Calculus

Afgeleiden

Ale Jan Homburg

Universiteit van Amsterdam, Leiden Universiteit, Imperial College London

Afgeleiden

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn gedefinieerd op een domein $D \subset \mathbb{R}$. Laat $a \in D$.

Afgeleiden

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn gedefinieerd op een domein $D \subset \mathbb{R}$. Laat $a \in D$.

Afgeleide

De afgeleide van f in a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Afgeleiden

Laat $f : D \to \mathbb{R}$ een functie zijn gedefinieerd op een domein $D \subset \mathbb{R}$. Laat $a \in D$.

Afgeleide

De afgeleide van f in a:

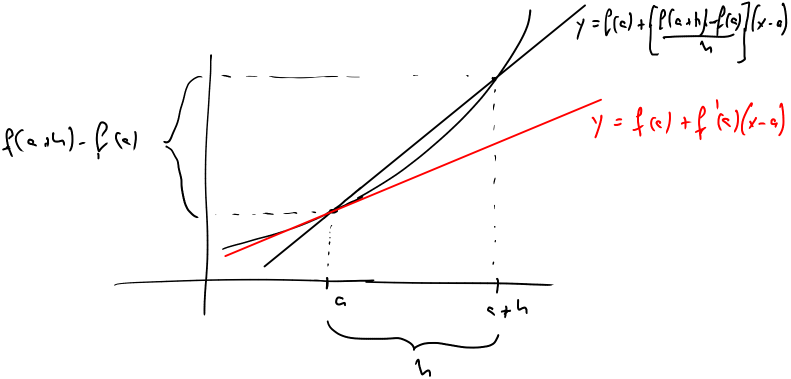
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Raaklijn

De vergelijking van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$ is

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Limieten



Afgeleiden

Productregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Afgeleiden

Productregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotiëntregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Afgeleiden

Productregel

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Quotiëntregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettingregel

$$(f\circ g)'(x) = \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

Afgeleiden

Afgeleide exponentiële functie, natuurlijke logaritme

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

Afgeleiden

Afgeleide exponentiële functie, natuurlijke logaritme

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

Exponentiële functie, logaritme met algemeen grondtal

$$a^x = e^{x\ln(a)} \ (a > 0), \quad \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \ (b > 0)$$

Afgeleiden

Afgeleide exponentiële functie, natuurlijke logaritme

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

Exponentiële functie, logaritme met algemeen grondtal

$$a^x = e^{x\ln(a)} \ (a > 0), \quad \log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \ (b > 0)$$

Afgeleide machtsfunctie, logaritme

$$\frac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x \ (a > 0), \quad \frac{d}{dx}\log_b(x) = \frac{1}{\ln(b)}\frac{1}{x} \ (b > 0)$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \log_{10}(x^2)$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \log_{10}(x^2)$

Oplossing

De afgeleide van $x \mapsto \log_{10}(x)$ is $\frac{1}{\ln(10)}\frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(10)}\frac{1}{x^2}2x = \frac{1}{\ln(10)}\frac{2}{x}$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

Oplossing

Schrijf $x^{\sqrt{x}} = e^{\ln(x)\sqrt{x}}$

$$f'(x) = e^{\ln(x)\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x}\sqrt{x} + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = x^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{2}\ln(x) \right)$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \arctan(x)$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \arctan(x)$

Oplossing

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \ln(x/(1-x))$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = \ln(x/(1-x))$

Oplossing

$$f'(x) = \frac{1-x}{x}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)}$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^x/(1 + e^x)$

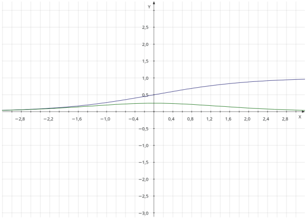
Afgeleiden

Opgave

Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^x/(1+e^x)$

Oplossing

$$f'(x) = e^x/(1+e^x)^2$$



Afgeleiden

Hogere orde afgeleiden

De tweede orde afgeleide $f''(x)$ is de afgeleide van $f'(x)$.
De n-de orde afgeleide is de afgeleide van de $(n-1)$-orde afgeleide.

