Calculus

Limieten

Ale Jan Homburg

Universiteit van Amsterdam, Leiden Universiteit, Imperial College London

Limieten

Laat f een functie zijn op de rëele getallen.

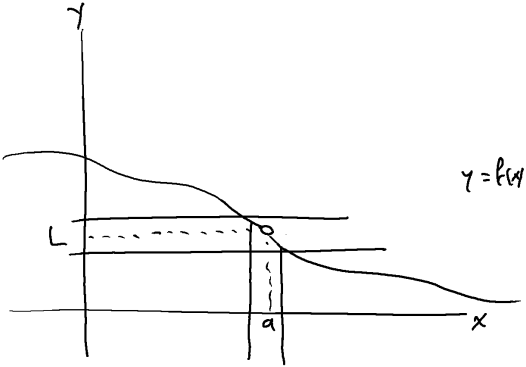
Het begrip limiet

We zeggen dat "de limiet van $f(x)$ in $x = a$ gelijk is aan L" en noteren dit als

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

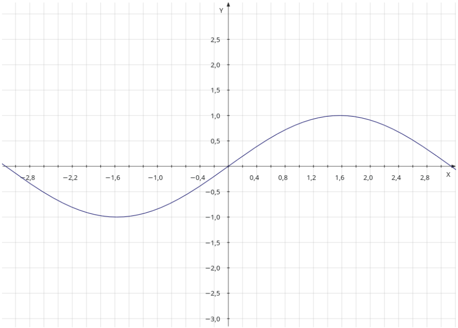
als voor ieder klein interval I rond L, er een klein interval rond a bestaat waarvan ieder punt door f binnen I wordt afgebeeld. Dus punten in de buurt van a worden door f op punten in de buurt van L afgebeeld. De functie f hoeft niet gedefinieerd te zijn in a zelf.

Limieten



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Limieten

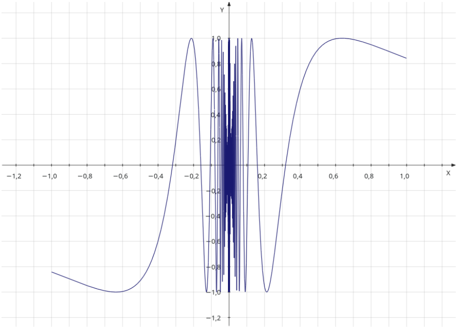


sin(*x*)

Voorbeeld

$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$:
Als we kleinere waarden van x nemen, dan komt ook $\sin(x)$ dichter bij 0.

Limieten



$sin(1/x)$

Limieten

Voorbeeld

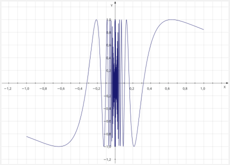
De limiet $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ bestaat niet, want

$$\sin(1/x_n) = 0 \text{ voor } x_n = 1/(n\pi)$$

en

$$\sin(1/y_n) = 1 \text{ voor } y_n = 1/(2n\pi + \tfrac{1}{2}\pi).$$

x_n en y_n zijn punten in de buurt van 0 als n een groot getal is, het is dus niet zo dat $\sin(1/x)$ naar een limietwaarde gaat als x naar 0 gaat.



Limieten

Opgave

Bereken $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^2}$

Limieten

Opgave

Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^2}$

Oplossing

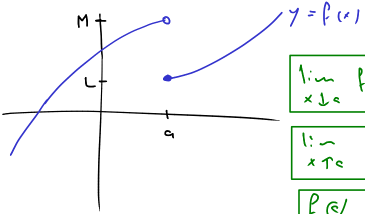
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+25}-5}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+25}+5}{\sqrt{x^2+25}+5}$$

$$((a-b)(a+b) = a^2 - b^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+25}+5)} = \frac{1}{10}$$

