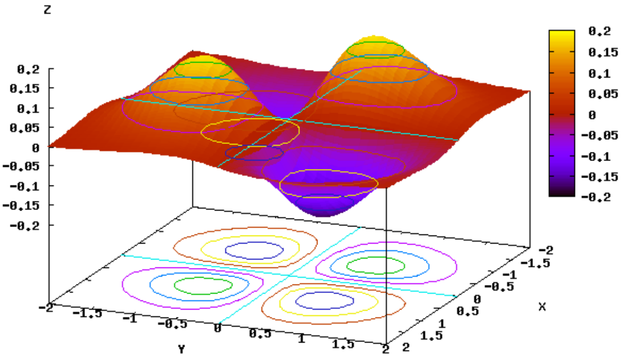
Calculus

Functies van meer variabelen

Ale Jan Homburg

Universiteit van Amsterdam, Leiden Universiteit, Imperial College London



Grafiek $z = f(x, y)$ van een functie van twee variabelen x, y. In het x, y vlak zijn niveaukrommen getekend, waar f een constante waarde heeft.

Partiële afgeleiden

De partiële afgeleiden van de functie $f(x, y)$ zijn functies $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ gedefinieerd door

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{dy \to 0} \frac{f(x, y + dy) - f(x, y)}{dy}$$

Er wordt dus gedifferentiëerd naar één variabele, waarbij de andere variabele vast worden genomen

Partiële afgeleiden

We schrijven ook $f_x(a, b)$ en $f_y(a, b)$ voor partiële afgeleiden in (a, b).

Opgave

Bereken de partiële afgeleide van $7x^4 - xy^4$ naar y.

Oplossing

$\frac{\partial}{\partial y}(7x^4 - xy^4) =$

Opgave

Bereken de partiële afgeleide van $\frac{x}{x+y}$ naar x.

Oplossing

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x+y} =$

Opgave

Bereken de partiële afgeleide van $7x^4 - xy^4$ naar y.

Oplossing

$\frac{\partial}{\partial y}(7x^4 - xy^4) = -4xy^3$

Opgave

Bereken de partiële afgeleide van $\frac{x}{x+y}$ naar x.

Oplossing

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x+y} = \frac{1.(x+y)-x.1}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$ (Quotiënt regel)

Opgave

Voor $n \geq 2$, beschouw de functie $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$. Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n)$ en $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, \ldots, x_n)$.

Oplossing

Opgave

Voor $n \geq 2$, beschouw de functie $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$. Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n)$ en $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, \ldots, x_n)$.

Oplossing

Merk op $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \cdots + x_{n-1} x_n$. Dus

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n) = x_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_3.$$

Dit geldt alleen als $n \geq 3$. Als $n = 2$ geldt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n) = x_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$$

Opgave

Voor $n \geq 2$, beschouw de functie $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j$.
Bereken de partiële afgeleide $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n)$.

Oplossing

Opgave

Voor $n \geq 2$, beschouw de functie $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j$. Bereken de partiële afgeleide $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n)$.

Oplossing

Een term $x_i x_j$ bevat x_1 als $i = 1$ of als $j = 1$. We krijgen

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 = 2 \sum_{i=1}^n x_i$$

Tweede orde partiële afgeleiden

Als voorbeeld, bekijk $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$. Dan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right) = \frac{y}{(x+y)^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x+y}\right) = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

Verder differentiëren:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right) = -2\frac{y}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) \text{ (Dit is altijd waar)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{(x+y)^2}\right) = \frac{2x}{(x+y)^3}$$

Tweede orde partiële afgeleiden

Zoals we schreven $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ en $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, schrijven we ook

$$f_{xx}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$$

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$$

$$f_{yy}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

Opgave

Bereken $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ in het punt $(x, y) = (5, 2)$.

Oplossing

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) =$$

Opgave

Bereken $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ in het punt $(x, y) = (5, 2)$.

Oplossing

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

Opgave

Bereken $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ in het punt $(x, y) = (5, 2)$.

Oplossing

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ in het punt $(x, y) = (5, 2)$.

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

Opgave

Bereken $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ in het punt $(x, y) = (5, 2)$.

