Calculus

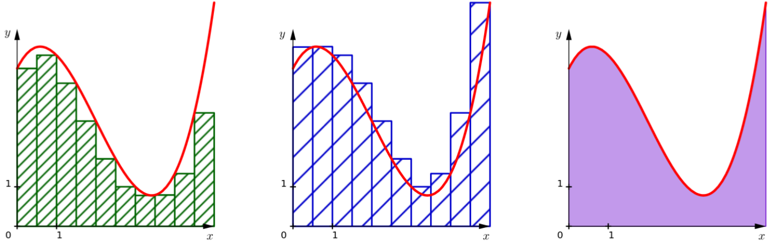
Integreren

Ale Jan Homburg

Universiteit van Amsterdam, Leiden Universiteit, Imperial College London

Definitie integraal

$\int_a^b f(x)\,dx =$ de limiet van $\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta$ als $N \to \infty$ met
$\Delta = (b-a)/N$ en $x_i \in [a+(i-1)\Delta, a+i\Delta]$

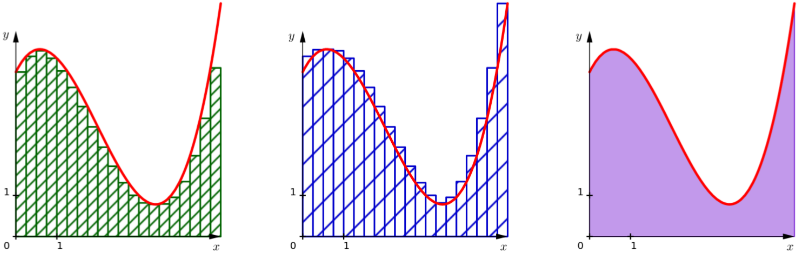


Ondersom : $s_{10} = 11.56$ *Bovensom* : $S_{10} = 16.15$ *Integraal* : $\int_0^5 f(x)dx = 13.75$

$N = 10$

Definitie integraal

$\int_a^b f(x)\,dx =$ de limiet van $\sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta$ als $N \to \infty$ met
$\Delta = (b-a)/N$ en $x_i \in [a+(i-1)\Delta, a+i\Delta]$

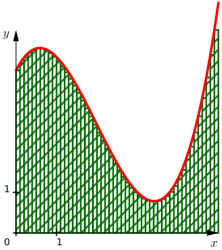


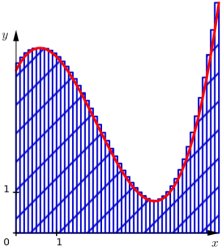
$Ondersom: s_{20} = 12.63$ $Bovensom: S_{20} = 14.92$ $Integraal: \int_0^5 f(x)dx = 13.75$

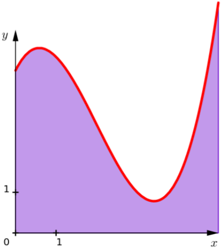
$N = 20$

Definitie integraal

$\int_a^b f(x)\,dx =$ de limiet van $\sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta$ als $N \to \infty$ met
$\Delta = (b-a)/N$ en $x_i \in [a + (i-1)\Delta, a + i\Delta]$







$Ondersom: s_{50} = 13.29$ $Bovensom: S_{50} = 14.21$ $Integraal: \int_0^5 f(x)dx = 13.75$

$N = 50$

Voorbeeld

Interpretatie: $\int_a^b f(x)\,dx$ is $b-a$ keer de gemiddelde waarde van f op $[a,b]$. Als $f \geq 0$ dan is $\int_a^b f(x)\,dx$ de oppervlakte onder de grafiek van f.

Voorbeeld

Als $p(x)$ een kansdichtheid is, dan is $\int_a^b p(x)\,dx$ de kans op een waarde tussen a en b.

Voorbeeld

Als $m(x)$ een massadichtheid is, dan is $\int_a^b m(x)\,dx$ de totale massa tussen a en b.

