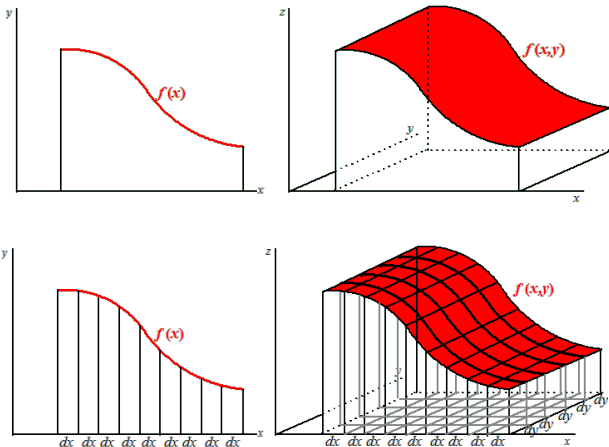


Calculus

Meervoudige integralen

Ale Jan Homburg

Universiteit van Amsterdam, Leiden Universiteit, Imperial College London



Een integraal $\iint f(x,y) dx dy$ van een functie van meer variabelen is gedefinieerd analoog aan een integraal $\int f(x) dx$ van een functie van één variabele.

Dubbele integralen

Laat $D = [a, b] \times [c, d]$. Dan geldt

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

We schrijven $\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx$.

Dubbele integralen

Laat $D = [a, b] \times [c, d]$. Dan geldt

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

We schrijven $\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$.

Opgave

Vind het volume van het gebied in drie dimensionale ruimte, boven het vierkant Q gegeven door $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ in $z = 0$, en onder het vlak $z = 4 - x - y$. Integreer eerst over de y -variabele.

Opgave

Vind het volume van het gebied in drie dimensionale ruimte, boven het vierkant Q gegeven door $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ in $z = 0$, en onder het vlak $z = 4 - x - y$. Integreer eerst over de y -variabele.

Oplossing

Dit volume is de dubbele integraal $\iint_Q 4 - x - y \, dx dy$. Dit is:

$$\int_0^1 \int_1^2 4 - x - y \, dy dx =$$

Opgave

Vind het volume van het gebied in drie dimensionale ruimte, boven het vierkant Q gegeven door $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ in $z = 0$, en onder het vlak $z = 4 - x - y$. Integreer eerst over de y -variabele.

Oplossing

Dit volume is de dubbele integraal $\iint_Q 4 - x - y \, dx dy$. Dit is:

$$\int_0^1 \int_1^2 4 - x - y \, dy dx = \int_0^1 \left(4y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=1}^{y=2} dx$$

Opgave

Vind het volume van het gebied in drie dimensionale ruimte, boven het vierkant Q gegeven door $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ in $z = 0$, en onder het vlak $z = 4 - x - y$. Integreer eerst over de y -variabele.

Oplossing

Dit volume is de dubbele integraal $\iint_Q 4 - x - y \, dx dy$. Dit is:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_1^2 4 - x - y \, dy dx &= \int_0^1 \left(4y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{5}{2} - x \, dx \end{aligned}$$

Opgave

Vind het volume van het gebied in drie dimensionale ruimte, boven het vierkant Q gegeven door $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ in $z = 0$, en onder het vlak $z = 4 - x - y$. Integreer eerst over de y -variabele.

Oplossing

Dit volume is de dubbele integraal $\iint_Q 4 - x - y \, dx dy$. Dit is:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_1^2 4 - x - y \, dy dx &= \int_0^1 \left(4y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{5}{2} - x \, dx \\ &= \left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

Opgave

Vind het volume van het gebied in drie dimensionale ruimte, boven het vierkant Q gegeven door $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ in $z = 0$, en onder het vlak $z = 4 - x - y$. Integreer eerst over de y -variabele.