Oplossing

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Dus $\left.\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right|_{(5,2)} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{25} = -\frac{29}{100}$

Raakvlak

Beschouw de grafiek $z = f(x, y)$.
Een vergelijking van het raakvlak in $P = (a, b, c)$ met $c = f(a, b)$ is

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Tweede orde Taylor benadering

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)\triangle x + f_y(a,b)\triangle y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)\triangle x^2 + 2f_{xy}(a,b)\triangle x\triangle y + f_{yy}(a,b)\triangle y^2\right)$$

met

$$\triangle x = x - a \quad \text{en} \quad \triangle y = y - b.$$

Tweede orde Taylor benadering rond $(0,0)$

$$f(x,y) \approx f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2$$

Opgave

Berekenen de kwadratische benadering rondom het punt $(1, 1)$ van de functie $f(x, y) = x^2y - xy^2 - 3xy$

Opgave

Berekenen de kwadratische benadering rondom het punt $(1, 1)$ van de functie $f(x, y) = x^2y - xy^2 - 3xy$

Oplossing

$$f_x(x, y) =, \quad f_y(x, y) =$$

$$f_{xx}(x, y) =, \quad f_{xy}(x, y) =, \quad f_{yy}(x, y) =$$

$$f(1, 1) =,\ f_x(1, 1) =,\ f_y(1, 1) =$$

$$f_{xx}(1, 1) =,\ f_{xy}(1, 1) =,\ f_{yy}(1, 1) =$$

Het antwoord is dus

$$z =$$

Opgave

Berekenen de kwadratische benadering rondom het punt $(1, 1)$ van de functie $f(x, y) = x^2 y - xy^2 - 3xy$

Oplossing

$$f_x(x, y) = 2xy - y^2 - 3y, \quad f_y(x, y) = x^2 - 2xy - 3x$$

$$f_{xx}(x, y) =, \quad f_{xy}(x, y) =, \quad f_{yy}(x, y) =$$

$$f(1, 1) =,\ f_x(1, 1) =,\ f_y(1, 1) =$$

$$f_{xx}(1, 1) =,\ f_{xy}(1, 1) =,\ f_{yy}(1, 1) =$$

Het antwoord is dus

$$z =$$

Opgave

Berekenen de kwadratische benadering rondom het punt $(1, 1)$ van de functie $f(x, y) = x^2y - xy^2 - 3xy$

Oplossing

$$f_x(x, y) = 2xy - y^2 - 3y, \quad f_y(x, y) = x^2 - 2xy - 3x$$

$$f_{xx}(x, y) = 2y, \quad f_{xy}(x, y) = 2x - 2y - 3, \quad f_{yy}(x, y) = -2x$$

$$f(1, 1) =, \ f_x(1, 1) =, \ f_y(1, 1) =$$

$$f_{xx}(1, 1) =, \ f_{xy}(1, 1) =, \ f_{yy}(1, 1) =$$

Het antwoord is dus

$$z =$$

Opgave

Berekenen de kwadratische benadering rondom het punt $(1,1)$ van de functie $f(x,y) = x^2y - xy^2 - 3xy$

Oplossing

$$f_x(x,y) = 2xy - y^2 - 3y, \quad f_y(x,y) = x^2 - 2xy - 3x$$

$$f_{xx}(x,y) = 2y, \quad f_{xy}(x,y) = 2x - 2y - 3, \quad f_{yy}(x,y) = -2x$$

$$f(1,1) = -3,\ f_x(1,1) = -2,\ f_y(1,1) = -4$$

$$f_{xx}(1,1) = 2,\ f_{xy}(1,1) = -3,\ f_{yy}(1,1) = -2$$

Het antwoord is dus

$$z =$$

Opgave

Berekenen de kwadratische benadering rondom het punt $(1,1)$ van de functie $f(x,y) = x^2y - xy^2 - 3xy$

Oplossing

$$f_x(x,y) = 2xy - y^2 - 3y, \quad f_y(x,y) = x^2 - 2xy - 3x$$

$$f_{xx}(x,y) = 2y, \quad f_{xy}(x,y) = 2x - 2y - 3, \quad f_{yy}(x,y) = -2x$$

$$f(1,1) = -3,\ f_x(1,1) = -2,\ f_y(1,1) = -4$$

$$f_{xx}(1,1) = 2,\ f_{xy}(1,1) = -3,\ f_{yy}(1,1) = -2$$

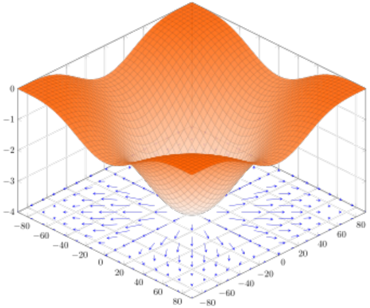
Het antwoord is dus

$$\begin{aligned} z &= -3 - 2(x-1) - 4(y-1) + (x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) - (y-1)^2 \\ &= -x + y + x^2 - 3xy - y^2 \end{aligned}$$