Voorbeeld

De kromme die de grafiek van f is, heeft tussen $f(a)$ en $f(b)$ een lengte $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Primitieve functie

Een primitieve functie van $f(x)$ is een functie $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$

Hoofdstelling van de analyse

Elke continue functie $f(x)$ op een interval I heeft een primitieve functie
Als $F(x)$ een primitieve functie van $f(x)$ op I is, dan geldt voor a, b in I

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Hoofdstelling van de analyse

Als $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, dan geldt

$$F'(x) = f(x)$$

1. $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. $$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{voor elke constante } c.$$

3. $$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

4. $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad \text{voor alle } a, b, c \text{ in } I.$$

5. $$\int_a^b f(x)\,dx = c\int_{a/c}^{b/c} f(c\cdot x)\,dx \quad \text{voor elke constante } c \neq 0.$$

Functie	*Primitieve*	
x^p	$\frac{1}{p+1}x^{p+1}$	mits $p \neq -1$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln(\lvert x+a \rvert)$	
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$	voor elke $a > 0,\ a \neq 1$
e^x	e^x	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	

Opgave

Bepaal a zodat $\int_0^{a^2} \sqrt{x}\, dx = 1$

Opgave

Bepaal a zodat $\int_0^{a^2} \sqrt{x}\, dx = 1$

Oplossing

$$\int_0^{a^2} \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^{a^2}$$
$$= \frac{2}{3} a^3$$

Opgave

Bepaal a zodat $\int_0^{a^2} \sqrt{x}\, dx = 1$

Oplossing

$$\begin{aligned}\int_0^{a^2} \sqrt{x}\, dx &= \frac{2}{3} x\sqrt{x}\Big|_0^{a^2} \\ &= \frac{2}{3} a^3\end{aligned}$$

Dus $\frac{2}{3}a^3 = 1$ geeft $a = \sqrt[3]{3/2}$

Differentiaal

$$\text{Als } y = f(t), \ \text{dan is } dy = f'(t)\,dt$$

Het rechterlid $f'(t)\,dt$ heet de **differentiaal van f** en men gebruikt hiervoor de notaties dy, df en $d\big(f(t)\big)$

Notatie primitieve

We schrijven wel

$$\int f(x)\,dx$$

(zonder expliciete grenzen) voor een primitieve van f

Substitutieregel

$$\begin{aligned}\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx &= [u = g(x), du = g'(x)\,dx] \\ &= \int f(u)\,du \\ &= F(u) + c \\ &= F\big(g(x)\big) + c\end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\int \frac{z}{z^2+3}\,dz$

Opgave

Bereken $\int \frac{z}{z^2+3}\,dz$

Oplossing

$$\int \frac{z}{z^2+3}\,dz = \int \frac{1}{z^2+3}\cdot z\,dz = \int \frac{1}{u}\frac{1}{2}\,du$$

substitutieregel met $u = z^2 + 3$ en $du = 2z\,dz$

Opgave

Bereken $\displaystyle\int \frac{z}{z^2+3}\,dz$

Oplossing

$$\int \frac{z}{z^2+3}\,dz = \int \frac{1}{z^2+3}\cdot z\,dz = \int \frac{1}{u}\frac{1}{2}\,du$$

substitutieregel met $u = z^2+3$ en $du = 2z\,dz$

$$= \frac{1}{2}\ln(u) + c$$

primitieve van de integrand

Opgave

Bereken $\displaystyle\int \frac{z}{z^2+3}\,dz$

Oplossing

$$\int \frac{z}{z^2+3}\,dz = \int \frac{1}{z^2+3}\cdot z\,dz = \int \frac{1}{u}\frac{1}{2}\,du$$

substitutieregel met $u = z^2 + 3$ en $du = 2z\,dz$

$$= \frac{1}{2}\ln(u) + c$$

primitieve van de integrand

$$= \frac{1}{2}\ln\left(z^2+3\right) + c$$

terugsubstitutie

Opgave

Bereken $\displaystyle\int_0^3 \frac{z}{z^2+3}\,dz$

Opgave

Bereken $\int_0^3 \frac{z}{z^2+3}\,dz$

Oplossing één

$$\int_0^3 \frac{z}{z^2+3}\,dz = \frac{1}{2}\ln\left(z^2+3\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}(\ln(12)-\ln(3)) = \frac{1}{2}\ln(4) = \ln(2)$$