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = xe^x$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = xe^x$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = xe^x$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$$f'(x) = e^x + xe^x$$
$$f''(x) = 2e^x + xe^x$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = xe^x$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$$f'(x) = e^x + xe^x$$
$$f''(x) = 2e^x + xe^x$$
$$f'''(x) = 3e^x + xe^x$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = xe^x$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + xe^x \\ f''(x) &= 2e^x + xe^x \\ f'''(x) &= 3e^x + xe^x \\ f^{(n)}(x) &= ne^x + xe^x \end{aligned}$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = 2xe^{2x}$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$f(x) = ye^y$ met $y(x) = 2x$. Dus bijvoorbeeld $f'(x) = (e^y + ye^y)2$, $f''(x) = (2e^y + ye^y)2^2$, $\dots$, $f^{(n)}(x) = (ne^y + ye^y)2^n$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x}$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = 2xe^{2x}$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$f(x) = ye^y$ met $y(x) = 2x$. Dus bijvoorbeeld $f'(x) = (e^y + ye^y)2$, $f''(x) = (2e^y + ye^y)2^2$, ..., $f^{(n)}(x) = (ne^y + ye^y)2^n$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x}$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = 2xe^{2x}$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$f(x) = ye^y$ met $y(x) = 2x$. Dus bijvoorbeeld $f'(x) = (e^y + ye^y)2$, $f''(x) = (2e^y + ye^y)2^2$, …, $f^{(n)}(x) = (ne^y + ye^y)2^n$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x}$$
$$f''(x) = 8e^{2x} + 8xe^{2x}$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = 2xe^{2x}$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$f(x) = ye^y$ met $y(x) = 2x$. Dus bijvoorbeeld $f'(x) = (e^y + ye^y)2$, $f''(x) = (2e^y + ye^y)2^2$, ..., $f^{(n)}(x) = (ne^y + ye^y)2^n$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x}$$
$$f''(x) = 8e^{2x} + 8xe^{2x}$$
$$f'''(x) = 24e^{2x} + 16xe^{2x}$$

Afgeleiden

Opgave

Bepaal de eerste, tweede en derde afgeleide van $f(x) = 2xe^{2x}$.
Probeer in een opvolgende afgeleiden een patroon te ontdekken zodat je ook een formule voor de n-de afgeleide kunt geven.

Oplossing

$f(x) = ye^y$ met $y(x) = 2x$. Dus bijvoorbeeld $f'(x) = (e^y + ye^y)2$, $f''(x) = (2e^y + ye^y)2^2$, ..., $f^{(n)}(x) = (ne^y + ye^y)2^n$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x}$$
$$f''(x) = 8e^{2x} + 8xe^{2x}$$
$$f'''(x) = 24e^{2x} + 16xe^{2x}$$
$$f^{(n)}(x) = 2^n(ne^{2x} + 2xe^{2x})$$

Stijgen en dalen

$$\begin{aligned} \text{de grafiek van } f(x) \text{ is stijgend op } I &\iff f'(x) > 0 \\ \text{de grafiek van } f(x) \text{ is dalend op } I &\iff f'(x) < 0 \\ \text{de grafiek van } f(x) \text{ is stationair op } I &\iff f'(x) = 0 \end{aligned}$$

Lokale extrema

Als $f'(a) = 0$ en het teken van $f'(x)$ verandert in $x = a$ van positief naar negatief, dan heeft $f(x)$ een lokaal maximum in $x = a$.
Als $f'(a) = 0$ en het teken van $f'(x)$ verandert in $x = a$ van negatief naar positief, dan heeft $f(x)$ een lokaal minimum in $x = a$.

Het tweede afgeleide criterium

De functie $f(x)$ heeft een lokaal maximum in $x = a$ als $f'(a) = 0$ en $f''(a) < 0$.
De functie $f(x)$ heeft een lokaal minimum als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$.

