + 9 \leq 3x + 1$

d. $-3x - 1 \geq 3 - x$

e. $5x + 6 > 7x + 2$

9.18

a. $\frac{1}{2}x + 1 < 2 - \frac{1}{3}x$

b. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{3}x$

c. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

d. $\frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$

e. $\frac{2}{5}x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}$

9.19

a. $-\frac{3}{2}x - 1 < 2 - \frac{1}{4}x$

b. $\frac{1}{5}x - \frac{1}{2} > 1 + \frac{2}{5}x$

c. $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}$

d. $\frac{2}{7}x - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}x - \frac{3}{7}$

e. $-\frac{3}{5}x - \frac{5}{2} > -\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}$

Schrijf de volgende ongelijkheden in een van de volgende gedaanten:
$a < x < b,\ a \leq x < b,\ a < x \leq b$ of $a \leq x \leq b$.

Voorbeeld: $-2 \leq 3 - 6x < 4$. Aftrekken van 3 geeft $-5 \leq -6x < 1$ en delen door -6 geeft vervolgens $\frac{5}{6} \geq x > -\frac{1}{6}$ dus $-\frac{1}{6} < x \leq \frac{5}{6}$.

9.20

a. $-3 < x + 1 < 4$

b. $2 < 2x + 4 < 6$

c. $0 \leq 3x + 6 < 9$

d. $-6 < 4x - 2 \leq 4$

e. $1 \leq 1 + 2x \leq 2$

9.21

a. $-3 < -x + 1 < 2$

b. $2 < 2x - 4 < 4$

c. $0 \leq -3x + 9 < 6$

d. $-6 < -4x + 2 \leq 4$

e. $-1 \leq 1 - 2x \leq 0$

Ongelijkheden

Het manipuleren van ongelijkheden vergt iets meer zorg dan het manipuleren van vergelijkingen. Toch zijn er ook overeenkomsten. Ongelijkheden komen voor in vier gedaanten:

$$a < b, \qquad a \leq b, \qquad a > b, \qquad a \geq b.$$

Ze betekenen respectievelijk 'a is kleiner dan b','a is kleiner dan of gelijk aan b', 'a is groter dan b' en 'a is groter dan of gelijk aan b'. Uiteraard betekent $a > b$ dus hetzelfde als $b < a$, en $a \geq b$ hetzelfde als $b \leq a$. Verder geldt de volgende regel:

O1. *De geldigheid van een ongelijkheid verandert niet als je bij het linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.*

Deze regel heeft net als bij vergelijkingen tot gevolg dat je een term van het ene lid naar het andere lid mag overbrengen mits je daarbij het teken van die term omdraait (van plus naar min of omgekeerd).

Bij het vermenigvuldigen van het linker- en rechterlid met hetzelfde getal (ongelijk aan nul) moet je oppassen:

O2. *De geldigheid van een ongelijkheid verandert niet als je het linker- en rechterlid met hetzelfde positieve getal vermenigvuldigt of door hetzelfde positieve getal deelt.*

O3. *Als je het linker- en rechterlid van een ongelijkheid met hetzelfde negatieve getal vermenigvuldigt of door hetzelfde negatieve getal deelt, moet je het ongelijkheidsteken omklappen.*

Soms worden gelijksoortige ongelijkheden aan elkaar gekoppeld. Zo betekent $a < b \leq c$ dat b groter dan a en kleiner dan of gelijk aan c is. Men combineert echter *nooit* ongelijksoortige ongelijkheden: combinaties van 'groter' en 'kleiner' in één keten komen nooit voor. Je kunt dus wel schrijven $a > b > c$ maar niet $a < b > c$, ook al zouden wel de afzonderlijke ongelijkheden $a < b$ en $b > c$ geldig zijn. De reden is dat je in dat geval wel weet dat a en c allebei kleiner dan b zijn, maar dat je hieruit over de onderlinge relatie van a en c niets kunt concluderen.

Bepaal alle oplossingen x van de volgende vergelijkingen.

9.22

a. $\frac{1}{x+1} = 5$

b. $\frac{x}{x-4} = 2$

c. $\frac{2x+1}{x} = -3$

d. $\frac{4x-1}{x-3} = -2$

e. $\frac{x+7}{-3x+8} = 1$

9.23

a. $\frac{2x}{3x-4} = -1$

b. $\frac{8x}{4x-4} = 2$

c. $\frac{4-4x}{x-1} = -3$

d. $\frac{2x+3}{4x} = 6$

e. $\frac{x-5}{x-4} = 1$

9.24

a. $(x+1)^2 = 1$

b. $(x-4)^2 = 9$

c. $(1-x)^2 = 25$

d. $(2x+1)^2 = 4$

e. $(-3x+1)^2 = 16$

9.25

a. $(x+2)^2 = 3$

b. $(x-1)^2 = 2$

c. $(3-x)^2 = 5$

d. $(2x+1)^2 = 6$

e. $(6-2x)^2 = 8$

9.26

a. $(x-1)^3 = 1$

b. $(x+4)^3 = -8$

c. $(1-x)^3 = 1$

d. $(2x-1)^3 = 27$

e. $(-4x-1)^3 = 64$

9.27

a. $(x-2)^4 = 1$

b. $(x+1)^4 = 16$

c. $(3-2x)^4 = 4$

d. $(2x+3)^4 = 81$

e. $(4-3x)^4 = 625$

9.28

a. $(x+1)^2 = (2x-1)^2$

b. $(3x-1)^2 = (x-1)^2$

c. $(x+1)^2 = (-2x+1)^2$

d. $(2x+5)^2 = (3-x)^2$

e. $(4x+3)^2 = x^2$

9.29

a. $(x+2)^2 = 4x^2$

b. $(2x+1)^2 = 4(x+1)^2$

c. $(-x+2)^2 = 9(x+2)^2$

d. $4(x+1)^2 = 25(x-1)^2$

e. $9(2x+1)^2 = 4(1-2x)^2$

Een vergelijking reduceren tot een eerstegraadsvergelijking

Een vergelijking van de vorm

$$ax + b = 0$$

waarin x een onbekend getal is en a en b gegeven (bekende) getallen zijn met $a \neq 0$, heet een *eerstegraadsvergelijking* in x. De vergelijkingen van bladzijde 72 kunnen allemaal in deze vorm worden geschreven. Zo'n vergelijking kunnen we met behulp van de regels V1 en V2 van bladzijde 73 oplossen. De oplossing is dan

$$x = -\frac{b}{a}$$

In bepaalde gevallen kun je gecompliceerdere vergelijkingen tot eerstegraadsvergelijkingen terugbrengen.

Voorbeeld 1:

$$\frac{3x + 2}{4x - 5} = 2$$

Door het linker- en rechterlid met $4x - 5$ te vermenigvuldigen, ontstaat de vergelijking

$$3x + 2 = 2(4x - 5)$$

die met de methode van bladzijde 73 kan worden opgelost. Het resultaat is $x = \frac{12}{5}$, zoals je zelf kunt nagaan.

We maakten bij de eerste stap dus gebruik van regel V2. Dit is slechts toegestaan als het getal $4x - 5$ waarmee we het linker- en rechterlid vermenigvuldigd hebben, ongelijk aan 0 is. Omdat we x in dit stadium van de oplossingsmethode nog niet kenden, wisten we toen ook nog niet of $4x - 5 \neq 0$ is. Dat konden we pas controleren toen we de nieuwe vergelijking naar x hadden opgelost. Zo'n *controle achteraf* is niet overbodig, zoals je kunt zien in sommige van de opgaven op de tegenoverliggende bladzijde.

Voorbeeld 2:

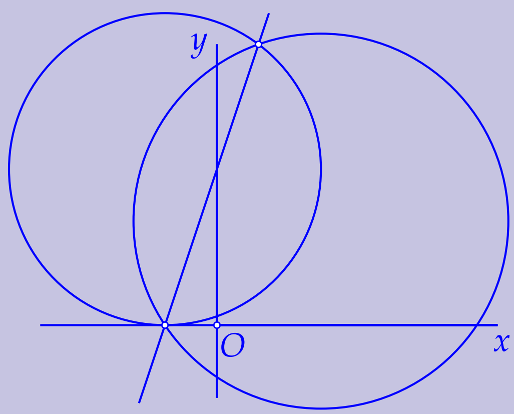
$$(3x - 1)^2 = 4$$

Als x voldoet, moet het kwadraat van $3x - 1$ gelijk zijn aan 4. Dat wil zeggen dat $3x - 1$ gelijk is aan $+2$ of -2. Er zijn dus twee mogelijkheden:

$$3x - 1 = 2 \quad \text{en} \quad 3x - 1 = -2$$

met als oplossingen $x = 1$ en $x = -\frac{1}{3}$ (ga dit zelf na).

V Meetkunde



De oude Grieken legden meer dan tweeduizend jaar geleden met hun axiomatische methode de basis voor de ontwikkeling van de klassieke meetkunde. In de zeventiende eeuw kwamen Fermat en Descartes echter met een nieuw concept: meetkunde met behulp van coördinaten. Dat is inmiddels de grondslag geworden van vrijwel alle toepassingen van de meetkunde. In dit deel behandelen we de belangrijkste eigenschappen van lijnen en cirkels in het vlak met behulp van coordinaten. In het laatste hoofdstuk zien we hoe dezelfde methoden ook toepasbaar zijn op vlakken en bollen in de ruimte.

12 Lijnen in het vlak

In de volgende opgaven wordt aangenomen dat in het vlak een rechthoekig coördinatenstelsel Oxy gekozen is. Je kunt het met ruitjespapier mooi in beeld brengen.

Teken de volgende lijnen op ruitjespapier. Bepaal ook telkens de snijpunten van zo'n lijn met de x-as en de y-as (indien aanwezig).

12.1
- a. $x + y = 1$
- b. $x - y = 0$
- c. $2x + y = 2$
- d. $-x + 2y = -2$
- e. $x + 3y = 4$

12.2
- a. $x - 4y = -3$
- b. $2x + 8y = -10$
- c. $-3x + y = 0$
- d. $7x - 2y = -14$
- e. $-5x - 2y = 4$

12.3
- a. $x = 0$
- b. $x = -3$
- c. $x = 2y$
- d. $y = -1$
- e. $3x = 2y + 1$

Teken de volgende halfvlakken.

12.4
- a. $x < 0$
- b. $x > -3$
- c. $x > y$
- d. $y < -2$
- e. $3x < y$

12.5
- a. $x + y < 2$
- b. $2x - y > 0$
- c. $2x + y < 2$
- d. $-2x + 3y < -2$
- e. $3x + 3y > 4$

12.6
- a. $5x - 4y > 3$
- b. $-2x + 7y < -9$
- c. $-3x > y + 2$
- d. $7x + 2 < y$
- e. $-5 < x + 2y$

12.7 Teken de volgende lijnen in één figuur.

- a. $x + y = -1,\ x + y = 0,\ x + y = 1$ en $x + y = 2$
- b. $x - y = -1,\ x - y = 0,\ x - y = 1$ en $x - y = 2$
- c. $x + 2y = -1,\ x + 2y = 0,\ x + 2y = 1$ en $x + 2y = 2$
- d. $2x + 2y = -1,\ 2x + 2y = 0,\ 2x + 2y = 1$ en $2x + 2y = 2$
- e. $x = -2y,\ x = -y,\ x = 0,\ x = y$ en $x = 2y$

De vergelijking van een lijn in het vlak

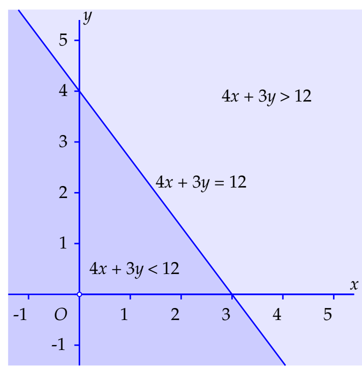
De vergelijking

$$4x + 3y = 12$$

bevat twee onbekenden x en y. Een oplossing van deze vergelijking is dus een *paar* (x, y) dat aan de vergelijking voldoet. Zo is bijvoorbeeld $(1, \frac{8}{3})$ een oplossing, want als je $x = 1$, $y = \frac{8}{3}$ invult, is aan de vergelijking voldaan. Maar er zijn nog meer oplossingen, bijvoorbeeld $(3, 0)$, $(0, 4)$ of $(-1, \frac{16}{3})$.