Opgave

Bereken $\displaystyle\int_0^3 \frac{z}{z^2+3}\,dz$

Oplossing één

$$\int_0^3 \frac{z}{z^2+3}\,dz = \frac{1}{2}\ln\left(z^2+3\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}(\ln(12)-\ln(3)) = \frac{1}{2}\ln(4) = \ln(2)$$

Oplossing twee

$$\int_0^3 \frac{z}{z^2+3}\,dz = \int_3^{12} \frac{1}{2u}\,du = \frac{1}{2}\ln\left(u\right)\Big|_3^{12} = \ln(2)$$

substitutie $u = z^2+3$, $du = 2z\,dz$,
$\{z=0\} \equiv \{u=3\}$, $\{z=3\} \equiv \{u=12\}$

Partiële integratie

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Als $u = f(x)$ en $v = g(x)$ en dus $du = f'(x)\,dx$ en $dv = g'(x)\,dx$, dan kan bovenstaande regel ook opgeschreven worden als

Partiële integratie in termen van differentialen

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Opgave

Bereken de volgende integraal via partiële integratie:

$$\int x \cos x \, dx$$

Opgave

Bereken de volgende integraal via partiële integratie:

$$\int x \cos x \, dx$$

Oplossing

$$\begin{array}{llll} \textit{keuze 1}: & u = \cos x & \text{en} & dv = x\,dx \\ \textit{keuze 2}: & u = x & \text{en} & dv = \cos x\,dx \end{array}$$

Opgave

Bereken de volgende integraal via partiële integratie:

$$\int x \cos x \, dx$$

Oplossing

Keuze 1: $u = \cos x$ en $dv = x\,dx$: dan geldt $du = -\sin x\,dx$ en $v = \int dv = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$

Opgave

Bereken de volgende integraal via partiële integratie:

$$\int x \cos x \, dx$$

Oplossing

Keuze 1: $u = \cos x$ en $dv = x\,dx$: dan geldt $du = -\sin x\,dx$ en $v = \int dv = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$

$$\int x \cos x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cos x + \int \tfrac{1}{2}x^2 \sin x \, dx$$

toepassing van de regel voor partiële integratie

Opgave

Bereken de volgende integraal via partiële integratie:

$$\int x \cos x \, dx$$

Oplossing

Keuze 1: $u = \cos x$ en $dv = x\,dx$: dan geldt $du = -\sin x\,dx$ en $v = \int dv = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$

$$\int x \cos x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cos x + \int \tfrac{1}{2}x^2 \sin x \, dx$$

toepassing van de regel voor partiële integratie

dit heeft niet geholpen

Opgave

Bereken de volgende integraal via partiële integratie:

$$\int x \cos x \, dx$$

Oplossing

Keuze 2: $u = x$ en $dv = \cos x \, dx$: dan geldt $du = dx$ en $v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x$.

Opgave

Bereken de volgende integraal via partiële integratie:

$$\int x \cos x \, dx$$

Oplossing

Keuze 2: $u = x$ en $dv = \cos x \, dx$: dan geldt $du = dx$ en $v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x$.

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

toepassing van de regel voor partiële integratie

Opgave

Bereken de volgende integraal via partiële integratie:

$$\int x \cos x \, dx$$

Oplossing

Keuze 2: $u = x$ en $dv = \cos x \, dx$: dan geldt $du = dx$ en $v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x$.