Opgave

Bepaal alle stationaire punten van de veeltermfunctie

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Opgave

Bepaal alle stationaire punten van de veeltermfunctie

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Oplossing

We berekenen de eerste afgeleide van $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

Om alle stationaire punten van $f(x)$ te vinden beginnen we met het oplossen van de vergelijking $f'(x) = 0$. Met de *abc*-formule:

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times -1}}{2 \times 3} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$$

Bij benadering zijn de stationaire punten dus $x_1 \approx -0.22$ en $x_2 \approx 1.55$.

Opgave

Bepaal alle stationaire punten van de veeltermfunctie

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Oplossing

We berekenen de tweede afgeleide van $f(x)$:

$$f''(x) = 6x - 4$$

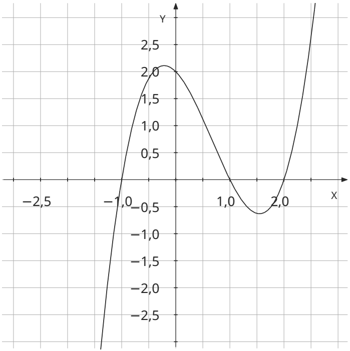
$$f''\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) = -2\sqrt{7} < 0 \implies x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \text{ is een lokaal maximum}$$

$$f''\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}\right) = 2\sqrt{7} > 0 \implies x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \text{ is een lokaal minimum}$$

Opgave

Bepaal alle stationaire punten van de veeltermfunctie

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$



Buigpunt

De functie $f(x)$ heeft een buigpunt in $x = a$ als $f''(a) = 0$ en $f'''(a) \neq 0$. Hier verandert de grafiek van convex (f'' is positief) naar concaaf (f'' is negatief) of omgekeerd.

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x = 2$ heeft een buigpunt in $x_3 = 2/3$ waar $f''(2/3) = 0$ en $f'''(2/3) = 6 \neq 0$.

Stelling van Taylor

Veronderstel dat de functie f tenminste $k+1$ keer differentieerbaar is. Dan is

$$f(x) = T_k(x) + R_k(x)$$

met

$$T_k(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2 + \cdot + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)\cdot(x-a)^k$$

een veeltermfunctie van graad k en

$$R_k(x) = \frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)\cdot(x-a)^{k+1}$$

voor een of andere ξ die tussen a en x in ligt en van x afhangt.
De veelterm T_k heet de **Taylorveelterm rondom** a **van graad** k.

Taylor benaderingen

Taylorbenaderingen van $f(x)$ rond $x = 0$:

1. Eerste orde: $T_1(x) = f(0) + f'(0)x$,
2. Tweede orde: $T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$,
3. Derde orde: $T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3$,
4. k-de orde:
   $T_k(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$.

Opgave

Geef de tweede orde Taylorbenadering van $f(x) = \ln(1 + ax)$ rond $x = 0$

Opgave

Geef de tweede orde Taylorbenadering van $f(x) = \ln(1 + ax)$ rond $x = 0$

Oplossing

Bereken $f'(x) = \frac{a}{1+ax}$ en $f''(x) = -\frac{a^2}{(1+ax)^2}$.
Dus $f(0) = 0$, $f'(0) = a$, $f''(0) = -a^2$.

Opgave

Geef de tweede orde Taylorbenadering van $f(x) = \ln(1 + ax)$ rond $x = 0$

Oplossing

Bereken $f'(x) = \frac{a}{1+ax}$ en $f''(x) = -\frac{a^2}{(1+ax)^2}$.
Dus $f(0) = 0$, $f'(0) = a$, $f''(0) = -a^2$.
De tweede orde Taylorbenadering is

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

Opgave

Geef de tweede orde Taylorbenadering van $f(x) = \ln(1+ax)$ rond $x = 0$

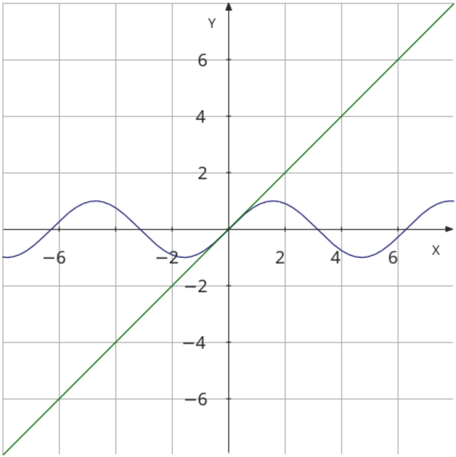
Oplossing

Bereken $f'(x) = \frac{a}{1+ax}$ en $f''(x) = -\frac{a^2}{(1+ax)^2}$.
Dus $f(0) = 0$, $f'(0) = a$, $f''(0) = -a^2$.
De tweede orde Taylorbenadering is