In feite kun je één van de beide onbekenden x en y vrij kiezen, waarna de ander uit de vergelijking kan worden opgelost. Wanneer je in het vlak een rechthoekig coördinatenstelsel Oxy gekozen hebt, zijn de oplossingen van de vergelijking de punten van een rechte lijn, in dit geval de lijn door $(0, 4)$ en $(3, 0)$. De punten (x, y) van die lijn zijn precies de punten waarvan de coordinaten voldoen aan de vergelijking $4x + 3y = 12$.

De lijn met vergelijking $4x + 3y = 12$ verdeelt het vlak in twee halfvlakken. Voor de punten die in het ene halfvlak liggen, geldt $4x + 3y > 12$, voor die in het andere halfvlak geldt $4x + 3y < 12$. Voor welk halfvlak welke ongelijkheid geldt, bepaal je door een punt in te vullen: de oorsprong O voldoet aan $4 \times 0 + 3 \times 0 < 12$, dus het halfvlak waar de oorsprong in zit, wordt gegeven door $4x + 3y < 12$.



In het algemeen stelt elke vergelijking van de vorm

$$ax + by = c$$

een rechte lijn voor. De enige voorwaarde is dat a en b niet allebei nul mogen zijn. Zo'n vergelijking is niet uniek bepaald: vermenigvuldig je het linker- en het rechterlid met hetzelfde getal (dat niet nul is), dan krijg je een andere vergelijking voor dezelfde lijn. Zo stelt $8x + 6y = 24$ dezelfde lijn voor als $4x + 3y = 12$.

De snijpunten van een lijn met vergelijking $ax + by = c$ met de y-as vind je door $x = 0$ te stellen. Dat levert $y = \frac{c}{b}$, dus het snijpunt is $(0, \frac{c}{b})$. Het snijpunt met de x-as vind je door $y = 0$ te stellen. Dat levert het snijpunt $(\frac{c}{a}, 0)$. De lijn is horizontaal als $a = 0$ en verticaal als $b = 0$.

Een lijn ligt vast als je twee punten ervan kent. In de volgende paragraaf geven we je een eenvoudige methode om de vergelijking van een lijn te bepalen door twee gegeven punten.

Bepaal in de volgende gevallen een vergelijking van de lijn door de twee gegeven punten. Maak er ook een tekening bij.

12.8
a. $(3,0)$ en $(0,3)$
b. $(3,0)$ en $(2,0)$
c. $(-1,0)$ en $(0,5)$
d. $(-2,0)$ en $(0,5)$
e. $(-2,-1)$ en $(-2,-2)$

12.9
a. $(3,0)$ en $(0,-2)$
b. $(3,1)$ en $(3,-1)$
c. $(2,0)$ en $(0,5)$
d. $(-2,2)$ en $(2,-2)$
e. $(1,-1)$ en $(2,0)$

12.10
a. $(2,1)$ en $(1,2)$
b. $(2,2)$ en $(-2,0)$
c. $(-1,1)$ en $(1,5)$
d. $(-3,-1)$ en $(-1,5)$
e. $(4,-1)$ en $(-1,-2)$

12.11
a. $(1,-2)$ en $(3,5)$
b. $(7,1)$ en $(5,-1)$
c. $(-1,1)$ en $(4,5)$
d. $(3,-2)$ en $(2,-6)$
e. $(4,-1)$ en $(-1,-3)$

12.12
a. $(4,-1)$ en $(0,0)$
b. $(0,0)$ en $(2,3)$
c. $(-1,0)$ en $(1,-5)$
d. $(-3,4)$ en $(4,-3)$
e. $(-2,0)$ en $(-1,-2)$

12.13
a. $(10,0)$ en $(0,10)$
b. $(3,-1)$ en $(-3,-1)$
c. $(5,-2)$ en $(1,3)$
d. $(-2,-8)$ en $(8,-2)$
e. $(1,-1)$ en $(2,7)$

De vergelijking $(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$ is de vergelijking van de lijn door (a_1, a_2) en (b_1, b_2). Elk punt (x, y) dat aan die vergelijking voldoet, ligt op die lijn, en omgekeerd voldoet elk punt op die lijn ook aan die vergelijking. Een punt (c_1, c_2) ligt dus op de lijn door (a_1, a_2) en (b_1, b_2) als

$$(a_1 - b_1)(c_2 - b_2) = (a_2 - b_2)(c_1 - b_1)$$

Gebruik dit om te onderzoeken of de volgende drietallen punten op één lijn liggen. Maak er telkens ook ter controle een tekening bij.

12.14
a. $(2,1)$, $(3,0)$ en $(1,2)$
b. $(2,2)$, $(0,1)$ en $(-2,0)$
c. $(-1,1)$, $(3,9)$ en $(1,5)$
d. $(-3,-1)$, $(0,2)$ en $(-1,1)$
e. $(4,-1)$, $(1,1)$ en $(-1,2)$

12.15
a. $(1,-2)$, $(0,-5)$ en $(3,4)$
b. $(7,1)$, $(1,-5)$ en $(5,-1)$
c. $(-1,1)$, $(1,3)$ en $(4,5)$
d. $(3,2)$, $(-1,-10)$ en $(2,-1)$
e. $(4,1)$, $(0,-2)$ en $(-1,-3)$

De vergelijking van de lijn door twee punten

Omdat de vergelijking

$$ax + by = c$$

bij gegeven a, b en c een *rechte lijn* in het Oxy-vlak voorstelt (mits a en b niet beide nul zijn), noemt men zo'n vergelijking een *lineaire vergelijking* in x en y. Omgekeerd hoort bij elke rechte lijn ook een lineaire vergelijking in x en y waarin de coëfficiënten van x en y niet allebei nul zijn.

Voor een vergelijking door twee verschillende punten bestaat een overzichtelijke formule:

Een vergelijking van de lijn door de punten (a_1, a_2) en (b_1, b_2) is
$$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$$

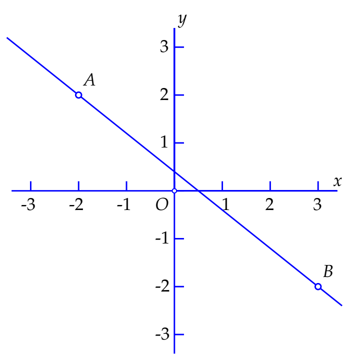
Voorbeeld: een vergelijking van de lijn door $A = (-2, 2)$ en $B = (3, -2)$ is

$$(-2 - 3)(y + 2) = (2 - (-2))(x - 3)$$

oftewel, na haakjes uitwerken en sorteren:

$$4x + 5y = 2$$

En inderdaad, als je $(-2, 2)$ of $(3, -2)$ in deze vergelijking invult klopt het, en aangezien een rechte lijn door twee punten bepaald is, moet dit dus wel de gezochte vergelijking zijn.



Om de algemene formule te verifiëren, is het ook voldoende om te controleren dat (a_1, a_2) en (b_1, b_2) beide voldoen aan de vergelijking

$$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1)$$

Invullen van $x = a_1$ en $y = a_2$ geeft $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) = (a_2 - b_2)(a_1 - b_1)$ en dat klopt, en invullen van $x = b_1$ en $y = b_2$ maakt het linker- en het rechterlid beide nul, dus dan klopt de vergelijking ook.

Het mooie van de bovenstaande formule is, dat hij *altijd* opgaat, zelfs als de lijn verticaal is. Neem bijvoorbeeld de punten $(3, 5)$ en $(3, 7)$, dan geeft de formule

$$(3 - 3)(y - 7) = (5 - 7)(x - 3)$$

oftewel, na haakjes wegwerken en vereenvoudigen, de verticale lijn $x = 3$ zoals we ook al direct hadden kunnen zien.

Bepaal in de volgende gevallen het snijpunt van de twee gegeven lijnen, voor zover ze niet evenwijdig zijn of samenvallen.

12.16

a. $x + y = 2$
$x - y = 1$

b. $x + y = 3$
$2x + y = 6$

c. $-5x + 2y = 4$
$x - 3y = 0$

d. $x + y = 3$
$-x - y = 7$

e. $8x + 3y = 7$
$7y = -4$

12.17

a. $x + 2y = -8$
$3x - 8y = 5$

b. $-2x + 7y = 3$
$-5x - 2y = 6$

c. $5x = 14$
$3x - 2y = 7$

d. $4x = -17$
$9y = 11$

e. $8x - 5y = 1$
$-2x - 11y = 0$

12.18

a. $x + y = 3$
$x - y = 5$

b. $2x + y = 3$
$-x - 2y = 6$

c. $-3x + 2y = 4$
$x - 2y = 2$

d. $4x - 7y = -2$
$5x + 4y = 11$

e. $x + 3y = 6$
$3x + 9y = -2$

12.19

a. $-x + 2y = 9$
$13x - 8y = 15$

b. $12x - 7y = 13$
$-5x - y = 8$

c. $5x + 8y = 14$
$9x - 12y = 5$

d. $4x - 6y = -12$
$-6x + 9y = 18$

e. $-8x + 3y = 5$
$3x - 7y = -12$

12.20 Bepaal een vergelijking van

a. de lijn door $(0, 0)$ die evenwijdig is aan $x + y = 4$
b. de lijn door $(1, 0)$ die evenwijdig is aan $2x - y = -2$
c. de lijn door $(0, 3)$ die evenwijdig is aan $-x + 4y = 5$
d. de lijn door $(1, -1)$ die evenwijdig is aan $-5x + 2y = -7$
e. de lijn door $(-2, 5)$ die evenwijdig is aan $8x + 7y = 14$

Het snijpunt van twee lijnen

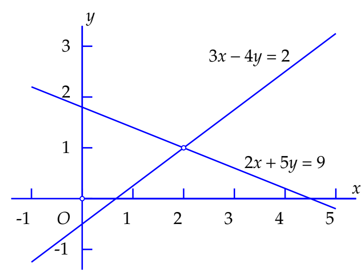
Twee verschillende lijnen in het vlak snijden elkaar in één punt of ze zijn evenwijdig. Als ze elkaar snijden, hoe bepaal je dan het snijpunt? We geven een voorbeeld. Stel dat de lijnen gegeven worden door de vergelijkingen

$$2x + 5y = 9 \qquad \text{en} \qquad 3x - 4y = 2$$

Hun snijpunt (x, y) voldoet dan aan beide vergelijkingen, met andere woorden, het is een oplossing van het *stelsel vergelijkingen*

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$

In hoofdstuk 11 hebben we laten zien hoe je zo'n stelsel oplost. Het snijpunt blijkt het punt $(x, y) = (2, 1)$ te zijn.



Niet altijd hebben twee lijnen precies één snijpunt. Ze kunnen evenwijdig zijn, dan is er geen snijpunt, en ze kunnen ook samenvallen, dan zou je kunnen zeggen dat er oneindig veel snijpunten zijn. Hoe zie je dat aan de vergelijkingen?

Bij samenvallende lijnen zijn de twee vergelijkingen gelijk of een veelvoud van elkaar; dat zie je onmiddellijk. Bij evenwijdige lijnen zijn, in de standaardvorm $ax + by = c$, alleen de linkerleden gelijk of een veelvoud van elkaar. Neem bijvoorbeeld de lijnen $-6x + 8y = 1$ en $3x - 4y = 2$. In het stelsel

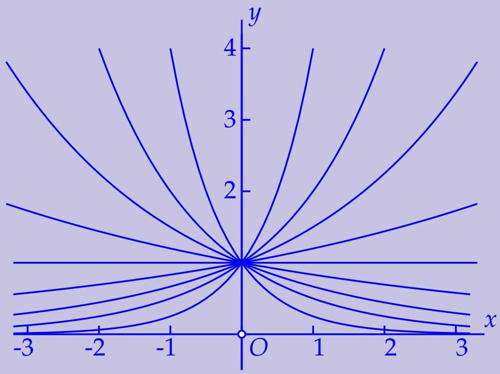
$$\begin{cases} -6x + 8y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$

krijg je, als je de tweede vergelijking met een factor -2 vermenigvuldigt

$$\begin{cases} -6x + 8y = 1 \\ -6x + 8y = -4 \end{cases}$$

Dat is een *strijdig stelsel*, dat wil zeggen dat er geen oplossingen (x, y) zijn. De uitdrukking $-6x + 8y$ kan immers niet tegelijkertijd 1 en -4 zijn. En lijnen die geen snijpunt hebben, zijn evenwijdig.