Limieten

Eenzijdige limieten

$\lim_{x\downarrow a} f(x) = L$ betekent dat alleen waarden $x > a$ worden meegenomen bij het bepalen van de limiet.
$\lim_{x\uparrow a} f(x) = L$ betekent dat alleen waarden $x < a$ worden meegenomen bij het bepalen van de limiet.



$$\boxed{\lim_{x\downarrow a} f(x) = L}$$

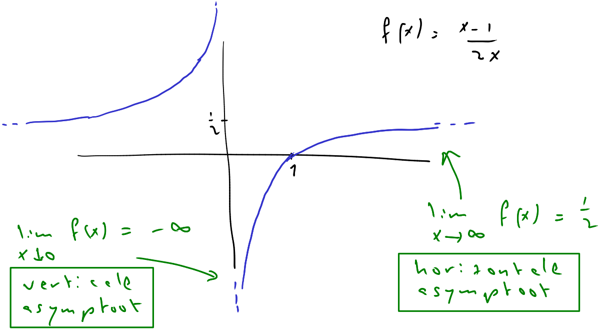
$$\boxed{\lim_{x\uparrow a} f(x) = M}$$

$$\boxed{f(a) = L}$$

Limieten

Limiet naar oneindig

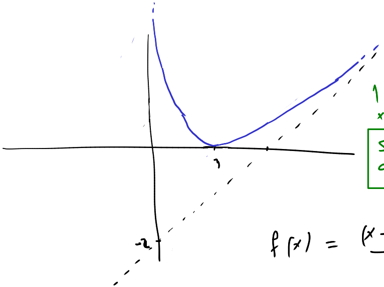
We noteren $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ als voor ieder klein interval I rond L, er een groot getal N is zodat ieder getal groter dan N binnen I wordt afgebeeld. Dus grote waarden worden door f op punten in de buurt van L afgebeeld.



Limieten

Limiet naar oneindig

f heeft een scheve asymptoot $y = ax + b$ bij $+\infty$, als $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax - b = 0$.



$\lim_{x\to\infty} f(x) - (x-2) = 0$

$\boxed{\text{scheve asymptoot}}$

$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x} = x - 2 + \frac{1}{x}$

Limieten

Opgave

Bepaal de scheve asymptoot voor $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)/x$, $x \to \infty$.

Limieten

Opgave

Bepaal de scheve asymptoot voor $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)/x$, $x \to \infty$.

Oplossing

$$y = mx + n :$$

Limieten

Opgave

Bepaal de scheve asymptoot voor $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)/x$, $x \to \infty$.

Oplossing

$$y = mx + n:$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 2 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 2$$

Limieten

Opgave

Bepaal de scheve asymptoot voor $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)/x$, $x \to \infty$.

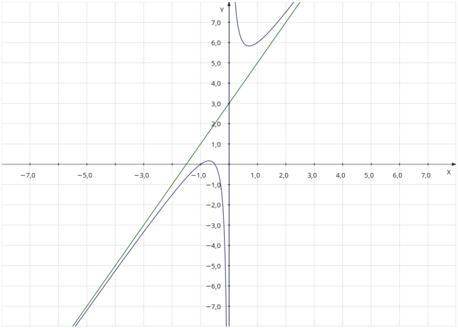
Oplossing

$$y = mx + n:$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 2 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x + 1}{x} - 2x \right) = 3$$

Limieten



$f(x) = (2x^2 + 3x + 1)/x$

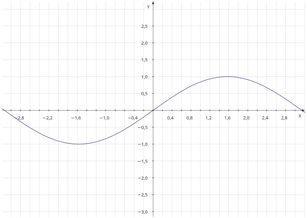
Limieten

Stelling (Regel van De L'Hôpital)

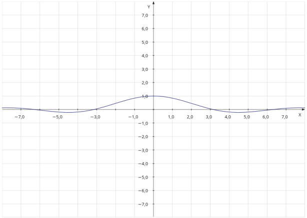
Stel dat $f(x)$ en $g(x)$ functies zijn waarvoor de afgeleiden in de buurt van een punt $x = a$ bestaan en ook $g'(x) \neq 0$ voor $x \neq a$ maar wel in de buurt van a.
Veronderstel verder dat $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ of $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.
Dan geldt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Limieten