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \\ &= ax - \frac{1}{2}a^2x^2 \end{aligned}$$

Voorbeeld

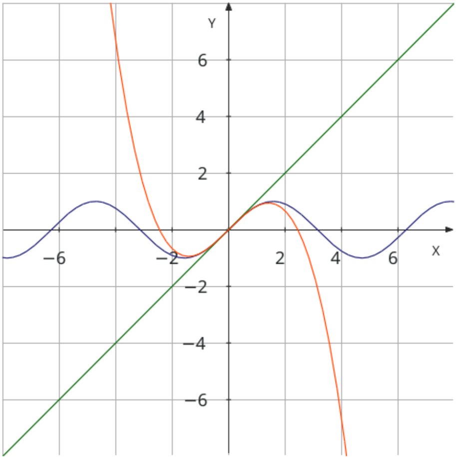
$f(x) = \sin(x)$



$T_1(x) = x$

Voorbeeld

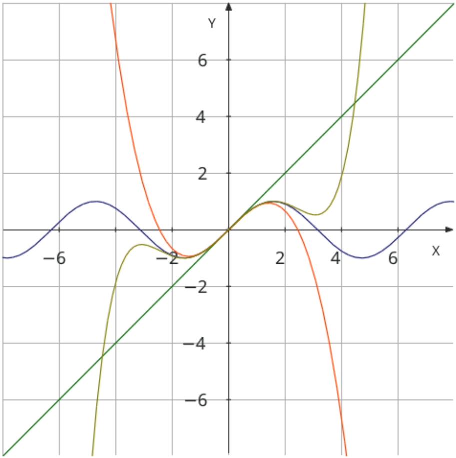
$f(x) = \sin(x)$



$T_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$

Voorbeeld

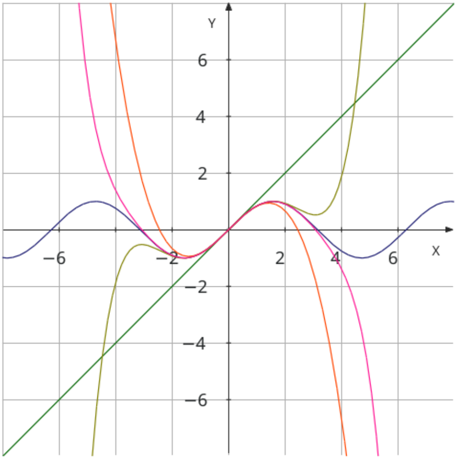
$f(x) = \sin(x)$



$$T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Voorbeeld

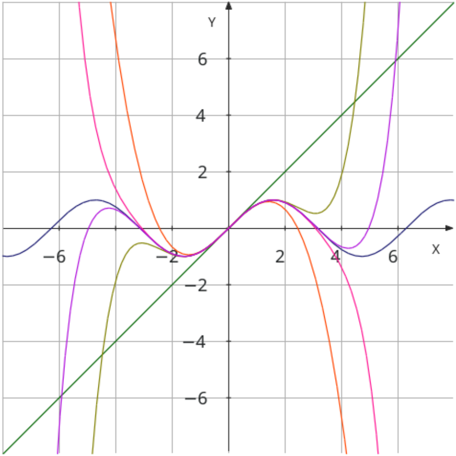
$f(x) = \sin(x)$



$$T_7(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

Voorbeeld

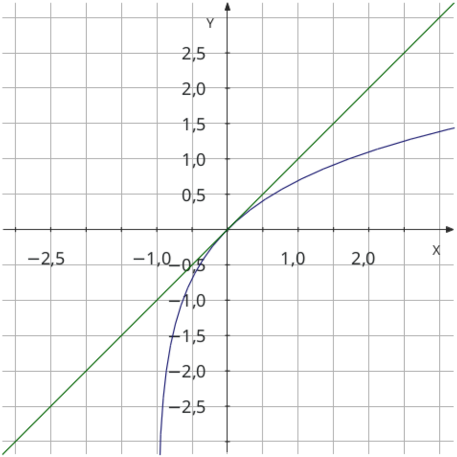
$f(x) = \sin(x)$



$$T_9(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$$

Voorbeeld

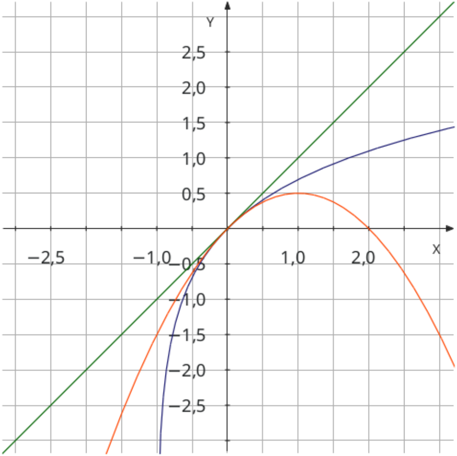
$f(x) = \ln(1 + x)$ (alleen gedefineerd voor $x > -1$)