VI Functies



Een functie is een voorschrift om volgens een vaste, welbepaalde regel uit een gegeven getal een ander getal, de *functiewaarde*, te maken. Zo produceert de wortelfunctie bij een gegeven getal x als functiewaarde de wortel $\sqrt{x}$ uit dat getal. Vergelijk het met de worteltoets van een rekenmachine, die bij elk 'invoergetal' x dat je intoetst, in het venster het 'uitvoergetal' $\sqrt{x}$ (afgerond op een vast aantal decimalen) laat zien.

In dit deel behandelen we allerlei veel gebruikte functies en hun grafieken. In het laatste hoofdstuk beschrijven we geparametriseerde krommen in het vlak en in de ruimte.

16 Functies en grafieken

Bereken van de volgende lijnen in het vlak de richtingscoëfficiënt:

16.1

a. $3x + 5y = 4$

b. $2x = y + 7$

c. $-4x + 2y = 3$

d. $5y = 7$

e. $-x - 5y = 1$

16.2

a. $2x - 7y = -2$

b. $x = 3y - 2$

c. $-5x + 2y = -3$

d. $2x - 11y = 0$

e. $x = 2y$

Bereken met je rekenmachine van de volgende lijnen in het vlak de hellingshoek in graden nauwkeurig:

16.3

a. $x - 3y = 2$

b. $-3x = -y + 7$

c. $4x + 3y = 1$

d. $y = 7x$

e. $x - 4y = 2$

16.4

a. $5x - 2y = 12$

b. $4x = y + 8$

c. $x - y = 3$

d. $12x + 11y = 12$

e. $3x = -y$

Bereken met je rekenmachine van de volgende lijnen in het vlak de hellingshoek in radialen in twee decimalen nauwkeurig:

16.5

a. $x - 3y = 2$

b. $-3x = -y + 7$

c. $4x + 3y = 1$

d. $y = 7x$

e. $x - 4y = 2$

16.6

a. $5x - 2y = 12$

b. $4x = y + 8$

c. $x - y = 3$

d. $12x + 11y = 12$

e. $3x = -y$

Bepaal in de volgende opgaven de lineaire functie waarvan de grafiek de rechte lijn is door P met richtingscoëfficiënt m.

16.7

a. $P = (0, 0)$, $m = 3$

b. $P = (1, -1)$, $m = -2$

c. $P = (1, 2)$, $m = 0.13$

d. $P = (-1, 1)$, $m = -1$

e. $P = (2, -3)$, $m = 4$

16.8

a. $P = (4, 0)$, $m = -4$

b. $P = (3, -4)$, $m = 2.22$

c. $P = (-1, -3)$, $m = 0$

d. $P = (1, -1)$, $m = -1.5$

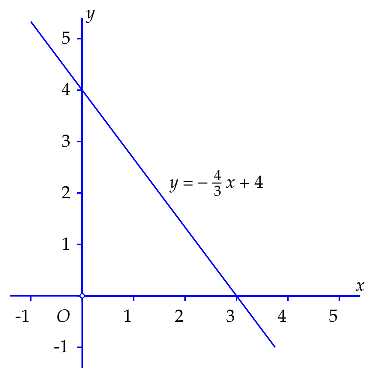
e. $P = (-1, -2)$, $m = 0.4$

Eerstegraadsfuncties

De lineaire vergelijking $4x + 3y = 12$ kun je ook schrijven als

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

waarmee y als een functie van x gegeven is: bij iedere x levert het rechterlid $-\frac{4}{3}x + 4$ de bijbehorende waarde van y. De rechte lijn in het Oxy-vlak die door de vergelijking wordt voorgesteld, is de grafiek van die functie.



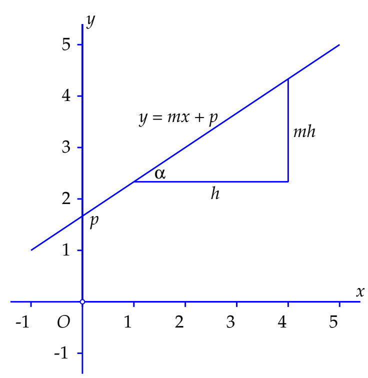
In het algemeen kun je elke lineaire vergelijking $ax + by = c$ waarvoor geldt dat $b \neq 0$ is, schrijven in de vorm

$$y = mx + p$$

(neem $m = -a/b$ en $p = c/b$). De voorwaarde $b \neq 0$ betekent dat de bijbehorende lijn in het Oxy-vlak niet verticaal is.

De functie $f(x) = mx + p$ heet een *eerstegraadsfunctie* van x. Omdat de grafiek ervan een rechte lijn is, spreekt men ook wel over een *lineaire* functie. De uitdrukking $mx + p$ is het functievoorschrift.

De coëfficiënt m van x heet de *richtingscoëfficiënt*. Bij een toename van h lengte-eenheden in de x-richting langs de grafiek hoort een toename van mh lengte-eenheden in de y-richting. Een positieve m hoort bij een stijgende grafiek, een negatieve m bij een dalende grafiek.
Als de schaaleenheden op de beide assen gelijk zijn gekozen, is m ook de *tangens* van de hoek α die de grafiek maakt met de richting van de x-as. Die hoek α heet de *hellingshoek*.



Bij hoekmeting in graden neemt men α tussen $-90°$ en $90°$, bij hoekmeting in radialen neemt men α tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$. Je kunt verder nog opmerken dat de grafiek van de functie $y = mx + p$ de y-as snijdt in het punt $(0, p)$ want bij $x = 0$ hoort $y = p$.

Bepaal de coördinaten (x_t, y_t) van de top van de volgende parabolen:

16.9

a. $y = x^2 - 1$
b. $y = -3x^2 + 7$
c. $y = (x+1)^2$
d. $y = -2(x-2)^2 + 1$
e. $y = x^2 + 2x$

16.10

a. $y = (x+3)^2 + 4$
b. $y = 2x^2 - 8x$
c. $y = -3x^2 + 7x + 2$
d. $y = 2x^2 + 12x - 5$
e. $y = 5x^2 + 20x - 6$

16.11

a. $y = x^2 + 2x - 3$
b. $y = x^2 - 2x - 3$
c. $y = x^2 + 2x - 8$
d. $y = 2x^2 + x - 1$
e. $y = 3x^2 - x - 2$

16.12

a. $y = -x^2 - 2x + 3$
b. $y = -x^2 + 4x - 3$
c. $y = -x^2 - x + 2$
d. $y = 2x^2 - 3x - 2$
e. $y = 3x^2 + 2x - 1$

Bepaal de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de parabool met de gegeven top T die ook nog door het gegeven punt P gaat.

16.13

a. $T = (0,0)$ en $P = (1,2)$
b. $T = (0,0)$ en $P = (-1,-2)$
c. $T = (0,0)$ en $P = (2,1)$
d. $T = (0,0)$ en $P = (2,-2)$
e. $T = (0,0)$ en $P = (-1,-5)$

16.14

a. $T = (0,1)$ en $P = (1,2)$
b. $T = (0,-1)$ en $P = (2,-2)$
c. $T = (0,-2)$ en $P = (-1,-5)$
d. $T = (3,0)$ en $P = (-1,-2)$
e. $T = (-2,0)$ en $P = (2,1)$

16.15

a. $T = (1,2)$ en $P = (2,3)$
b. $T = (-1,2)$ en $P = (1,6)$
c. $T = (2,-1)$ en $P = (1,1)$
d. $T = (0,3)$ en $P = (1,4)$
e. $T = (-3,0)$ en $P = (-2,3)$

16.16

a. $T = (0,0)$ en $P = (3,6)$
b. $T = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ en $P = (1, -\frac{1}{4})$
c. $T = (\frac{1}{3}, -1)$ en $P = (\frac{2}{3}, \frac{2}{9})$
d. $T = (0, \frac{3}{2})$ en $P = (\frac{1}{2}, 2)$
e. $T = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ en $P = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$

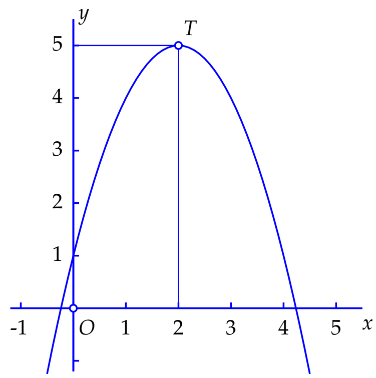
Tweedegraadsfuncties en parabolen

Het functievoorschrift

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1$$

definieert een *tweedegraadsfunctie*, ook wel *kwadratische functie* genoemd.

De grafiek ervan is een *parabool*, in dit geval een *bergparabool* met zijn *top* in het punt $T = (2, 5)$. We zien dat onmiddellijk wanneer we het functievoorschrift via kwadraatafsplitsen schrijven als



$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 4x + 4) + 5 \\ &= -(x-2)^2 + 5 \end{aligned}$$

Immers, de term $-(x-2)^2$ is altijd negatief of nul, en alleen maar nul wanneer $x = 2$ is. In dat geval is $f(x) = 5$ en de coördinaten (x_t, y_t) van de top T zijn dus $(x_t, y_t) = (2, 5)$.

De parabool die de grafiek is van de functie $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ heeft als vergelijking $y = -x^2 + 4x + 1$. Alle punten (x, y) in het Oxy-vlak die aan deze vergelijking voldoen, liggen op de parabool en omgekeerd voldoen de coördinaten (x, y) van elk punt op de parabool ook aan deze vergelijking.

In het algemeen is $f(x) = ax^2 + bx + c$ het functievoorschrift van een tweedegraadsfunctie, mits natuurlijk $a \neq 0$ is. De grafiek ervan is een parabool met als vergelijking

$$y = ax^2 + bx + c$$

Het is een *dalparabool* wanneer $a > 0$ is, en een *bergparabool* wanneer $a < 0$ is (zoals in het voorbeeld hierboven).

Het laagste, respectievelijk hoogste punt van de parabool heet de *top* (ook bij een dalparabool!). De coördinaten (x_t, y_t) ervan bepaal je door net als in het voorbeeld hierboven eerst x_t te berekenen via kwadraatafsplitsen. Daarna kun je y_t via het functievoorschrift berekenen: $y_t = f(x_t)$.

De algemene vergelijking van een parabool met top (x_t, y_t) is

$$y = a(x - x_t)^2 + y_t$$

De constante a kun je berekenen als je de coördinaten kent van nog één ander punt P op de parabool.

Teken de grafieken van de functies f en g in één figuur en bereken hun snijpunten.

16.17

a. $f(x) = x^2 + x - 2$
$g(x) = x + 2$

b. $f(x) = -x^2 - 2x - 1$
$g(x) = 2x + 3$

c. $f(x) = 2x^2 + x - 3$
$g(x) = -x - 3$

d. $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$
$g(x) = 2x - 1$

e. $f(x) = 3x^2 + x - 4$
$g(x) = -3x - 5$

16.18

a. $f(x) = x^2 + 1$
$g(x) = -x^2 + 3$

b. $f(x) = x^2 + x - 2$
$g(x) = x^2 + 2x - 3$

c. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
$g(x) = -x^2 + 8x - 7$

d. $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$
$g(x) = x^2 + x + 1$

e. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = -x^2 + 2x - 5$

Voor welke reële getallen x geldt $f(x) \geq g(x)$?