Oplossing

Dit volume is de dubbele integraal $\iint_Q 4 - x - y \, dx dy$. Dit is:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^2 4 - x - y \, dy dx &= \int_0^1 \left(4y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{5}{2} - x \, dx \\ &= \left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\iint_R 12x - 18y \, dx dy$ over het vierkant $R = [-1, 4] \times [2, 3]$.

Opgave

Bereken $\iint_R 12x - 18y \, dx dy$ over het vierkant $R = [-1, 4] \times [2, 3]$.

Oplossing

We integreren eerst over x , dan over y :

$$\int_2^3 \int_{-1}^4 12x - 18y \, dx dy$$

Opgave

Bereken $\iint_R 12x - 18y \, dx dy$ over het vierkant $R = [-1, 4] \times [2, 3]$.

Oplossing

We integreren eerst over x , dan over y :

$$\int_2^3 \int_{-1}^4 12x - 18y \, dx dy = \int_2^3 6x^2 - 18xy \Big|_{-1}^4 \, dy$$

Opgave

Bereken $\iint_R 12x - 18y \, dx dy$ over het vierkant $R = [-1, 4] \times [2, 3]$.

Oplossing

We integreren eerst over x , dan over y :

$$\begin{aligned} \int_2^3 \int_{-1}^4 12x - 18y \, dx dy &= \int_2^3 6x^2 - 18xy \Big|_{-1}^4 dy \\ &= \int_2^3 90 - 90y \, dy \end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\iint_R 12x - 18y \, dx dy$ over het vierkant $R = [-1, 4] \times [2, 3]$.

Oplossing

We integreren eerst over x , dan over y :

$$\begin{aligned}\int_2^3 \int_{-1}^4 12x - 18y \, dx dy &= \int_2^3 6x^2 - 18xy \Big|_{-1}^4 \, dy \\ &= \int_2^3 90 - 90y \, dy \\ &= 90y - 45y^2 \Big|_2^3\end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\iint_R 12x - 18y \, dx dy$ over het vierkant $R = [-1, 4] \times [2, 3]$.

Oplossing

We integreren eerst over x , dan over y :

$$\begin{aligned}\int_2^3 \int_{-1}^4 12x - 18y \, dx dy &= \int_2^3 6x^2 - 18xy \Big|_{-1}^4 dy \\ &= \int_2^3 90 - 90y \, dy \\ &= 90y - 45y^2 \Big|_2^3 \\ &= -135.\end{aligned}$$

Dubbele integralen

We willen de integraal van f over een gebied D uitrekenen:

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy$$

Bekijk het geval dat D begrensd is door functies $y = c(x)$ en $y = d(x)$ met $a \leq x \leq b$ en $c(x) < d(x)$ voor alle $a \leq x \leq b$. (De x variabele varieert tussen a en b , voor vaste x varieert y tussen $c(x)$ en $d(x)$.) Dan geldt

$$I = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

We rekenen $\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy$ uit, hier komt een waarde $J(x)$ uit. Dus

$$I = \int_a^b J(x) \, dx$$

en dit is opnieuw een enkelvoudige integraal.

Dubbele integralen

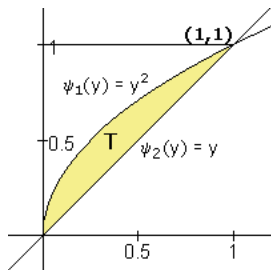
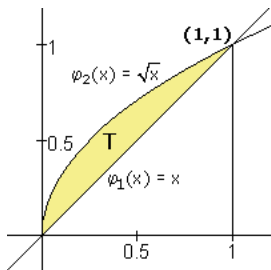
Als het gebied D een gebied is begrensd door twee functies $x = a(y)$ en $x = b(y)$ voor $c \leq y \leq d$ en met $a(y) < b(y)$ voor alle $c \leq y \leq d$, (De y variabele varieert tussen c en d , voor vaste y varieert x tussen $a(y)$ en $b(y)$.) dan geldt