$T_1(x) = x$

Voorbeeld

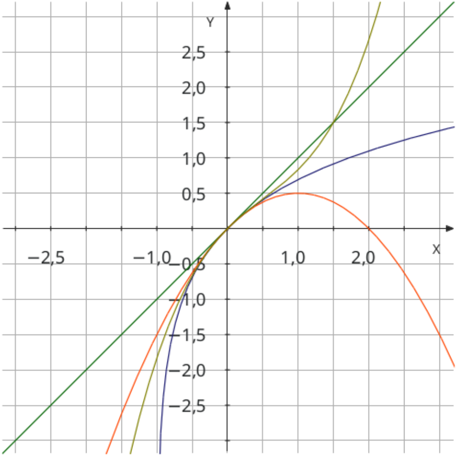
$f(x) = \ln(1 + x)$ (alleen gedefineerd voor $x > -1$)



$T_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$

Voorbeeld

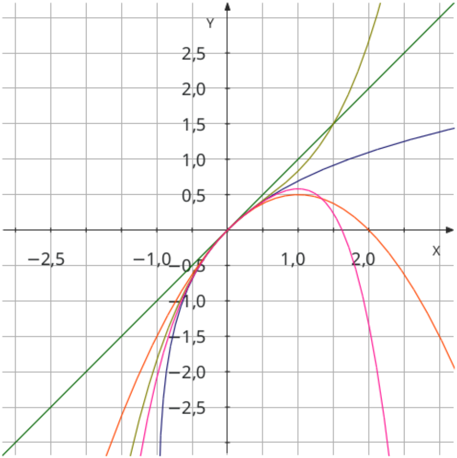
$f(x) = \ln(1 + x)$ (alleen gedefineerd voor $x > -1$)



$T_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

Voorbeeld

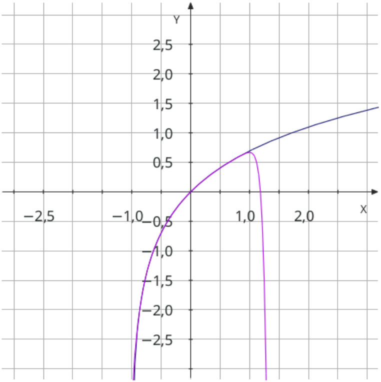
$f(x) = \ln(1 + x)$ (alleen gedefineerd voor $x > -1$)



$T_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

Voorbeeld

$f(x) = \ln(1+x)$ (alleen gedefineerd voor $x > -1$)



$T_{20}(x) = x - -\frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{20}x^{20} = \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{i}(-1)^{i+1}x^i$
Convergentie van de Taylor reeks is alleen op $(-1, 1)$