16.19

a. $f(x) = x^2 + x - 3$
$g(x) = -1$

b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
$g(x) = -2x - 2$

c. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
$g(x) = x - 3$

d. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
$g(x) = 2x + 2$

e. $f(x) = -3x^2 + x + 2$
$g(x) = -x + 2$

16.20

a. $f(x) = x^2 + x - 3$
$g(x) = -x^2 + 3x - 3$

b. $f(x) = x^2 - x - 2$
$g(x) = 2x^2 - 3x - 4$

c. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
$g(x) = x^2 - 3x + 2$

d. $f(x) = 2x^2 - x - 1$
$g(x) = -x^2 + x + 4$

e. $f(x) = -3x^2 + x + 2$
$g(x) = 2x^2 - 5x - 6$

16.21 Voor welke reële getallen p heeft de grafiek van f geen snijpunten met de x-as?

a. $f(x) = x^2 + px + 1$

b. $f(x) = x^2 - x + p$

c. $f(x) = px^2 + 2x - 1$

d. $f(x) = x^2 + px + p$

e. $f(x) = -x^2 + px + p - 3$

16.22 Voor welke reële getallen p snijdt de grafiek van f de x-as in twee verschillende punten?

a. $f(x) = x^2 + 2px - 1$

b. $f(x) = -x^2 + x + p + 1$

c. $f(x) = px^2 + 2x - 3$

d. $f(x) = x^2 + px + p + 3$

e. $f(x) = (p+1)x^2 - px - 1$

Snijpunten van grafieken

Stel dat gegeven zijn de tweedegraadsfuncties

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

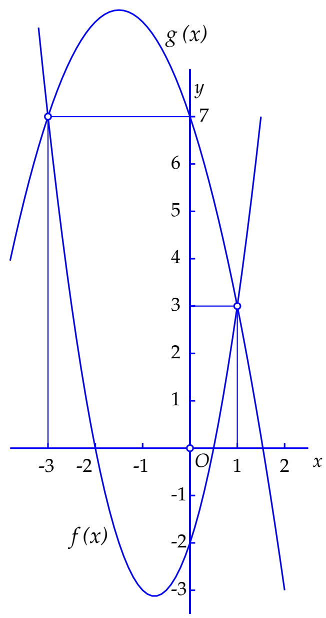
en

$$g(x) = -x^2 - 3x + 7$$

Voor de x-coördinaat van een snijpunt van hun grafieken geldt $f(x) = g(x)$, dus

$$2x^2 + 3x - 2 = -x^2 - 3x + 7$$

oftewel $3x^2 + 6x - 9 = 0$. De oplossingen hiervan zijn $x = 1$ en $x = -3$. Omdat $f(1) = g(1) = 3$ en $f(-3) = g(-3) = 7$ zijn de coördinaten van snijpunten van de twee parabolen dus $(1, 3)$ en $(-3, 7)$.
Uit de grafieken lezen we verder af dat $f(x) \leq g(x)$ wanneer $-3 \leq x \leq 1$ en dat $f(x) \geq g(x)$ wanneer $x \leq -3$ of $x \geq 1$.



De methode is algemeen bruikbaar. Als je voor twee verschillende functies f en g de eventuele snijpunten van hun grafieken zoekt, los je de vergelijking $f(x) = g(x)$ op om de x-coördinaten van de snijpunten te vinden. Invullen van een gevonden x-coördinaat in een van de beide functievoorschriften geeft dan de bijbehorende y-coördinaat.

Wanneer de beide functies tweedegraadsfuncties zijn, is de vergelijking die je oplost een tweedegraadsvergelijking (of eventueel een eerstegraadsvergelijking), en dan zijn er dus hoogstens twee snijpunten.

Hetzelfde geldt voor het geval dat een van de twee functies een eerstegraadsfunctie, en de andere een tweedegraadsfunctie is.

Teken de grafieken van de volgende functies. Bepaal daarbij in het bijzonder de horizontale en de verticale asymptoot en de eventuele snijpunten van de grafiek met de beide coördinaatassen.

16.23

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

b. $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{2x-4}$

d. $f(x) = \dfrac{2x}{x-5}$

e. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

16.24

a. $f(x) = \dfrac{-x}{2x-3}$

b. $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-1}$

c. $f(x) = \dfrac{2x-4}{1-5x}$

d. $f(x) = \dfrac{x+3}{4+7x}$

e. $f(x) = \dfrac{3-2x}{4x-2}$

Bepaal met behulp van de grafiek van f voor welke reële getallen x geldt dat $-1 \leq f(x) \leq 1$.

16.25

a. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

c. $f(x) = \dfrac{5}{x-5}$

d. $f(x) = \dfrac{2x}{3-2x}$

e. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+2}$

16.26

a. $f(x) = \dfrac{2-x}{2x-1}$

b. $f(x) = \dfrac{2x-2}{3x+4}$

c. $f(x) = \dfrac{-x+7}{1-3x}$

d. $f(x) = \dfrac{2x+2}{4-5x}$

e. $f(x) = \dfrac{3-x}{2x+4}$

Bereken de snijpunten van de grafieken van de volgende functies f en g.

16.27

a. $f(x) = \dfrac{8}{x+3}$ en $g(x) = 2x$

b. $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+1}$ en $g(x) = 2-x$

c. $f(x) = \dfrac{8}{5-x}$ en $g(x) = x+4$

d. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3-2x}$ en $g(x) = 3-2x$

16.28

a. $f(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$ en $g(x) = 3x-5$

b. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ en $g(x) = x+2$

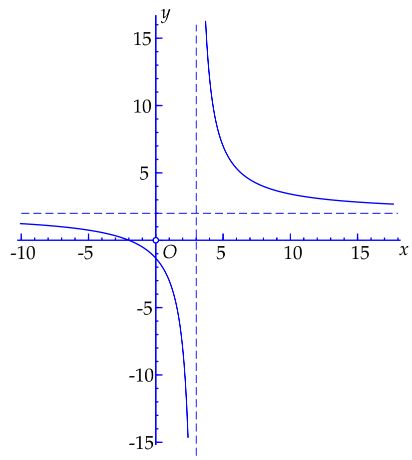
c. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$ en $g(x) = 2-x$

d. $f(x) = \dfrac{2+2x}{2x-4}$ en $g(x) = 3x-5$

Gebroken lineaire functies

De functie

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$$



waarvan het functievoorschrift een 'breuk' is met een lineaire functie in de teller en een lineaire functie in de noemer, heet een *gebroken lineaire functie*. Voor $x = 3$ wordt de noemer nul, en dan kan $f(x)$ dus niet berekend worden. De grafiek van f heeft de verticale lijn $x = 3$ als *verticale asymptoot*. Nadert x van boven tot 3, dan nadert $f(x)$ tot $+\infty$, nadert x van onder tot 3, dan nadert $f(x)$ tot $-\infty$.

Wanneer we in het functievoorschrift teller en noemer delen door x, ontstaat

$$f(x) = \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{3}{x}}$$

Voor zeer grote positieve of negatieve waarden van x zijn $\frac{4}{x}$ en $\frac{3}{x}$ zeer kleine getallen, en dan is $f(x)$ dus vrijwel gelijk aan $\frac{2}{1} = 2$. De horizontale lijn $y = 2$ is daarom een *horizontale asymptoot* van de grafiek van f.

De algemene vorm van een gebroken lineaire functie is

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

waarbij we aannemen dat $c \neq 0$ (want anders is het een 'gewone' lineaire functie). De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{a}{c}$. Zo'n functie is niet gedefinieerd wanneer de noemer nul wordt, dus als $x = -\frac{d}{c}$. De verticale lijn $x = -\frac{d}{c}$ is de verticale asymptoot van de grafiek, tenzij de teller voor $x = -\frac{d}{c}$ ook nul is.

Dat laatste doet zich bijvoorbeeld voor bij de functie

$$f(x) = \frac{2x-4}{-6x+12}$$

De noemer is nul voor $x = 2$, maar de teller is dan ook nul. Voor alle $x \neq 2$ geldt $f(x) = -\frac{1}{3}$ (deel teller en noemer door $2x - 4$), dus de grafiek is gewoon de horizontale lijn $y = -\frac{1}{3}$ met een onderbreking in het punt $(2, -\frac{1}{3})$.

Teken de grafieken van de volgende functies. Werk de haakjes niet uit!

16.29

a. $f(x) = (x-1)^3$

b. $f(x) = x^3 - 1$

c. $f(x) = 1 - x^4$

d. $f(x) = 1 + (x+1)^3$

e. $f(x) = (2x-1)^3$

16.30

a. $f(x) = \sqrt{x-1}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

c. $f(x) = 1 - \sqrt[4]{2-x}$

d. $f(x) = \sqrt[3]{4+7x}$

e. $f(x) = \sqrt[5]{x-2}$

16.31

a. $f(x) = \sqrt{x^3}$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

c. $f(x) = \sqrt{|x|}$

d. $f(x) = \sqrt{|x|^3}$

e. $f(x) = |\sqrt[3]{x}|$

16.32

a. $f(x) = |x|^3$

b. $f(x) = |x-1|^3$

c. $f(x) = |1-x^2|$

d. $f(x) = |1+x^3|$

e. $f(x) = |1-(x+1)^2|$

Los de volgende vergelijkingen en ongelijkheden op. Maak daarbij steeds gebruik van een tekening.

16.33

a. $x^4 \leq x^3$

b. $x^4 = |x|$

c. $x^4 \geq |x|^3$

d. $x^4 \geq \sqrt{x}$

e. $x^4 \leq |\sqrt[3]{x}|$

16.34

a. $|2x+3| = 2$

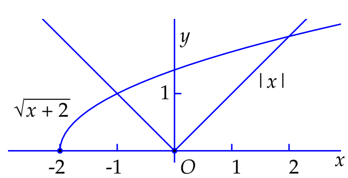
b. $|2x-3| = -2$

c. $|2x+3| = 4x$

d. $|2x+3| \geq |4x|$

e. $|x^2-2x| < 1$

Ook bij de volgende opgaven is het handig eerst een (ruwe) tekening te maken. *Voorbeeld:* Los op $\sqrt{x+2} = |x|$. De tekening hieronder laat zien dat er twee oplossingen zijn. Je vindt ze door de vergelijking te kwadrateren (als x aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet, voldoet x ook aan de gekwadrateerde vergelijking). Dit geeft $x + 2 = x^2$, met als oplossingen (kwadraatafsplitsen of *abc*-formule) $x = -1$ en $x = 2$.



16.35 Los op:

a. $\sqrt{x} = |x|$

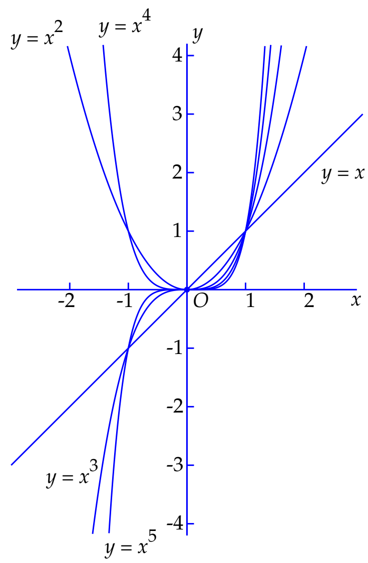
b. $\sqrt{x-1} = |x-2|$

c. $\sqrt{x+1} \leq x-1$

d. $\sqrt{|1-x|} \geq x$

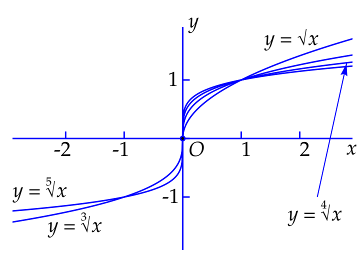
e. $\sqrt{2x+1} \leq |x+1|$

Machtsfuncties, wortelfuncties en de absolute-waardefunctie

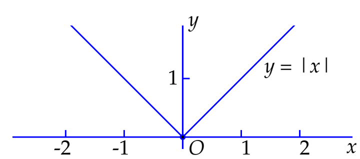


Hiernaast zijn in één figuur de grafieken getekend van de *machtsfuncties* $f(x) = x^n$ voor $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Allemaal gaan ze door de oorsprong en door het punt $(1, 1)$.
Voor elke $n > 1$ heeft de grafiek van x^n in de oorsprong de x-as als raaklijn. Voor even waarden van n nemen de functies daar hun minimale waarde aan.
Voor even waarden van n liggen de grafieken symmetrisch ten opzichte van de y-as. Er geldt dan $f(-x) = f(x)$ voor alle x. Voor oneven n zijn de grafieken puntsymmetrisch in de oorsprong. Er geldt dan $f(-x) = -f(x)$.

In het algemeen heet een functie $f(x)$ *even* als $f(-x) = f(x)$ voor alle x, en *oneven* als $f(-x) = -f(x)$ voor alle x. Maar let op: niet iedere functie is even of oneven. De meeste functies zijn geen van beide, neem bijvoorbeeld de functie $f(x) = x + 1$, die even noch oneven is zoals je gemakkelijk nagaat.



In de tekening hiernaast staan de grafieken van de *wortelfuncties* $f(x) = \sqrt[n]{x}$ voor $n = 2, 3, 4, 5$. Allemaal gaan ze door de oorsprong en door het punt $(1, 1)$. Voor even waarden van n zijn die functies alleen maar gedefinieerd voor $x \geq 0$, voor oneven n zijn ze gedefinieerd voor alle x. Al die grafieken hebben in de oorsprong de y-as als raaklijn.