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

toepassing van de regel voor partiële integratie

$$= x \sin x + \cos x + c$$

standaardintegraal van sinus

Opgave

Bereken $\int \left(3z^2 - 1\right)\left(z^3 - z\right)^4 \, dz$

Opgave

Bereken $\int \left(3z^2 - 1\right) \left(z^3 - z\right)^4 \, dz$

Oplossing

$$\int \left(3z^2 - 1\right) \left(z^3 - z\right)^4 \, dz = \int u^4 \, du$$

substitutie $u = z^3 - z, du = \left(3z^2 - 1\right) dz$

Opgave

Bereken $\int \left(3z^2 - 1\right) \left(z^3 - z\right)^4 \, dz$

Oplossing

$$\int \left(3z^2 - 1\right) \left(z^3 - z\right)^4 \, dz = \int u^4 \, du$$

substitutie $u = z^3 - z, du = \left(3z^2 - 1\right) dz$

$$= \frac{u^5}{5} + c$$

primitieve van de integrand

Opgave

Bereken $\int \left(3z^2-1\right)\left(z^3-z\right)^4 \, dz$

Oplossing

$$\int \left(3z^2-1\right)\left(z^3-z\right)^4 \, dz = \int u^4 \, du$$

substitutie $u = z^3 - z, du = \left(3z^2-1\right) dz$

$$= \frac{u^5}{5} + c$$

primitieve van de integrand

$$= \frac{\left(z^3-z\right)^5}{5} + c$$

terugsubstitutie

Opgave

Bereken $\int \ln(x)\, dx$

Opgave

Bereken $\int \ln(x)\,dx$

Oplossing

Als $u = \ln(x)$ en $dv = 1\,dx$, dan $du = \frac{1}{x}dx$ en $v = \int dv = \int 1\,dx = x$.

$$\int \ln(x)\,dx = \left[\int u\,dv = uv - \int v\,du\right]$$

partiële integratie in termen van differentialen

Opgave

Bereken $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$

Oplossing

Als $u = \ln(x)$ en $dv = 1\,dx$, dan $du = \frac{1}{x}dx$ en $v = \int dv = \int 1\,dx = x$.

$$\int \ln(x)\,dx = \left[\int u\,dv = uv - \int v\,du\right]$$

partiële integratie in termen van differentialen

$$= \ln(x)\cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx$$

toepassing van de regel voor partiële integratie

Opgave

Bereken $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$

Oplossing

Als $u = \ln(x)$ en $dv = 1\,dx$, dan $du = \frac{1}{x}dx$ en $v = \int dv = \int 1\,dx = x$.

$$\int \ln(x)\,dx = \left[\int u\,dv = uv - \int v\,du\right]$$

partiële integratie in termen van differentialen

$$= \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx$$

toepassing van de regel voor partiële integratie

$$= x\,\ln(x) - x + c$$

vereenvoudiging

Opgave

Bereken $\int_0^{\pi} t \sin(t)\, dt$

Opgave

Bereken $\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt$

Oplossing

$$\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt = \Big[t\cdot\big(-\cos(t)\big)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\big(-\cos(t)\big)\,dt$$

Opgave

Bereken $\int_0^\pi t\sin(t)\,dt$

Oplossing

$$\int_0^\pi t\sin(t)\,dt = \Big[t\cdot\big(-\cos(t)\big)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\big(-\cos(t)\big)\,dt$$

$$= \Big[-t\cos(t)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)\,dt$$

Opgave

Bereken $\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt$

Oplossing

$$\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt = \Big[t\cdot\big(-\cos(t)\big)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot\big(-\cos(t)\big)\,dt$$

$$= \Big[-t\cos(t)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(t)\,dt$$

$$= \Big[-t\cos(t) + \sin(t)\Big]_0^{\pi}$$

Opgave

Bereken $\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt &= \Big[t\cdot(-\cos(t))\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot(-\cos(t))\,dt \\
&= \Big[-t\cos(t)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(t)\,dt \\
&= \Big[-t\cos(t)+\sin(t)\Big]_0^{\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\int_0^1 2t^3 e^{-t^2}\, dt$