$$I = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

We rekenen $\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ uit, hier komt een waarde $K(y)$ uit. Dus

$$I = \int_c^d K(y) dy$$

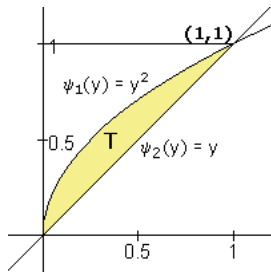
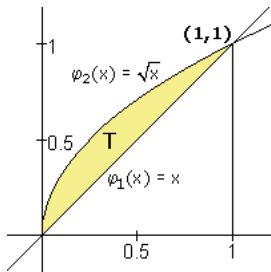
en dit is opnieuw een enkelvoudige integraal.



Integratiegrenzen

Het gebied T hierboven kan op twee manieren beschreven worden:

1. $0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}$;
2. $0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y$.



Integratiegrenzen

Een dubbele integraal van een functie f over het gebied T kan op twee manieren berekend

1. $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx;$
2. $\int_0^1 \int_{y^2}^y f(x, y) dx dy.$

Opgave

$$\text{Bereken } \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx$$

Opgave

$$\text{Bereken } \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx$$

Oplossing

$$\int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx =$$

Opgave

$$\text{Bereken } \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx$$

Oplossing

$$\int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx = \int_0^2 ye^{x^4} \Big|_0^{x^3} dx$$

Opgave

Bereken $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx$

Oplossing

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx &= \int_0^2 ye^{x^4} \Big|_0^{x^3} dx \\ &= \int_0^2 x^3 e^{x^4} dx \end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx$

Oplossing

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx &= \int_0^2 ye^{x^4} \Big|_0^{x^3} dx \\ &= \int_0^2 x^3 e^{x^4} dx \\ &= \frac{1}{4} e^{x^4} \Big|_0^2 \end{aligned}$$

Opgave

$$\text{Bereken } \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx$$

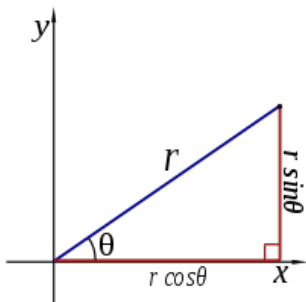
Oplossing

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} dy dx &= \int_0^2 ye^{x^4} \Big|_0^{x^3} dx \\ &= \int_0^2 x^3 e^{x^4} dx \\ &= \frac{1}{4} e^{x^4} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{16} - 1). \end{aligned}$$

Poolcoördinaten

Poolcoördinaten "straal" r en "hoek" θ van een punt in het vlak zijn gegeven door $x = r \cos(\theta)$ en $y = r \sin(\theta)$.

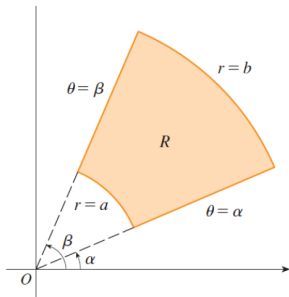
Merk op $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\tan(\theta) = y/x$.



Integreren met poolcoördinaten

Laat R een gebied zijn, in poolcoördinaten gegeven door $a \leq r \leq b$ en $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Dan geldt

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r \, dr d\theta$$



Opgave

Bereken $\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ over de schijf $D = x^2 + y^2 \leq 1$.

Oplossing

$$\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy =$$

Opgave

Bereken $\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ over de schijf $D = x^2 + y^2 \leq 1$.

Oplossing

$$\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r)r \, dr d\theta$$

Opgave

Bereken $\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ over de schijf $D = x^2 + y^2 \leq 1$.

Oplossing

$$\begin{aligned} \iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right) \Big|_0^1 d\theta \end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ over de schijf $D = x^2 + y^2 \leq 1$.

Oplossing

$$\begin{aligned}\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r)r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} d\theta\end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ over de schijf $D = x^2 + y^2 \leq 1$.