In de onderste tekening is de grafiek getekend van de *absolute-waardefunctie* $f(x) = |x|$, die gedefinieerd is door $|x| = x$ als $x \geq 0$ en $|x| = -x$ als $x \leq 0$. Voor alle x geldt dat $|x|^2 = x^2$.

Merk op dat $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ als n even is, en $\sqrt[n]{x^n} = x$ als n oneven is.

16.36 Geef voorbeelden van

a. een vijfdegraadspolynoom met vijf verschillende nulpunten,
b. een vijfdegraadspolynoom met vier verschillende nulpunten,
c. een vijfdegraadspolynoom met drie verschillende nulpunten,
d. een vijfdegraadspolynoom met twee verschillende nulpunten,
e. een vijfdegraadspolynoom met één nulpunt,
f. een zesdegraadspolynoom zonder nulpunten.

De factorstelling op de volgende bladzijde zegt dat er bij elk nulpunt $x = a$ van een polynoom $f(x)$ van graad groter dan of gelijk aan 1 een polynoom $g(x)$ hoort waarvoor geldt dat $f(x) = (x - a)g(x)$. Neem bijvoorbeeld

$$f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x - 2$$

Invullen laat zien dat $f(2) = 0$ dus $x = 2$ is een nulpunt. De volgende staartdeling levert het polynoom $g(x) = 3x^3 - x^2 + x + 1$.

$$\begin{array}{rl}
x-2 \ / & 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 \quad - x - 2 \ \backslash \ 3x^3 - x^2 + x + 1 \\
 & \underline{3x^4 - 6x^3} \\
 & \quad - x^3 + 3x^2 \\
 & \quad \underline{- x^3 + 2x^2} \\
 & \qquad\qquad x^2 - x \\
 & \qquad\qquad \underline{x^2 - 2x} \\
 & \qquad\qquad\quad x - 2 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{x - 2} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Hieruit blijkt dat $3x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x - 2 = (x - 2)(3x^3 - x^2 + x + 1)$.

Ga bij de volgende opgaven na dat a een nulpunt van het gegeven polynoom $f(x)$ is en bepaal vervolgens met een staartdeling het polynoom $g(x)$ waarvoor geldt dat $f(x) = (x - a)g(x)$.

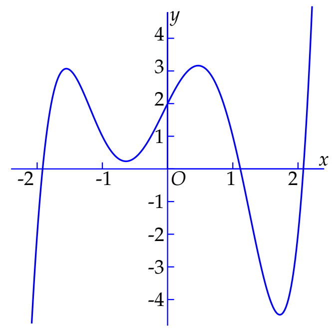
16.37

a. $f(x) = x^2 - x - 2$, $a = 2$
b. $f(x) = 2x^2 - 2$, $a = 1$
c. $f(x) = x^3 + 1$, $a = -1$
d. $f(x) = x^6 - 1$, $a = 1$
e. $f(x) = 2x^3 - 4x + 8$, $a = -2$
f. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $a = 1$
g. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 12x - 4$, $a = 2$

16.38

a. $f(x) = 2x^4 - 2$, $a = 1$
b. $f(x) = x^3 + x^2 + 4$, $a = -2$
c. $f(x) = x^3 + 8$, $a = -2$
d. $f(x) = x^4 - 16$, $a = 2$
e. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $a = 1$
f. $f(x) = 2x^3 - 4x + 8$, $a = -2$
g. $f(x) = x^4 - 9x^3 - 6x^2 - 4$, $a = -1$

Polynomen



Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$. De schaalverdelingen op de assen zijn verschillend gekozen.
Je ziet drie *nulpunten* van deze functie, dat wil zeggen punten x waarvoor $f(x) = 0$ is. Of $f(x)$ nog meer nulpunten heeft, kun je zo direct niet zien: misschien liggen er verderop naar links of naar rechts wel meer. Nader onderzoek zou dat kunnen uitwijzen.
In het algemeen heet elke functie van de vorm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

een *polynoomfunctie*, of, kortweg, een *polynoom*. Ook het Nederlandse woord *veelterm* wordt hiervoor wel gebruikt. De getallen a_i heten de *coëfficiënten*. We veronderstellen daarbij altijd dat de hoogste coëfficiënt a_n niet nul is (anders zou je die term net zo goed weg kunnen laten). De andere coëfficiënten mogen wel nul zijn. Men noemt n de *graad* van het polynoom. Het hierboven gegeven voorbeeld is dus een vijfdegraadspolynoom.

Van belang is de *factorstelling*:

> *Als $f(x)$ een n-degraads polynoom is met $n \geq 1$ en a is een reëel getal waarvoor geldt dat $f(a) = 0$, dan is er een polynoom $g(x)$ van graad $n-1$ zo, dat $f(x) = (x-a)g(x)$.*

Neem als voorbeeld $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x - 2$. Als je hier $x = 2$ invult, krijg je $f(2) = 3 \cdot 16 - 7 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 2 - 2 = 0$ dus 2 is een nulpunt. De bijbehorende functie $g(x)$ vind je via een *staartdeling*. Op de tegenoverliggende bladzijde is dat voorgedaan. Zo zie je dat $f(x) = (x-2)(3x^3 - x^2 + x + 1)$.

Als $g(x)$ een nulpunt heeft, kun je daar ook weer zo'n eerstegraadsfactor uit halen, enzovoort, net zo lang totdat er een polynoom zonder nulpunten overblijft. Elk polynoom $f(x)$ is dus te schrijven als

$$f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_k)h(x)$$

waarbij $h(x)$ een polynoom zonder nulpunten is. Gevolg:

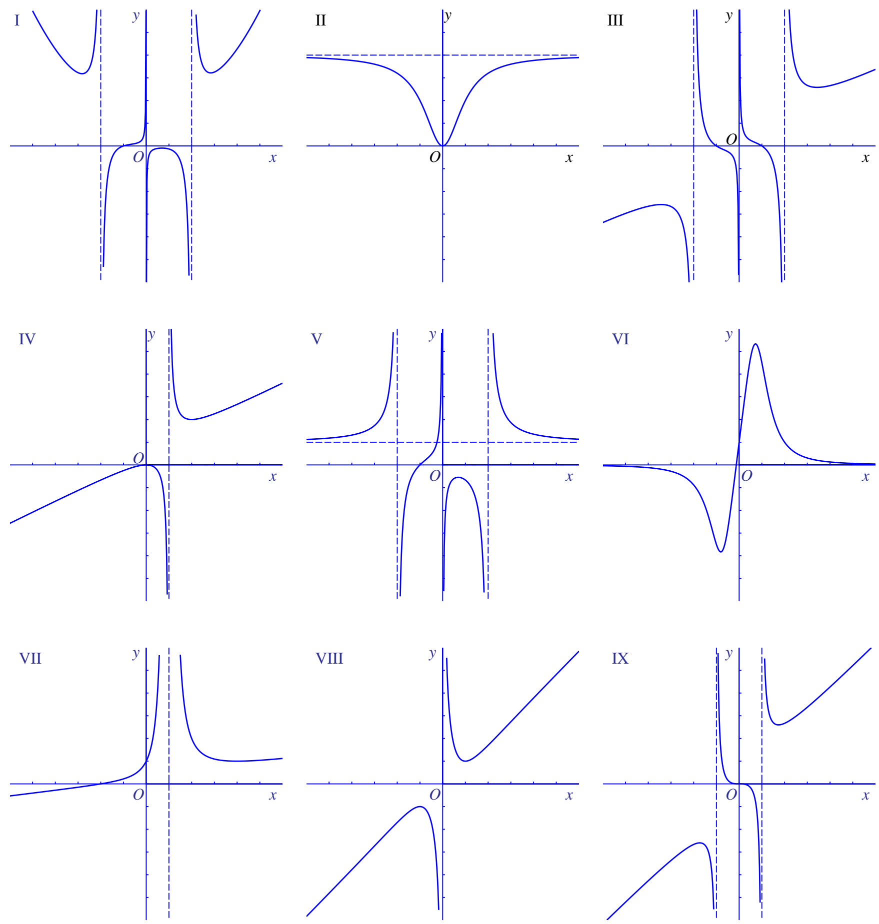
> *Elk n-degraads polynoom met $n \geq 1$ heeft hoogstens n nulpunten.*

Zonder bewijs vermelden we nog de volgende stelling:

> *Elk n-degraads polynoom met n oneven heeft minstens één nulpunt.*

In het bijzonder heeft elk derdegraadspolynoom dus minstens één nulpunt.

16.39 Zoek bij elke grafiek het bijpassende functievoorschrift. Motiveer je antwoord. Gebruik geen grafische rekenmachine.



a. $\dfrac{x^4+1}{x^3+x}$ b. $\dfrac{x^3+1}{x^3-4x}$ c. $\dfrac{4x^2}{x^2+1}$

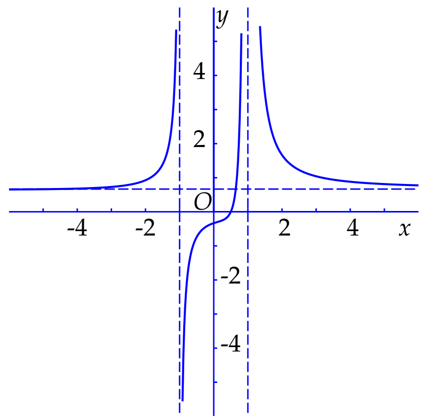
d. $\dfrac{x^4-1}{2x^3-8x}$ e. $\dfrac{x^5+1}{5x^3-20x}$ f. $\dfrac{x^2}{2x-2}$

g. $\dfrac{x^3+8}{8(x-1)^2}$ h. $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ i. $\dfrac{8x+1}{x^4+1}$

Rationale functies

Hiernaast is de grafiek getekend van de functie

$$f(x) = \frac{(x^2+1)(2x-1)}{3(x-1)^2(x+1)}$$



Je ziet twee verticale asymptoten en een horizontale asymptoot. De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1$ en $x = -1$, precies bij de waarden van x waarvoor de noemer nul wordt. De horizontale asymptoot is de lijn $y = \frac{2}{3}$. De horizontale asymptoot geeft de limietwaarde van $f(x)$ als $x \longrightarrow +\infty$ en als $x \longrightarrow -\infty$.

Je vindt die limieten het gemakkelijkst als je $f(x)$ schrijft als

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 1}{3x^3 - 3x^2 - 3x + 3} = \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{3 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3}}$$

dus haakjes uitwerken en teller en noemer delen door de hoogste macht van x. Het enige nulpunt van de functie is het punt waar de teller nul wordt, en dat is als $x = \frac{1}{2}$.

Men noemt in het algemeen iedere functie waarvan het functievoorschrift geschreven kan worden als het quotiënt van twee polynomen een *rationale functie*. Zo'n functie is dus van de gedaante

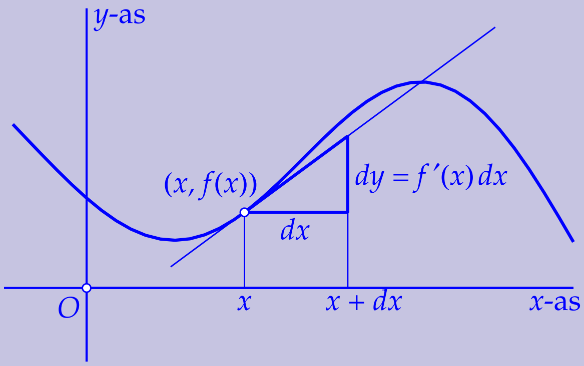
$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

We kunnen daarbij aannemen dat het tellerpolynoom $a(x)$ en het noemerpolynoom $b(x)$ geen gemeenschappelijke nulpunten hebben, want als die er wel zijn, kunnen we ze via de factorstelling tegen elkaar wegdelen.

Als dat gebeurd is, zijn de nulpunten van de teller $a(x)$ ook de nulpunten van $f(x)$. De nulpunten van de noemer $b(x)$ heten dan de *polen* van $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

Een horizontale asymptoot treedt alleen maar op als $n \leq m$. Als $n = m$ is de lijn $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ de horizontale asymptoot. Dit geval deed zich voor in het hierboven getekende voorbeeld: daar was $a_3 = 2$ en $b_3 = 3$. Als $n < m$ is de x-as de horizontale asymptoot. De limiet van $f(x)$ voor $x \longrightarrow \pm\infty$ is dan nul.