Opgave

Bereken $\int_0^1 2t^3 e^{-t^2}\, dt$

Oplossing

$$\int_0^1 2t^3 e^{-t^2}\, dt = \int_0^1 u e^{-u}\, du$$

substitutieregel met $u = t^2$ en $du = 2t\, dt$

Opgave

Bereken $\displaystyle\int_0^1 2t^3 e^{-t^2}\,dt$

Oplossing

$$\int_0^1 2t^3 e^{-t^2}\,dt = \int_0^1 u e^{-u}\,du$$

substitutieregel met $u = t^2$ en $du = 2t\,dt$

$$= \left[-e^{-u} - u e^{-u}\right]_0^1$$

via partieel integreren

Opgave

Bereken $\int_0^1 2t^3 e^{-t^2}\,dt$

Oplossing

$$\int_0^1 2t^3 e^{-t^2}\,dt = \int_0^1 ue^{-u}\,du$$

substitutieregel met $u = t^2$ en $du = 2t\,dt$

$$= \left[-e^{-u} - ue^{-u}\right]_0^1$$

via partieel integreren

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

Opgave

Bereken $\int_0^2 2t^3 e^{-t^2}\, dt$

Opgave

Bereken $\int_0^2 2t^3 e^{-t^2}\,dt$

Oplossing

$$\int_0^2 2t^3 e^{-t^2}\,dt = \int_0^4 u e^{-u}\,du$$

$$u = t^2,\ du = 2t\,dt,\ t = 0 \Rightarrow u = 0,\ t = 2 \Rightarrow u = 4$$

Opgave

Bereken $\int_0^2 2t^3 e^{-t^2}\, dt$

Oplossing

$$\int_0^2 2t^3 e^{-t^2}\, dt = \int_0^4 u e^{-u}\, du$$

$$u = t^2,\ du = 2t\, dt,\ t = 0 \Rightarrow u = 0,\ t = 2 \Rightarrow u = 4$$

$$= \left[-e^{-u} - u e^{-u}\right]_0^4$$

via partieel integreren

Opgave

Bereken $\int_0^2 2t^3 e^{-t^2}\,dt$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 2t^3 e^{-t^2}\,dt &= \int_0^4 u e^{-u}\,du \\
&\qquad u = t^2,\ du = 2t\,dt,\ t = 0 \Rightarrow u = 0,\ t = 2 \Rightarrow u = 4 \\
&= \left[-e^{-u} - u e^{-u}\right]_0^4 \\
&\qquad \text{via partieel integreren} \\
&= 1 - \frac{5}{e^4}
\end{aligned}
$$

Oneigenlijke integralen (voorbeeld)

Als $f(x)$ continu is op het interval $[a, \infty)$ en als $\lim_{N\to\infty} F(N)$ bestaat, dan is

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} F(N) - F(a).$$

Oneigenlijke integralen (voorbeeld)

Als $f(x)$ continu is op het interval $[a, \infty)$ en als $\lim_{N \to \infty} F(N)$ bestaat, dan is

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \int_a^N f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} F(N) - F(a).$$

Oneigenlijke integralen (voorbeeld)

Als $f(x)$ continu is op het interval $[a, b)$ en als $\lim_{v \uparrow b} F(v)$ bestaat, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{v \uparrow b} \int_a^v f(x)\,dx = \lim_{v \uparrow b} F(v) - F(a)$$

Opgave

Geef de primitieve van

$$\int \frac{1}{4+x^2}\, dx$$

Opgave

Geef de primitieve van

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Oplossing

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx =$$

Opgave

Geef de primitieve van

$$\int \frac{1}{4+x^2}\, dx$$

Oplossing

$$\int \frac{1}{4+x^2}\, dx = \int \frac{1}{4(1+(x/2)^2)}\, dx$$

Opgave

Geef de primitieve van

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{4(1+(x/2)^2)}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}\,dx\end{aligned}$$

Opgave

Geef de primitieve van

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{4(1+(x/2)^2)}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{4}2\arctan(x/2) = \frac{1}{2}\arctan(x/2)\end{aligned}$$

Opgave

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Opgave

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Oplossing

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx = \lim_{M\to-\infty}\lim_{N\to\infty}\int_{M}^{N} \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Opgave

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx &= \lim_{M\to-\infty} \lim_{N\to\infty} \int_{M}^{N} \frac{1}{4+x^2}\,dx \\ &= \lim_{M\to-\infty} \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{M}^{N}\end{aligned}$$

Opgave

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\, dx$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\, dx &= \lim_{M\to-\infty} \lim_{N\to\infty} \int_{M}^{N} \frac{1}{4+x^2}\, dx \\
&= \lim_{M\to-\infty} \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_M^N \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi - (-\tfrac{1}{2}\pi)\right)
\end{aligned}$$

Opgave

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx &= \lim_{M\to-\infty}\lim_{N\to\infty}\int_{M}^{N} \frac{1}{4+x^2}\,dx \\
&= \lim_{M\to-\infty}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_M^N \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\left(-\tfrac{1}{2}\pi\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