Gradiënt

De gradiënt van $f(x, y)$ is de vector

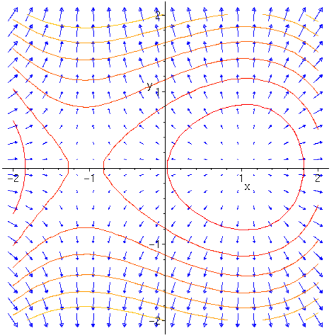
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$



Grafiek en gradiënt van $f(x, y) = -(\cos(x)^2 + \cos(y)^2)^2$

Gradiënt

De gradiënt van $f(x,y)$ is richting en grootte van de sterkste toename van $f(x,y)$. De gradiënt staat loodrecht op niveaukrommen van $f(x,y)$



$$f(x,y) = -\frac{3}{10}x^3 - x + y^2,\ \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10}x^2 - 1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

Opgave

Bereken de gradiënt van $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ in het punt $(2,1)$.

Opgave

Bereken de gradiënt van $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ in het punt $(2,1)$.

Oplossing

De partiële afgeleiden van $f(x,y)$ zijn

$$f_x(x,y) = \frac{x}{2} \quad \text{en} \quad f_y(x,y) = 2y$$

. De gradiënt van f in $(2,1)$ is

$$\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} f_x(2,1) \\ f_y(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kettingregel

Als $z = z(x, y)$ een differentieerbare functie van twee variabelen is, en x en y differentieerbare functies van t zijn, dan is z een functie van t en

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Je kunt dit ook lezen als

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \left\langle \nabla z(x(t), y(t)), \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

Kettingregel

Als $z = z(x, y)$ een differentieerbare functie van twee variabelen is, en x en y differentieerbare functies van twee variabelen s en t zijn, dan is z een functie van s en t en

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

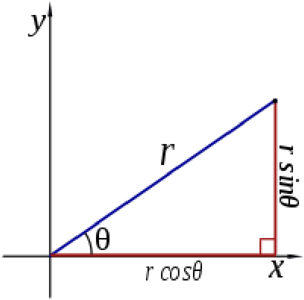
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Poolcoördinaten

Een punt in het vlak wordt bepaald door een straal r (afstand tot de oorsprong) en een hoek θ (de hoek met de positieve x-as).
Voor een punt (x, y) in het vlak geldt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\theta) = y/x$$

Een straal r en een hoek θ geeft het punt $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$



Goniometrie tabel

	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	1	0	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	∞

Opgave

Bepaal poolcoordinaten voor $(x, y) = (4, 4\sqrt{3})$.

Opgave

Bepaal poolcoordinaten voor $(x, y) = (-3, -3)$.

Opgave

Bepaal poolcoordinaten voor $(x, y) = (4, 4\sqrt{3})$.

Oplossing

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$ en $\tan(\theta) = \sqrt{3}$. Omdat x, y positief zijn, geldt $\theta = \pi/3$ (60 graden).

Opgave

Bepaal poolcoordinaten voor $(x, y) = (-3, -3)$.

Oplossing

$r = 3\sqrt{2}$ en $\theta = -\frac{3}{4}\pi$

Opgave

Bepaal poolcoordinaten voor $(x, y) = (\sqrt{3}, -1)$.

Opgave

Bepaal poolcoordinaten voor $(x, y) = (\sqrt{3}, -1)$.

Oplossing

$r = \sqrt{3+1} = 2$ en $\tan(\theta) = -1/\sqrt{3}$. Omdat $x > 0$ en $y < 0$ geldt $\theta = -\pi/6$.

Opgave

Schrijf $(r, \theta) = (4, \frac{2}{3}\pi)$ in Cartesische coördinaten.

Opgave

Schrijf $2x - 5x^3 = 1 + xy$ in poolcoördinaten.

Opgave

Schrijf $(r, \theta) = (4, \frac{2}{3}\pi)$ in Cartesische coördinaten.

Oplossing

$x = r\cos(\theta) = 4(-\frac{1}{2}) = -2$ en $y = r\sin(\theta) = 4(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

Opgave

Schrijf $2x - 5x^3 = 1 + xy$ in poolcoördinaten.

Oplossing

$x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$: $2r\cos(\theta) - 5r^3\cos^3(\theta) = 1 + r^2\cos(\theta)\sin(\theta)$.

Kettingregel voor poolcoördinaten

Als $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ dan is

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta
\end{aligned}$$

Opgave

$f(x,y) = x^2 + y^2$. $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. Bereken $\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Oplossing

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= 2x\cos(\theta) + 2y\sin(\theta) \\
&= 2r\cos^2(\theta) + 2r\sin^2(\theta) \\
&= 2r
\end{aligned}$$