VII Calculus



De differentiaalrekening en de integraalrekening – in de Amerikaanse literatuur samen vaak kortweg met de term 'calculus' aangeduid als afkorting van *differential and integral calculus* – behoren ongetwijfeld tot de meest succesvolle onderdelen van de wiskunde. Toepassingen ervan strekken zich uit van sterrenkunde tot nanotechnologie, van civiele techniek tot quantummechanica, van natuur- en scheikunde tot economie, van kansrekening en statistiek tot populatiedynamica.
Wij behandelen in dit boek voornamelijk de wiskundige techniek. Toch spelen toepassingen op de achtergrond een belangrijke rol: onze behandeling is zo ingericht dat daar een optimale basis voor wordt gelegd. Daarom wordt veel aandacht besteed aan het werken met differentialen, want die zijn in vrijwel alle toepassingen het aangrijpingspunt voor wiskundige modelvorming.

20 Differentiëren

Op bladzijde 179 staan vijf rekenregels voor differentiëren. Bij de opgaven op deze bladzijde heb je alleen de eerste twee nodig:

$$\begin{aligned}(c\,f(x))' &= c\,f'(x) \quad \text{voor elke constante } c\\ (f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

Verder moet je weten dat voor elk reëel getal p geldt dat $(x^p)' = p\,x^{p-1}$. Bereken nu de afgeleide van de volgende functies.

20.1
a. $2x-3$
b. 2
c. $4x^2+1$
d. $10\,x^7$
e. $4x+x^3$

20.2
a. x^3-3
b. x^2-2x+1
c. x^4-3x^3+2
d. $8x^8$
e. x^6-6x^4

20.3
a. $4x^4-3x^2+2$
b. $2000\,x^{2000}$
c. $7x^7-6x^6$
d. x^3+7x^7-12
e. x^2-5x^3+x

20.4
a. $\sqrt{x}$
b. $x\sqrt{x}$
Hint: $x\sqrt{x} = x^{3/2}$
c. $\sqrt{x^3}$
d. $x^2\sqrt{x}$
e. $\sqrt{2x}$
Hint: $\sqrt{2x} = \sqrt{2}\sqrt{x}$

20.5
a. $\sqrt[3]{x}$
b. $x^{2/3}$
c. $\sqrt[4]{x}$
d. $x\sqrt[4]{x}$
e. $x^2\sqrt[5]{x^2}$

20.6
a. $\sqrt[7]{x^2}$
b. $\sqrt{3x^3}$
c. $\sqrt[3]{2x^5}$
d. $\sqrt[4]{x^5}$
e. $\sqrt{x^7}$

20.7
a. x^{-1}
b. $2x^{-2}$
c. $3x^{-3}$
d. $x^{-1/2}$
e. $x^{-2/3}$

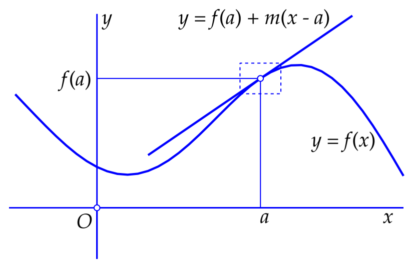
20.8
a. $x^{2.2}$
b. $x^{4.7}$
c. $x^{-1.6}$
d. $x^{0.333}$
e. $x^{-0.123}$

20.9
a. $\dfrac{1}{x}$
b. $\dfrac{3}{2x}$
c. $\dfrac{5}{x^5}$
d. $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$
e. $\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

Raaklijn en afgeleide

De grafieken van veel functies hebben in alle of bijna alle punten een 'glad' verloop: als je steeds sterker op zo'n punt inzoomt, gaat de grafiek steeds meer op een rechte lijn lijken. Die lijn is de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

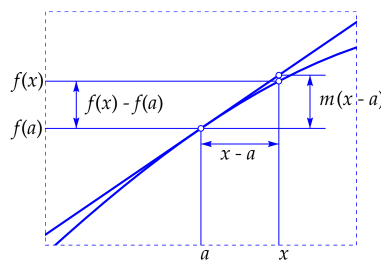
Hiernaast is de grafiek van zo'n functie $f(x)$ getekend, met daarbij ook de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. Vlak in de buurt van dat punt zijn grafiek en raaklijn inderdaad nauwelijks van elkaar te onderscheiden. Als illustratie hiervan hebben we het kleine rechthoekje rond het punt $(a, f(a))$ in de figuur eronder nog eens vergroot weergegeven.



Als de raaklijn niet verticaal is, kan de vergelijking ervan worden geschreven als $y = f(a) + m(x - a)$ voor een zekere m, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Voor x vlak bij a geldt dan blijkbaar dat

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx \frac{m(x - a)}{x - a} = m$$

en die gelijkenis is beter naarmate x dichter bij a ligt.



Preciezer geformuleerd, met behulp van een limiet:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Men noemt m de *afgeleide* van $f(x)$ in a, en gebruikt daarvoor de notatie $f'(a)$.

Wanneer een functie $f(x)$ in alle punten van een interval een niet-verticale raaklijn heeft, is er dus in elk punt x van dat interval een afgeleide $f'(x)$ gedefinieerd. Daarmee is de afgeleide op dat interval zelf een functie geworden, de *afgeleide functie*. Veel gebruikte notaties voor de afgeleide functie van $f(x)$ zijn naast $f'(x)$ ook $\frac{df}{dx}(x)$ en $\frac{d}{dx}f(x)$. Het bepalen van de afgeleide van een gegeven functie heet *differentiëren*.

Als $f(x)$ een *lineaire* functie is, dus $f(x) = mx + c$, dan is de grafiek een rechte lijn met richtingscoëfficiënt m en dan valt de raaklijn in elk punt met de grafiek samen. Voor elke x geldt dan $f'(x) = m$. In het bijzonder is de afgeleide van elke constante functie nul.

Bereken met behulp van de kettingregel de afgeleide van de volgende functies. *Voorbeelden:*

1. $\left((x^3-1)^5\right)' = 5(x^3-1)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2(x^3-1)^4$
2. $\left(\sin(x^2+1)\right)' = (\cos(x^2+1)) \cdot 2x = 2x\cos(x^2+1)$

Let op: het is bij het toepassen van de kettingregel op een samengestelde functie $f(g(x))$ *niet* handig om de functies f en g eerst apart op te schrijven! Je moet gewoon terwijl je differentieert de samengestelde functie $f(g(x))$ *van buiten naar binnen toe* afpellen zoals dat hierboven ook gedaan is. Vaak kun je je antwoord daarna nog wat vereenvoudigen.

20.10
- a. $(2+3x)^3$
- b. $(3-5x)^7$
- c. $(1-3x^2)^{-1}$
- d. $(1-\sqrt{x})^4$
- e. $(x-x^4)^{-2}$

20.11
- a. $(2x-3)^5$
- b. $(x^2+5)^{-1}$
- c. $\sqrt{3x-4}$
- d. $\sqrt{x^2+x}$
- e. $(x+4x^3)^{-3}$

20.12
- a. $\sqrt{1+x+x^2}$
- b. $\sqrt[3]{1+x+x^2}$
- c. $(x^2-1)^4$
- d. $\sqrt{x^3+1}$
- e. $(x^2+x)^{3/2}$

Bereken met behulp van de productregel de afgeleide van:

20.13
- a. $x\sin x$
- b. $x\cos 2x$
- c. $x^2\ln x$
- d. $(x+1)\tan x$
- e. $(2x+1)\ln x$

20.14
- a. $\sqrt{x+1}\ln x$
- b. $(\sin x)(\ln x^2)$
- c. $x\ln\sqrt[3]{x}$
- d. $x\ln(\sin x)$
- e. $\sqrt{x}\ln(1-x^2)$

20.15
- a. $x\ ({}^2\log x)$
- b. $\sqrt{x}\ ({}^5\log x^3)$
- c. $(x-1)({}^2\log x)$
- d. $x\mathrm{e}^{-x}$
- e. $x^2\mathrm{e}^{-x^2}$

Bereken met behulp van de quotiëntregel de afgeleide van:

20.16
- a. $\dfrac{x}{x+1}$
- b. $\dfrac{x-1}{x+1}$
- c. $\dfrac{x^2}{x+1}$
- d. $\dfrac{x}{x^2+1}$
- e. $\dfrac{x-1}{x^2+x}$

20.17
- a. $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$
- b. $\dfrac{x^2-1}{x+2}$
- c. $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
- d. $\dfrac{2x-3}{4x+1}$
- e. $\dfrac{1-x}{2-x}$

20.18
- a. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$
- b. $\dfrac{\cos x}{x+1}$
- c. $\dfrac{\arcsin x}{x+1}$
- d. $\dfrac{\ln x}{\sin x}$
- e. $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

Rekenregels en standaardafgeleiden

Rekenregels voor differentieerbare functies:

$$
\begin{aligned}
(c\,f(x))' &= c\,f'(x) \quad \text{voor elke constante } c \\
(f(x)+g(x))' &= f'(x)+g'(x) \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x) \quad \text{(kettingregel)} \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \text{(productregel)} \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(quotiëntregel)}
\end{aligned}
$$

Standaardfuncties en hun afgeleiden:

$f(x)$	$f'(x)$	
x^p	$p\,x^{p-1}$	voor elke p
a^x	$a^x\,\ln a$	voor elke $a>0$
e^x	e^x	
${}^a\!\log x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	voor elke $a>0, a\neq 1$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Bereken de afgeleide van de volgende functies:

20.19
a. $\sin(x-3)$
b. $\cos(2x+5)$
c. $\sin(3x-4)$
d. $\cos(x^2)$
e. $\sin\sqrt{x}$

20.20
a. $\tan(x+2)$
b. $\tan(2x-4)$
c. $\sin(x^2-1)$
d. $\cos(1/x)$
e. $\tan\sqrt[3]{x}$

20.21
a. $\arcsin 2x$
b. $\arcsin(x+2)$
c. $\arccos(x^2)$
d. $\arctan\sqrt{x}$
e. $\ln(\cos x)$

20.22
a. e^{2x+1}
b. e^{1-x}
c. $2\mathrm{e}^{-x}$
d. $3\mathrm{e}^{1-x}$
e. e^{x^2}

20.23
a. e^{x^2-x+1}
b. e^{1-x^2}
c. $3\mathrm{e}^{3-x}$
d. $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
e. $\mathrm{e}^{1+\sqrt{x}}$

20.24
a. 2^{x+2}
b. 3^{1-x}
c. 2^{2-3x}
d. 5^{x^2}
e. $3^{\sqrt[3]{x}}$

20.25
a. $\ln(1-2x)$
b. $\ln(3x^2-8)$
c. $\ln(3x-4x^2)$
d. $\ln(x^3+x^6)$
e. $\ln(x^2+1)$

20.26
a. $\ln\sqrt{x+1}$
b. $\ln x^2$
c. $\ln\sqrt[3]{x}$
d. $\ln\sqrt[3]{1-x}$
e. $\ln(4-x)^2$

20.27
a. ${}^{2}\log x$
b. ${}^{3}\log x^3$
c. ${}^{10}\log(x+1)$
d. ${}^{10}\log\sqrt{x+1}$
e. ${}^{2}\log(x^2+x+1)$

Onderzoek bij de volgende functies voor welke x ze wel gedefinieerd, maar niet differentieerbaar zijn. Een ruwe schets van de grafiek kan je daarbij helpen!