Oplossing

$$\begin{aligned}\iint_D 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r)r \, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} d\theta \\ &= \frac{1}{3}\pi.\end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\iint_D y^2 + 3x \, dx dy$, waar D is het gebied in het derde kwadrant tussen $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + y^2 = 9$.

Oplossing

$$\iint_D y^2 + 3x \, dx dy =$$

Opgave

Bereken $\iint_D y^2 + 3x \, dx dy$, waar D is het gebied in het derde kwadrant tussen $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + y^2 = 9$.

Oplossing

In poolcoördinaten is het gebied gegeven door $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ en $1 \leq r \leq 3$.

$$\iint_D y^2 + 3x \, dx dy =$$

Opgave

Bereken $\iint_D y^2 + 3x \, dx dy$, waar D is het gebied in het derde kwadrant tussen $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + y^2 = 9$.

Oplossing

In poolcoördinaten is het gebied gegeven door $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ en $1 \leq r \leq 3$.

$$\iint_D y^2 + 3x \, dx dy = \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_1^3 ((r \sin(\theta))^2 + 3r \cos(\theta)) r \, dr d\theta$$

Opgave

Bereken $\iint_D y^2 + 3x \, dx dy$, waar D is het gebied in het derde kwadrant tussen $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + y^2 = 9$.

Oplossing

In poolcoördinaten is het gebied gegeven door $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ en $1 \leq r \leq 3$.

$$\begin{aligned}\iint_D y^2 + 3x \, dx dy &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_1^3 ((r \sin(\theta))^2 + 3r \cos(\theta)) r \, dr d\theta \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \left(\frac{1}{4} r^4 \sin^2(\theta) + r^3 \cos(\theta) \right) \Big|_1^3 d\theta\end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\iint_D y^2 + 3x \, dx dy$, waar D is het gebied in het derde kwadrant tussen $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + y^2 = 9$.

Oplossing

In poolcoördinaten is het gebied gegeven door $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ en $1 \leq r \leq 3$.

$$\begin{aligned}\iint_D y^2 + 3x \, dx dy &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_1^3 ((r \sin(\theta))^2 + 3r \cos(\theta)) r \, dr d\theta \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \left(\frac{1}{4} r^4 \sin^2(\theta) + r^3 \cos(\theta) \right) \Big|_1^3 d\theta \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} 20 \sin^2(\theta) + 26 \cos(\theta) \, d\theta\end{aligned}$$

Opgave

Bereken $\iint_D y^2 + 3x \, dx dy$, waar D is het gebied in het derde kwadrant tussen $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + y^2 = 9$.

Oplossing

In poolcoördinaten is het gebied gegeven door $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ en $1 \leq r \leq 3$.

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 + 3x \, dx dy &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_1^3 ((r \sin(\theta))^2 + 3r \cos(\theta)) r \, dr d\theta \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \left(\frac{1}{4} r^4 \sin^2(\theta) + r^3 \cos(\theta) \right) \Big|_1^3 d\theta \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} 20 \sin^2(\theta) + 26 \cos(\theta) \, d\theta \end{aligned}$$

$$(\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta)) = (10\theta - 5 \sin(2\theta) + 26 \sin(\theta)) \Big|_{\pi}^{3\pi/2}$$

Opgave

Bereken $\iint_D y^2 + 3x \, dx dy$, waar D is het gebied in het derde kwadrant tussen $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + y^2 = 9$.

Oplossing

In poolcoördinaten is het gebied gegeven door $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$ en $1 \leq r \leq 3$.