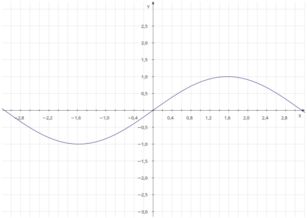


$sin(x)$

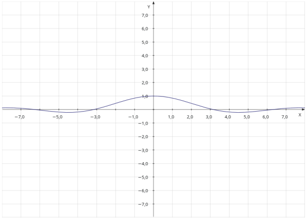


$sin(x)/x$

Limieten



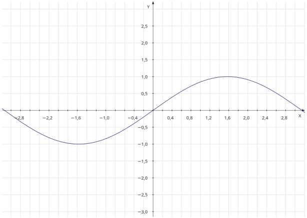
$sin(x)$



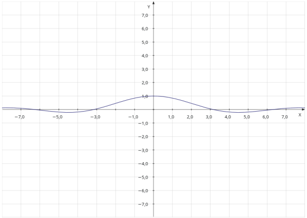
$sin(x)/x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} =$$

Limieten



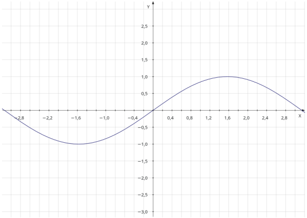
$sin(x)$



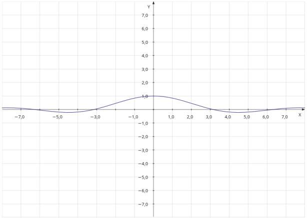
$sin(x)/x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \text{"}0/0\text{"} : \text{(De L'Hopital)} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1}$$

Limieten



$sin(x)$



$sin(x)/x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \text{"}0/0\text{"} : \text{(De L'Hopital)} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Limieten

Opgave

Bereken

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(5x)}{x^2 - \pi^2}$$

Limieten

Opgave

Bereken

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(5x)}{x^2 - \pi^2}$$

Oplossing

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(5x)}{x^2 - \pi^2} = \text{"}0/0\text{"} \text{ : De L'Hopital}$$

Limieten

Opgave

Bereken

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(5x)}{x^2 - \pi^2}$$

Oplossing

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(5x)}{x^2 - \pi^2} = \lim_{x \to \pi} \frac{5\cos(5x)}{2x}$$

Limieten

Opgave

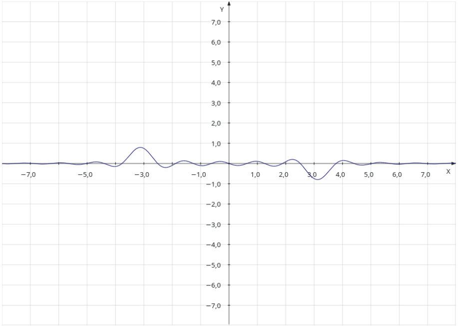
Bereken

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(5x)}{x^2 - \pi^2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(5x)}{x^2 - \pi^2} &= \lim_{x \to \pi} \frac{5\cos(5x)}{2x} \\ &= -\frac{5}{2\pi}. \end{aligned}$$

Limieten



$\sin(5x)/(x^2 - \pi^2)$

Limieten

Kleine o

$f(x) = o(g(x))$ voor $x \to \infty$ als

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Limieten

Stelling

$\ln(n) = o(n)$ als $n \to \infty$.

De logaritme $\ln(n)$ gaat langzamer naar oneindig dan n.

Limieten

Stelling

$\ln(n) = o(n)$ als $n \to \infty$.

De logaritme $\ln(n)$ gaat langzamer naar oneindig dan n.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} =$$

Limieten

Stelling

$\ln(n) = o(n)$ als $n \to \infty$.