Opgave

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Oplossing: korte versie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi$$

Opgave

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Opgave

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Oplossing

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1$$

Opgave

Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Opgave

Laat $k > 0$. Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\, dx$$

Opgave

Laat $k > 0$. Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\, dx$$

Oplossing

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-k} \frac{1}{x^{k-1}} \Big|_1^{\infty}, & k \neq 1, \\ \ln(x)|_1^{\infty}, & k = 1 \end{cases}$$

Opgave

Laat $k > 0$. Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,dx$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,dx &= \begin{cases} \left.\frac{1}{1-k}\frac{1}{x^{k-1}}\right|_1^\infty, & k \neq 1, \\ \ln(x)|_1^\infty, & k = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \infty, & k < 1, \\ \infty, & k = 1, \\ \frac{1}{k-1}, & k > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Opgave

Laat $k > 0$. Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx$$

Opgave

Laat $k > 0$. Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx$$

Oplossing

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-k}\frac{1}{x^{k-1}}\Big|_0^1, & k \neq 1, \\ \ln(x)\big|_0^1, & k = 1 \end{cases}$$

Opgave

Laat $k > 0$. Bereken de volgende oneigenlijke integraal als deze bestaat.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx$$

Oplossing

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-k}\frac{1}{x^{k-1}}\Big|_0^1, & k \neq 1, \\ \ln(x)\big|_0^1, & k = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-k}, & k < 1, \\ \infty, & k = 1, \\ \infty, & k > 1. \end{cases}$$

Omwentelingslichaam

Beschouw de grafiek van $f(x)$ tussen waarden a en b, waar $f(x) > 0$ op $[a, b]$. Het omwentelingslichaam is de figuur

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Het volume hiervan is

$$\int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Omwentelingslichaam

Beschouw de grafiek van $f(x)$ tussen waarden a en b, waar $f(x) > 0$ op $[a, b]$. Het omwentelingslichaam is de figuur

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Het volume hiervan is

$$\int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Voorbeeld

Het volume van een bol met straal R is gelijk aan

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2) \, dx$$

Opgave

Bereken

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx$$

Opgave

Bereken

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\, dx$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\, dx &= \pi(R^2 x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-R}^{R} \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

Opgave

Bereken

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

Opgave

Bereken

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

Oplossing

Gebruik de substitutie $x = R\sin(\theta)$.

Opgave

Bereken

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

Oplossing

Gebruik de substitutie $x = R\sin(\theta)$.

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R\sqrt{R^2 - R^2\sin^2(\theta)}\cos(\theta)\, d\theta$$

Opgave

Bereken

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

Oplossing

Gebruik de substitutie $x = R\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R\sqrt{R^2 - R^2\sin^2(\theta)}\cos(\theta)\,d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R^2\cos^2(\theta)\,d\theta \\ &= \pi R^2\end{aligned}$$

(opmerking: $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$)

Opgave

Bereken

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

Oplossing

Gebruik de substitutie $x = R\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R\sqrt{R^2 - R^2\sin^2(\theta)}\cos(\theta)\, d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R^2\cos^2(\theta)\, d\theta \\ &= \pi R^2\end{aligned}$$

Vraag: wat is hier berekend?

Hoorn van Gabriël

Beschouw de functie $f(x) = 1/x$ voor $x \geq 1$. Het omwentelingslichaam van de grafiek van f is de figuur

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x < \infty, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Het volume hiervan is

$$\int_1^\infty \pi f(x)^2 \, dx = \int_1^\infty \pi/x^2 \, dx = -\pi/x|_1^\infty = \pi.$$

Hoorn van Gabriël

Beschouw de functie $f(x) = 1/x$ voor $x \geq 1$. Het omwentelingslichaam van de grafiek van f is de figuur

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x < \infty, y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Het volume hiervan is

$$\int_1^\infty \pi f(x)^2 \, dx = \int_1^\infty \pi/x^2 \, dx = -\pi/x|_1^\infty = \pi.$$

Schildersparadox

De oppervlakte onder de grafiek van f, $\int_1^\infty 1/x \, dx$, is oneindig. Zo is ook de oppervlakte van het omwentelingslichaam oneindig.