Werkcollege 5

1. Bereken de partiele afgeleide van $\frac{\cos(y}{x^5 y}$ naar y.

   Het gaat hier om een quotiënt van twee functies van x en y
   De teller is $\cos(y)$ en de partiële afgeleide afgeleide naar y hiervan is gelijk aan $-\sin(y)$.
   De noemer is $x^5 y$ en de partiële afgeleide afgeleide naar y hiervan is gelijk aan x^5
   We kunnen nu bijvoorbeeld de productregel van partiële afgeleiden toepassen en krijgen als eindantwoord

   $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos(y)}{x^5 y}\right) = \frac{-\sin(y)\cdot x^5 y - \cos(y)\cdot x^5}{(x^5 y)^2} = -\frac{\sin(y)}{x^5\cdot y} - \frac{\cos(y)}{x^5\cdot y^2}$$

   We hebben hier ons eindantwoord als verschil van twee termen opgeschreven, maar je kan het ook in andere formulevormen opschrijven. Mooier is misschien we de vereenvoudiging tot

   $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos y}{x^5 y}\right) = -\frac{y\sin(y) + \cos(y)}{x^5 y^2}$$

2. Bereken de volgende partiele afgeleide van tweede orde:

   $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(xy)$$

   Oplossing

   Beschouw y constant. Dan volgt met de kettingregel voor differentiëren:

   $$\frac{\partial}{\partial x}\cos(xy) = -y\sin(xy)$$

   Beschouw y nog steeds constant en differentieer weer naar x. Je krijgt dan:

   $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(xy) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial}{\partial x}\cos(xy)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(-y\sin(xy)\big) = -y^2\cos(xy)$$

3. Bereken de volgende partiele afgeleide van tweede orde:

   $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}e^{x+y}$$

Oplossing

Merk op dat de functie $f(x, y) = e^{x+y}$ te schrijven is als een product van een functie van x en een functie van y, namelijk $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
Bij partieel differentiëren van f naar y beschouwen we x constant. Omdat de afgeleide van de exponentiële functie gelijk is aan de exponentiële functie krijgen we dan

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x+y} = e^x \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^y = e^x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} e^y\right) = e^x \cdot \frac{\partial}{\partial y} e^y = e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

4. Bekijk de functie

$$f(x, y, z) = x^4 y^2 \sin(z) - 4x$$

Welke volgorde van differentieren leidt tot het snelste resultaat wanneer

$$\frac{\partial f}{\partial x^2 \partial y^3 \partial z^2}$$

gevraagd wordt?

Oplossing

Differentieer eerst driemaal naar y en je ziet al in dat het resultaat gelijk aan 0 is.

5. Bereken de volgende partiele afgeleide

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{100} y^i x^i$$

Answer.

$$\sum_{i=1}^{100} i y^i x^{i-1}$$

6. Bereken de volgende partiele afgeleide

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{k} x_i^i$$

where $1 \leq j \leq k$.

Answer.

$$j x_j^{j-1}$$

7. Bereken de volgende partiele afgeleide

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g(x_1, \ldots, x_n)$$

met $1 \leq j \leq n$ en

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i=1}^n x_i$$

Answer.

$$\Pi_{i \neq j} x_i$$

8. Bereken een vergelijking van het raakvlak in $(-2, 2, -10)$ aan de grafiek van de functie

$$f(x, y) = xy^2 - x^2 - x$$

Oplossing

We berekenen eerst de benodigde partiële afgeleiden van

$$f(x, y) = xy^2 - x^2 - x$$

en hun waarden in $(-2, 2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(-2,2)} = y^2 - 2x - 1\Big|_{(-2,2)} = 7$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(-2,2)} = 2xy\Big|_{(-2,2)} = -8$$

Een vergelijking van het gevraagde raakvlak is

$$z = f(-2, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(-2,2)}(x + 2) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(-2,2)}(y - 2)$$

oftewel, met alle invullingen

$$z = -10 + 7 \cdot (x + 2) + -8 \cdot (y - 2)$$

Met de haakjes weggewerkt vinden we dan

$$z = 7x - 8y + 20$$

9. Bereken de tweede orde Taylor benadering $z(x, y)$ van de functie

$$f(x, y) = ln(x^2 + y^2)$$

rondom het punt $(1, 0)$.

Oplossing

De benodigde partiële afgeleiden zijn

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{2x}{y^2+x^2} \\
f_y(x,y) &= \frac{2y}{y^2+x^2} \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{2\,(y-x)\,(y+x)}{\left(y^2+x^2\right)^2} \\
f_{xy}(x,y) &= -\frac{4xy}{\left(y^2+x^2\right)^2} \\
f_{yy}(x,y) &= -\frac{2\,(y-x)\,(y+x)}{\left(y^2+x^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

We kunnen deze partiële afgeleiden uitrekenen in het punt $(1,0)$:

$$
\begin{aligned}
f_x(1,0) &= 2 \\
f_y(1,0) &= 0 \\
f_{xx}(1,0) &= -2 \\
f_{xy}(1,0) &= 0 \\
f_{yy}(1,0) &= 2
\end{aligned}
$$

Invullen van deze waarden in de algemene formule voor de kwadratische benadering geeft

$$
\begin{aligned}
z(x,y) &= \frac{2y^2-2\,(x-1)^2}{2}+2\,(x-1) \\
&= y^2-x^2+4x-3
\end{aligned}
$$

10. Bereken het gradient van de functie

$$f(x,y)=x^2y-2xy-4x^2$$

in $(0,1)$.

Oplossing

We berekenen eerst de partiële afgeleiden:

$$f_x(x, y) = 2xy - 2y - 8x \qquad \text{en} \qquad f_y(x, y) = x^2 - 2x$$

Dus in het gegeven punt:

$$f_x(0, 1) = -2 \qquad \text{en} \qquad f_y(0, 1) = 0$$

Dus is de gradiënt van $f(x, y)$ in $(0, 1)$ gelijk aan de volgende vector

$$\nabla f(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$