De logaritme $\ln(n)$ gaat langzamer naar oneindig dan n.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \text{(De L'Hopital)} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1}$$

Limieten

Stelling

$\ln(n) = o(n)$ als $n \to \infty$.

De logaritme $\ln(n)$ gaat langzamer naar oneindig dan n.

Bewijs

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{n} = \text{(De L'Hopital)} \lim_{n \to \infty} \frac{1/n}{1}$$
$$= 0.$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0$, $\ln(n)^k = o(n^\alpha)$ als $n \to \infty$.

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0$, $\ln(n)^k = o(n^\alpha)$ als $n \to \infty$.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)^k}{n^\alpha} =$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0$, $\ln(n)^k = o(n^\alpha)$ als $n \to \infty$.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)^k}{n^\alpha} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\alpha/k}}\right)^k$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0$, $\ln(n)^k = o(n^\alpha)$ als $n \to \infty$.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)^k}{n^\alpha} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\alpha/k}}\right)^k$$

$$= \text{(De L'Hopital)} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{(\alpha/k)n^{\alpha/k-1}}\right)^k$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0$, $\ln(n)^k = o(n^\alpha)$ als $n \to \infty$.

Bewijs

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)^k}{n^\alpha} &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\alpha/k}}\right)^k \\
&= \text{(De L'Hopital)} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{(\alpha/k)n^{\alpha/k-1}}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{(\alpha/k)n^{\alpha/k}}\right)^k
\end{aligned}$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0$, $\ln(n)^k = o(n^\alpha)$ als $n \to \infty$.

Bewijs

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)^k}{n^\alpha} &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\alpha/k}} \right)^k \\
&= \textcolor{red}{\text{(De L'Hopital)}} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{(\alpha/k) n^{\alpha/k - 1}} \right)^k \\
&= \left(\frac{1}{(\alpha/k) n^{\alpha/k}} \right)^k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0,\ n^k = o(e^n)$ als $n \to \infty$.

De e-macht e^n gaat sneller naar oneindig dan elke macht van n.

Limieten

Stelling

$\forall\alpha, k > 0,\ n^k = o(e^n)$ als $n \to \infty$.

De e-macht e^n gaat sneller naar oneindig dan elke macht van n.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^n} =$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0,\ n^k = o(e^n)$ als $n \to \infty$.

De e-macht e^n gaat sneller naar oneindig dan elke macht van n.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^n} = \text{(De L'Hopital } k \text{ keer)} \lim_{n\to\infty} \frac{k!}{e^n}$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0,\ n^k = o(e^n)$ als $n \to \infty$.

De e-macht e^n gaat sneller naar oneindig dan elke macht van n.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^n} = \text{(De L'Hopital } k \text{ keer)} \lim_{n\to\infty} \frac{k!}{e^n}$$
$$= 0.$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0,\ n^k = o((1+\alpha)^n)$ als $n \to \infty$.

Limieten

Stelling

$\forall\alpha, k > 0,\ n^k = o((1+\alpha)^n)$ als $n \to \infty$.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+\alpha)^n} =$$

Limieten

Stelling

$\forall\alpha, k > 0,\ n^k = o((1+\alpha)^n)$ als $n \to \infty$.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+\alpha)^n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\alpha)^{n/k}}\right)^k$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0,\ n^k = o((1+\alpha)^n)$ als $n \to \infty$.

Bewijs

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+\alpha)^n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\alpha)^{n/k}}\right)^k$$

$$\text{(De L'Hopital)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n/k)(1+\alpha)^{n/k-1}}\right)^k$$

Limieten

Stelling

$\forall \alpha, k > 0,\; n^k = o((1+\alpha)^n)$ als $n \to \infty$.

Bewijs

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(1+\alpha)^n} &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\alpha)^{n/k}} \right)^k \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n/k)(1+\alpha)^{n/k-1}} \right)^k \\
&= 0.
\end{aligned}
$$