

Calculus

Functies

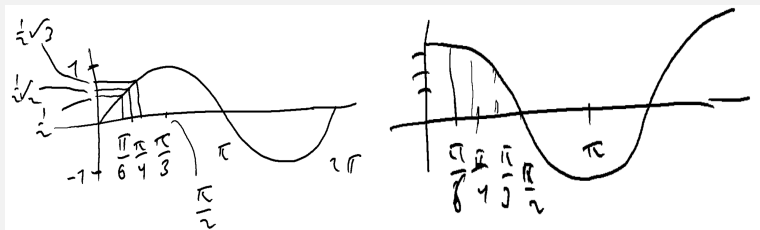
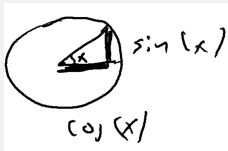
Ale Jan Homburg

Universiteit van Amsterdam, Leiden Universiteit, Imperial College London

Goniometrische functies

Sinus en Cosinus

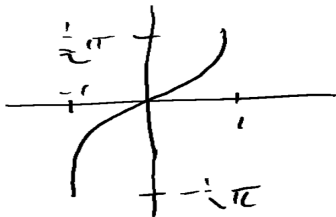
Beschouw een cirkel van straal 1 rond de oorsprong in het vlak. De sinus van x is de verticale coördinaat van de vector naar de cirkel die hoek x met de horizontale as maakt (grafiek links). De cosinus is de horizontale coördinaat (grafiek rechts).



Goniometrische functies

De inverse functies van sinus en cosinus op een domein waar een inverse bestaat, zijn arcsinus (grafiek links) en arccosinus (grafiek rechts).

Arcsinus en Arccosinus

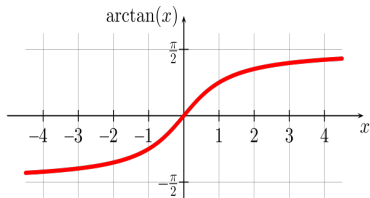
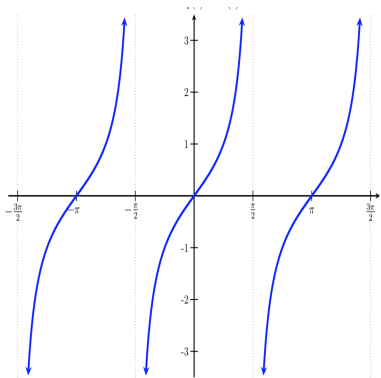


Goniometrische functies

Tangens

$$\tan(x) = \sin(x) / \cos(x)$$

De inverse functie (van tan op $(-\pi/2, \pi/2)$) is de arctangens $\arctan(x)$.



Goniometrische functies

Afgeleiden

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x),$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x),$$

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = 1/\cos^2(x),$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = 1/\sqrt{1-x^2},$$

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = -1/\sqrt{1-x^2},$$

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = 1/(1+x^2)$$

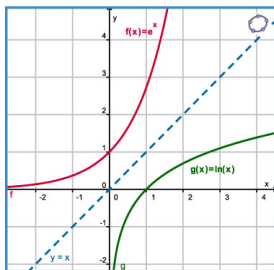
Exponentiële functies

De e -macht

$$f(x) = e^x, \quad e = 2.7182818284590452353602874\dots$$

De natuurlijke logaritme

$g(x) = \ln(x)$ is de inverse van de exponentiële functie $f(x) = e^x$.



Exponentiële functies

Afgeleiden

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, \quad g(x) = \ln(x), g'(x) = 1/x.$$

Rekenregels

$$a^x = e^{x \ln(a)}, \quad a > 0,$$

$${}^a \log(x) = \ln(x) / \ln(a), \quad a > 0,$$

$$e^{a+b} = e^a e^b,$$

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b), \quad a, b > 0.$$

Exponentiële functies

Een limiet

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) / (1/n)} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n/(n+1)} \quad (\text{De L'Hôpital}) \\ &= e.\end{aligned}$$