20.28
a. $f(x)=|x-1|$
b. $f(x)=|x^2-1|$
c. $f(x)=\sqrt{|x|}$
d. $f(x)=|\ln(x-1)|$
e. $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$

20.29
a. $f(x)=\sin|x|$
b. $f(x)=\cos|x|$
c. $f(x)=|\sin x|$
d. $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}$
e. $f(x)=\ln(1+\sqrt{x})$

Bepaal die vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ in het punt $(a, f(a))$ in de volgende gevallen (zie bladzijde 177):

20.30
a. $f(x)=2x^2-3,\quad a=1$
b. $f(x)=x^5-3x^2+3,\quad a=-1$
c. $f(x)=4x^3+2x-3,\quad a=0$
d. $f(x)=8x^4-x^7,\quad a=2$
e. $f(x)=4x-2x^2+x^3,\quad a=-1$

20.31
a. $f(x)=x^2-3x^{-1},\quad a=1$
b. $f(x)=x^2-3\sqrt{x}-3,\quad a=4$
c. $f(x)=x^3+x-3,\quad a=0$
d. $f(x)=x^{-4}-2,\quad a=1$
e. $f(x)=8x-2x^2,\quad a=-3$

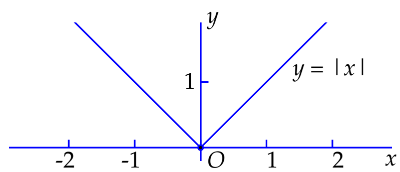
Differentieerbaarheid

In de vorige paragraaf is $f'(a)$ gedefinieerd als

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Het getal $f'(a)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ in het punt $(a, f(a))$. Die limiet moet dan wel bestaan en bovendien eindig zijn, want we hebben aangenomen dat de raaklijn niet verticaal is. Wanneer aan deze beide voorwaarden voldaan is, heet $f(x)$ *differentieerbaar* in a.

Niet elke functie is differentieerbaar in elk punt. Zo is bijvoorbeeld de functie $f(x) = |x|$ niet differentieerbaar in 0 omdat $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ gelijk is aan 1 als $x > 0$ is, en gelijk is aan -1 als $x < 0$ is. De limiet voor $x \to 0$ bestaat dus niet. Ook aan de grafiek is dat te zien: die heeft in de oorsprong een knikpunt. Bij het inzoomen blijft die knik altijd zichtbaar aanwezig.

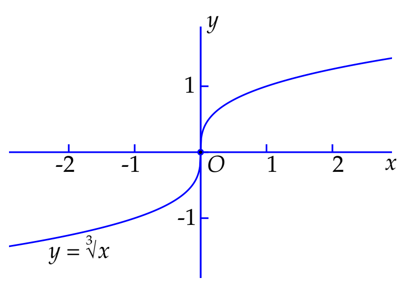


Maar ook als er wél een raaklijn is, hoeft een functie niet differentieerbaar te zijn, want zo'n raaklijn kan verticaal zijn. De limiet waarmee de afgeleide gedefinieerd wordt, is dan plus of min oneindig.

Zo is de de raaklijn aan de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in de oorsprong verticaal, en inderdaad is

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Voor $x = 0$ is de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dus niet differentieerbaar.



Bereken de tweede afgeleide van de volgende functies.

20.32

a. $\sqrt{x+1}$

b. $\dfrac{x-1}{x+1}$

c. $\ln(x^2+1)$

d. $x\ln x$

e. $x\sin x$

f. $x^2\cos 2x$

20.33

a. $\sin(\sqrt{x})$

b. $\tan x$

c. $\arctan x$

d. $x\sqrt{x-1}$

e. $\dfrac{\sin x}{x}$

f. $\sin^2 x$

Bereken de tiende afgeleide van de volgende functies. Probeer daarbij eerst een patroon te ontdekken in de opvolgende afgeleiden.

20.34

a. x^9

b. x^{10}

c. x^{11}

d. e^{-x}

e. e^{2x}

f. e^{x+1}

20.35

a. $\dfrac{1}{x+1}$

b. $\ln x$

c. $\sin 2x$

d. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

e. xe^{x}

f. xe^{-x}

Hogere afgeleiden

Wanneer een functie $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van een interval, kan de afgeleide functie ook weer een differentieerbare functie zijn. De afgeleide van de afgeleide heet dan de *tweede afgeleide*. Gebruikelijke notaties daarvoor zijn $f''(x)$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$ en $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$. (Let bij de laatste twee notaties op de verschillende plaatsing van de 'exponent' 2 in de 'teller' en de 'noemer'!)

Zo kunnen we doorgaan en de n-de afgeleide van een functie definiëren als de afgeleide van de $(n-1)$-e afgeleide wanneer die laatste een differentieerbare functie is. In het algemeen wordt voor de n-de afgeleide met $n > 2$ meestal een van de volgende notaties gebruikt: $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^nf}{dx^n}(x)$ of $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Sommige functies kunnen net zo vaak gedifferentieerd worden als we willen: voor elke n bestaat de n-de afgeleide. Men noemt zulke functies *oneindig vaak differentieerbaar*. We geven enige voorbeelden.

a. $f(x) = x^n$, waarbij n een positief geheel getal is.
Dan is $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ enzovoort. De exponent daalt bij elke stap met 1, en de n-de afgeleide is een constante, namelijk $n!$ (n-faculteit, zie bladzijde 57). Alle hogere afgeleiden zijn nul.

b. $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dan is $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ voor elke n.

c. $f(x) = \sin x$. Dan is $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ enzovoort.

d. $f(x) = \cos x$. Dan is $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ enzovoort.

e. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Omdat we $f(x)$ ook kunnen schrijven als $f(x) = x^{-1}$ zijn de hogere afgeleiden gemakkelijk te bepalen:
$f'(x) = (-1)x^{-2} = -x^{-2}$,
$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 2!x^{-3}$,
$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = -3!x^{-4}$ enzovoort.

f. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Dan is $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,
$f''(x) = (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$,
$f^{(3)}(x) = (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ enzovoort.

Geef bij elk van de volgende functies de eventuele nulpunten van de afgeleide en de intervallen waarop de functie monotoon stijgend of dalend is.

20.36

a. $x^3 + 1$

b. $x^4 - 4x^3 + 4$

c. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

20.37

a. $x^3 + x$

b. $x^6 - 6x + 3$

c. $\dfrac{1}{x^2}$

20.38

a. $\dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

b. $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

c. $\arctan x^2$

20.39 Ga na of de volgende uitspraken waar zijn of niet. Motiveer je antwoord; geef in het geval dat zo'n uitspraak niet waar is een *tegenvoorbeeld*, dat wil zeggen een voorbeeld van een functie $f(x)$ op een interval I waarvoor de uitspraak niet geldig is.

a. Als $f(x)$ monotoon stijgend is op I, dan is $f(x)$ ook monotoon niet-dalend op I.

b. Als $f(x)$ monotoon niet-stijgend is op I, dan is $f(x)$ ook monotoon dalend op I.

c. Een functie kan niet tegelijkertijd monotoon stijgend en monotoon dalend zijn op I.

d. Een functie kan niet tegelijkertijd monotoon niet-stijgend en monotoon niet-dalend zijn op I.

e. Als $f(x)$ monotoon stijgend en differentieerbaar is op I, dan is $f'(x) > 0$ voor alle x in I.

20.40 Ga na of de volgende uitspraken waar zijn of niet. Motiveer je antwoord; geef in het geval dat zo'n uitspraak niet waar is een *tegenvoorbeeld*, dat wil zeggen een voorbeeld van een functie $f(x)$ op een interval I waarvoor de uitspraak niet geldig is.

a. Als $f(x)$ monotoon stijgend is op I, dan is $g(x) = (f(x))^2$ ook monotoon stijgend op I.

b. Als $f(x)$ monotoon stijgend is op I, dan is $g(x) = (f(x))^3$ ook monotoon stijgend op I.

c. Als $f(x)$ monotoon dalend is op I, dan is $g(x) = \mathrm{e}^{-f(x)}$ monotoon stijgend op I.

20.41 Ga na of de volgende uitspraken waar zijn of niet. Motiveer je antwoord; geef in het geval dat zo'n uitspraak niet waar is een *tegenvoorbeeld*, dat wil zeggen een voorbeeld van functies $f(x)$ en $g(x)$ op een interval I waarvoor de uitspraak niet geldig is.

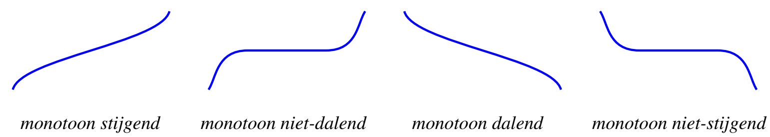
a. Als $f(x)$ en $g(x)$ monotoon stijgend zijn op I, dan is $f(x) + g(x)$ ook monotoon stijgend op I.

b. Als $f(x)$ en $g(x)$ monotoon stijgend zijn op I, dan is $f(x) \times g(x)$ ook monotoon stijgend op I.

Stijgen, dalen en het teken van de afgeleide

Stel dat een functie $f(x)$ op een interval I gegeven is.

De functie $f(x)$ heet *monotoon stijgend op I* als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) < f(x_2)$.
De functie $f(x)$ heet *monotoon niet-dalend op I* als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) \leq f(x_2)$.
De functie $f(x)$ heet *monotoon dalend op I* als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) > f(x_2)$.
De functie $f(x)$ heet *monotoon niet-stijgend op I* als voor alle getallen x_1 en x_2 uit I met $x_1 < x_2$ geldt dat $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Het al of niet differentieerbaar zijn van $f(x)$ speelt bij deze definities geen rol. Voor differentieerbare functies geldt de volgende stelling:

Stelling: Stel dat $f(x)$ differentieerbaar is in alle punten van het interval I. Dan geldt:

a. als de functie $f(x)$ monotoon niet-dalend is op het interval I, dan is $f'(x) \geq 0$ voor alle x in I,
b. als de functie $f(x)$ monotoon niet-stijgend is op het interval I, dan is $f'(x) \leq 0$ voor alle x in I,
c. als $f'(x) > 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon stijgend,
d. als $f'(x) \geq 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon niet-dalend,
e. als $f'(x) < 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon dalend,
f. als $f'(x) \leq 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ monotoon niet-stijgend,
g. als $f'(x) = 0$ voor alle x in I, dan is $f(x)$ constant.

Het bewijs van de onderdelen (a) en (b) is niet moeilijk, dat van de andere onderdelen echter wel. We laten hier alle bewijzen achterwege.

Bepaal van de volgende functies de x-waarde van alle lokale en globale maxima en minima en geef telkens aan om wat voor soort extremum het gaat. Maak bij deze opgaven steeds gebruik van een (ruwe) schets van de grafiek van de functie en gebruik waar nodig ook de afgeleide.

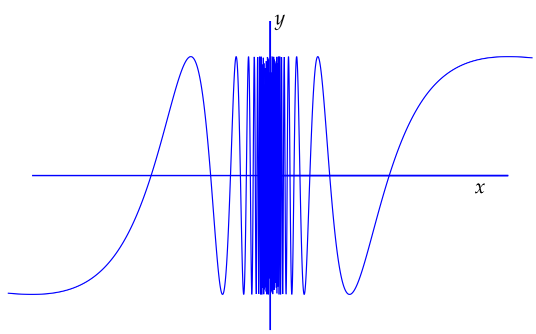
20.42
a. $x^3 - x$
b. $x^4 - 2x^2$
c. $x^4 - 6x^2 + 5$
d. $|x - 1|$
e. $|x^2 - 1|$

20.43
a. $\sin x$
b. $\sin x^2$
c. $\sin \sqrt{x}$
d. $\sin |x|$
e. $|\sin x|$

20.44
a. $x \ln x$
b. $(\ln x)^2$
c. $\arcsin x$
d. $\ln \cos x$
e. $\ln |\cos x|$

20.45
a. $x\mathrm{e}^{x}$
b. e^{-x^2}
c. $x\mathrm{e}^{-x^2}$
d. $\mathrm{e}^{\sin x}$
e. $\mathrm{e}^{-|x|}$

20.46 Hieronder is de grafiek geschetst van de functie $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$.



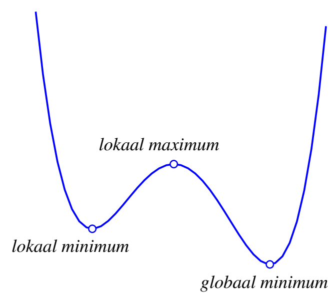
a. Bepaal alle nulpunten.
b. Bepaal de plaats van alle maxima en alle minima.
c. Bereken $\lim_{x\to\infty} f(x)$ en $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
d. Bestaat $\lim_{x\to 0} f(x)$? Motiveer je antwoord.

Extreme waarden

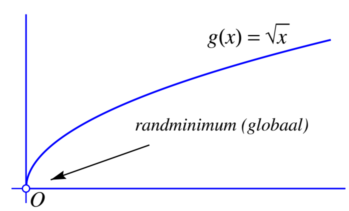
Deze paragraaf gaat over maxima en minima van functies. Eerst zeggen we precies wat we hieronder verstaan.