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 + 3x \, dx dy &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_1^3 ((r \sin(\theta))^2 + 3r \cos(\theta)) r \, dr d\theta \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \left(\frac{1}{4} r^4 \sin^2(\theta) + r^3 \cos(\theta) \right) \Big|_1^3 d\theta \\ &= \int_{\pi}^{3\pi/2} 20 \sin^2(\theta) + 26 \cos(\theta) \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta)) &= (10\theta - 5 \sin(2\theta) + 26 \sin(\theta)) \Big|_{\pi}^{3\pi/2} \\ &= 5\pi - 26. \end{aligned}$$

Coördinatentransformaties

Neem aan

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v)$$

met inverse

$$u = h(x, y), \quad v = i(x, y)$$

Een integraal over een gebied D wordt als volgt getransformeerd:

$$\iint_D F(x, y) \, dx dy = \iint_S F(f(u, v), g(u, v)) |J(u, v)| \, du dv.$$

Hier is S het gebied in de (u, v) variabelen dat overeenkomt met D in de (x, y) variabelen. De functie $J(u, v)$ is de Jacobiaan, en is gegeven door

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Opgave

Bereken de oppervlakte binnen de ellips $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ (waar a en b positieve getallen zijn), door een coördinatentransformatie $u = x/a$ en $v = y/b$ te gebruiken.

Oplossing

Schrijf $u = x/a$ en $v = y/b$. Het gebied

$D = \{(x, y) ; (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$ wordt $S = \{(u, v) ; u^2 + v^2 \leq 1\}$:
de schijf met straal 1.

De Jacobiaan wordt

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab.$$

Dus

$$\iint_D dx dy = \iint_S ab \, du dv = ab\pi$$

(omdat de schijf met straal 1 een oppervlakte π heeft).

Opgave

Bereken de oppervlakte van het gebied D gegeven door $x^2 \leq y \leq 2x^2$ en $y^2 \leq x \leq 3y^2$, door een coördinatentransformatie $u = x^2/y$, $v = y^2/x$ met inverse $x = u^{2/3}v^{1/3}$, $y = v^{2/3}u^{1/3}$ te gebruiken.

Oplossing

In de (u, v) coördinaten wordt het gebied D gelijk aan het vierkant R gegeven door $1/2 \leq u \leq 1$ en $1/3 \leq v \leq 1$.

De Jacobiaan wordt

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} u^{2/3} v^{1/3} & \frac{\partial}{\partial v} u^{2/3} v^{1/3} \\ \frac{\partial}{\partial u} v^{2/3} u^{1/3} & \frac{\partial}{\partial v} v^{2/3} u^{1/3} \end{pmatrix}$$

Opgave

Bereken de oppervlakte van het gebied D gegeven door $x^2 \leq y \leq 2x^2$ en $y^2 \leq x \leq 3y^2$, door een coördinatentransformatie $u = x^2/y$, $v = y^2/x$ met inverse $x = u^{2/3}v^{1/3}$, $y = v^{2/3}u^{1/3}$ te gebruiken.

Oplossing

In de (u, v) coördinaten wordt het gebied D gelijk aan het vierkant R gegeven door $1/2 \leq u \leq 1$ en $1/3 \leq v \leq 1$.

De Jacobiaan wordt

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \\ \frac{1}{3}v^{2/3}u^{-2/3} & \frac{2}{3}v^{-1/3}u^{1/3} \end{pmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Opgave

Bereken de oppervlakte van het gebied D gegeven door $x^2 \leq y \leq 2x^2$ en $y^2 \leq x \leq 3y^2$, door een coördinatentransformatie $u = x^2/y$, $v = y^2/x$ met inverse $x = u^{2/3}v^{1/3}$, $y = v^{2/3}u^{1/3}$ te gebruiken.

Oplossing

In de (u, v) coördinaten wordt het gebied D gelijk aan het vierkant R gegeven door $1/2 \leq u \leq 1$ en $1/3 \leq v \leq 1$.

De Jacobiaan wordt

$$J(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3} \\ \frac{1}{3}v^{2/3}u^{-2/3} & \frac{2}{3}v^{-1/3}u^{1/3} \end{pmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Dus

$$\iint_D dx dy = \iint_R \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$