> Als geldt dat $f(x) \leq f(c)$ voor alle x uit het domein van $f(x)$, dan heet $f(c)$ het *globale maximum* van de functie. Geldt $f(x) \geq f(c)$ voor alle x uit het domein, dan heet $f(c)$ het *globale minimum*.
>
> Men noemt $f(c)$ een *lokaal maximum* of *lokaal minimum* van $f(x)$ als er een getal $r > 0$ bestaat zo dat voor alle x uit het domein van $f(x)$ met $|x - c| < r$ geldt dat $f(x) \leq f(c)$, respectievelijk $f(x) \geq f(c)$.

De algemene term voor minimum of maximum is *extremum* of *extreme waarde*. Een globaal maximum of minimum is ook altijd een lokaal maximum of minimum, maar het omgekeerde hoeft niet waar te zijn. Hiernaast is de grafiek van een vierdegraadspolynoom getekend met drie extremen: een lokaal minimum, een lokaal maximum en een globaal minimum, dat natuurlijk tegelijkertijd ook een lokaal minimum is. Er is geen globaal maximum.



Een term die ook vaak gebruikt wordt is *randextremum*. Dat is een extremum dat optreedt aan de rand van het domein van een functie. Neem bijvoorbeeld de functie $g(x) = \sqrt{x}$, die als domein het interval $[0, \infty\rangle$ heeft. Het globale minimum $g(0) = 0$ treedt op voor $x = 0$, aan de rand van het domein.



Differentieerbaarheid speelt bij deze definities geen rol: zo is bijvoorbeeld het globale minimum van de functie $f(x) = |x|$ gelijk aan $f(0) = 0$, ook al is die functie daar niet differentieerbaar (zie ook bladzijde 181).

Maar als een functie differentieerbaar is in een punt waar een lokaal (of globaal) maximum of minimum wordt aangenomen, dan is er met de afgeleide iets bijzonders aan de hand. Die is dan namelijk nul.

> **Stelling:** Als een functie $f(x)$ voor $x = a$ een lokaal maximum of minimum aanneemt en daar differentieerbaar is, dan is $f'(a) = 0$.

Let op: het *omgekeerde* van deze stelling is niet waar: als $f'(a) = 0$ is, hoeft $f(x)$ in a geen lokaal maximum of minimum aan te nemen, denk maar aan de functie $f(x) = x^3$, die in $x = 0$ geen maximum of minimum aanneemt, maar waarvoor wel geldt dat $f'(0) = 0$.

Bepaal alle stationaire punten en alle buigpunten van de volgende functies.

20.47

a. x^3

b. $x^3 - x$

c. $x^4 - x^2 - 2x + 1$

d. $x^5 + 10x^2 + 2$

e. $\dfrac{1}{1+x^2}$

20.48

a. $\sin x$

b. $\arctan x$

c. $x^2 \ln x$

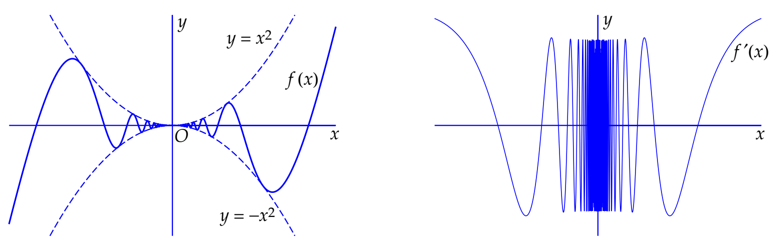
d. $x\mathrm{e}^{-x}$

e. e^{-x^2}

20.49 Hieronder zijn de grafieken getekend van de functie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{\pi}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

en de afgeleide functie $f'(x)$.



a. Laat zien dat $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ voor alle x en ga na voor welke waarden van x geldt dat $f(x) = -x^2$, respectievelijk $f(x) = x^2$.

b. Geef een formule voor $f'(x)$ als $x \neq 0$.

c. Toon aan dat $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.
(Dit betekent dat $f(x)$ differentieerbaar is in $x = 0$ en dat $f'(0) = 0$.)

d. Bereken $f'(\frac{1}{2k})$ en $f'(\frac{1}{2k+1})$ voor k geheel.

e. Laat zien dat $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x)$ niet bestaat.
(Hieruit volgt dat $f'(x)$ niet continu is in $x = 0$.)

f. Neemt $f(x)$ in $x = 0$ een lokaal minimum of maximum aan?

g. Is $x = 0$ een buigpunt van $f(x)$?

h. Zij $g(x) = f(x) + x$. Dan is $g'(0) = 1$. Is er een $c > 0$ zo, dat $g(x)$ monotoon stijgend is op het interval $(-c, c)$?

Stationaire punten en buigpunten

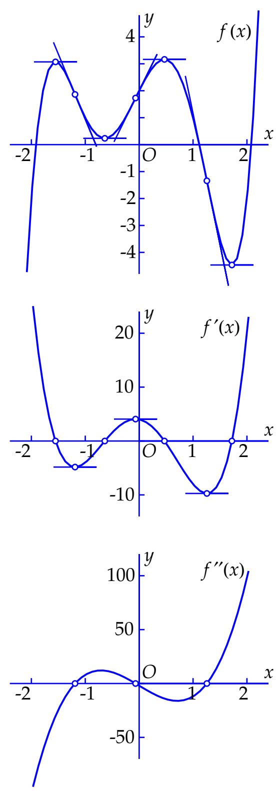
Als $f(x)$ differentieerbaar is in a en $f'(a) = 0$ dan is de raaklijn aan de grafiek daar horizontaal, en dus is $f(x)$ vlak in de buurt van a vrijwel constant. Men noemt zo'n punt daarom een *stationair punt*.

Als $f'(a) = 0$ heet a een *stationair punt* van $f(x)$.

Lokale extrema van differentieerbare functies treden op in stationaire punten, maar een stationair punt hoeft nog niet een lokaal maximum of minimum op te leveren, zoals de functie $f(x) = x^3$ laat zien (zie ook bladzijde 187).

Ook de lokale extrema van de afgeleide functie $f'(x)$ zijn bijzondere punten van de oorspronkelijke functie $f(x)$. Het zijn de *buigpunten*.

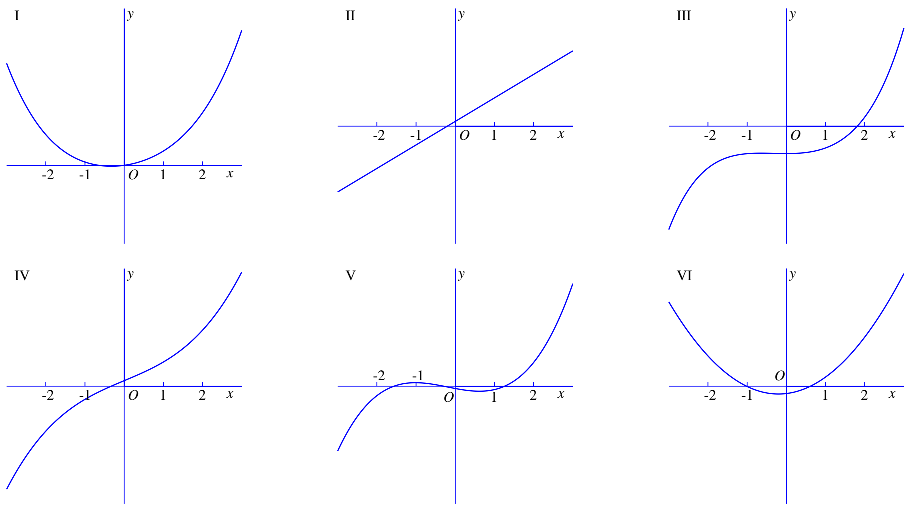
Als $f(x)$ een differentieerbare functie is, dan heet elk punt waar de afgeleide $f'(x)$ een lokaal minimum of maximum aanneemt een *buigpunt* van de functie $f(x)$.



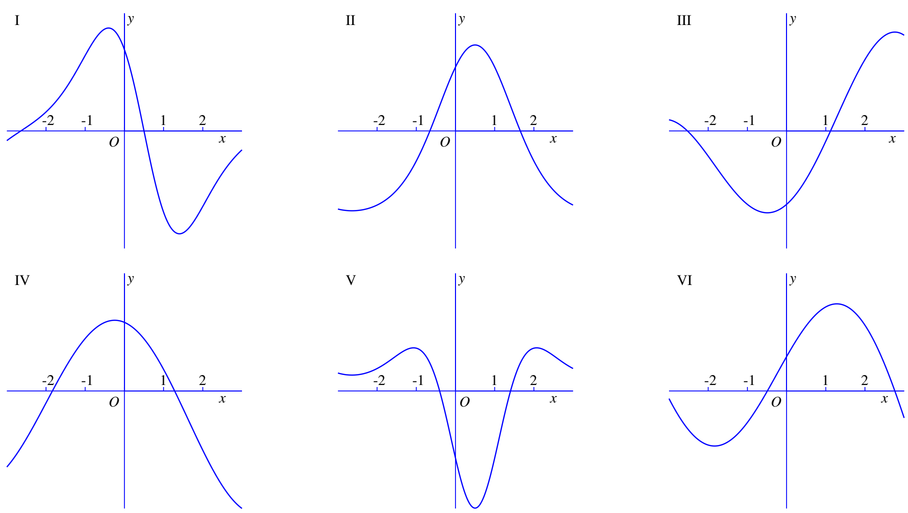
Hiernaast is als voorbeeld een grafiek van de functie $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$ getekend, samen met een grafiek van de afgeleide functie $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 - 2x + 4$ en een grafiek van de tweede afgeleide $f''(x) = 20x^3 - 30x - 2$. (Let op de schaalverdelingen op de y-as, die zijn verschillend gekozen om duidelijke plaatjes te krijgen.)
In de grafieken hebben we de lokale maxima en minima van $f(x)$ en $f'(x)$ aangegeven met de bijbehorende horizontale raaklijnen. Tevens zijn de raaklijnen getekend in de buigpunten van $f(x)$, dat wil zeggen de punten waar $f'(x)$ een lokaal maximum of minimum aanneemt. Omdat $f'(x)$ ook weer een differentieerbare functie is, geldt in die punten dus $f''(x) = 0$.
Je ziet dat de grafiek van $f(x)$ in de buigpunten de buigraaklijn doorsnijdt, en ook dat de 'bolling' van de grafiek daar als het ware omklapt. Dat correspondeert ermee dat $f''(x)$ in die punten van teken wisselt. Als $f''(x) > 0$ is, is $f'(x)$ een stijgende functie, en dan neemt de helling van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ dus toe. Als $f''(x) < 0$ is, dan is $f'(x)$ een dalende functie, en dan neemt de helling van de raaklijn dus af.

20.50 Van het polynoom $f(x) = x^5 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$ is op bladzijde 189 een grafiek getekend. Je ziet daarin drie nulpunten. Zijn er nog meer nulpunten? Zo ja, waar liggen ze ongeveer, zo nee, waarom zijn ze er niet?

20.51 Hieronder zijn in een willekeurige volgorde de grafieken getekend van twee functies $f(x)$ en $g(x)$, hun afgeleiden $f'(x)$ en $g'(x)$ en hun tweede afgeleiden $f''(x)$ en $g''(x)$. Identificeer ze.



20.52 Dezelfde vraag voor de volgende grafieken. Ook hier gaat het om twee functies $f(x)$ en $g(x)$, hun afgeleiden $f'(x)$ en $g'(x)$ en hun tweede afgeleiden $f''(x)$ en $g''(x)$. Identificeer ze.



Puzzelen met functies en hun afgeleiden

Bij het onderzoek naar eigenschappen van differentieerbare functies kunnen de afgeleiden goede diensten bewijzen. Zo is er een verband tussen stijgen en dalen van de functie en het teken (plus of min) van de afgeleide (zie de stelling op bladzijde 185). Met behulp van de nulpunten van de afgeleide kun je mogelijke extreme waarden van de functie op het spoor komen en met behulp van de nulpunten van de tweede afgeleide de mogelijke buigpunten. Op de vorige bladzijden heb je hiermee al heel wat oefensommen gemaakt.

We sluiten dit hoofdstuk af met een paar puzzelopgaven waarbij je je kennis van het verband tussen functies hun afgeleiden op een ongewone, uitdagende manier kunt toetsen. Ze staan op de tegenoverliggende bladzijde. Je zult al je speurzin nodig hebben om ze op te lossen!