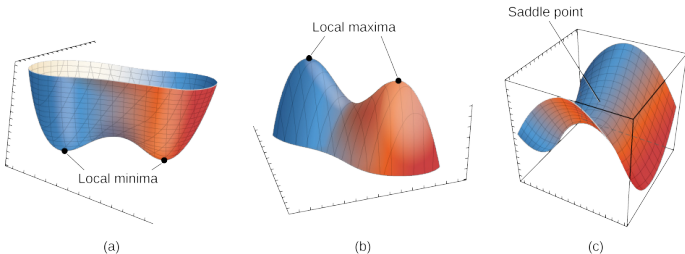


Calculus

Stationaire punten

Ale Jan Homburg

Universiteit van Amsterdam, Leiden Universiteit, Imperial College London



Stationair punt

In maxima en minima van een functie geldt dat partiële afgeleiden nul zijn. De grafiek meest rechts toont een zadelpunt waar de partiële afgeleiden ook nul zijn.

Stationair punt

Een punt (a, b) is een stationair punt van de functie $f(x, y)$ als de gradiënt ∇f in dat punt de nulvector is. Dit betekent dat alle partiële afgeleiden in dit punt gelijk aan nul zijn en het raakvlak aan de grafiek in $(a, b, f(a, b))$ horizontaal is.

Stationaire punten kun je dus vinden door het volgende stelsel van vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Opgave

Bereken stationaire punten van de functie

$$f(x, y) = x^2 + xy + 4x + 4y + 4.$$

Oplossing

De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x, y) = \quad \text{en} \quad f_y(x, y) =$$

Opgave

Bereken stationaire punten van de functie

$$f(x, y) = x^2 + xy + 4x + 4y + 4.$$

Oplossing

De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x, y) = 2x + y + 4 \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = x + 4$$

De stationaire punten zijn dus de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases}$$

Opgave

Bereken stationaire punten van de functie

$$f(x, y) = x^2 + xy + 4x + 4y + 4.$$

Oplossing

De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x, y) = 2x + y + 4 \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = x + 4$$

De stationaire punten zijn dus de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases}$$

Oplossing:

Opgave

Bereken stationaire punten van de functie

$$f(x, y) = x^2 + xy + 4x + 4y + 4.$$

Oplossing

De partiële afgeleiden zijn

$$f_x(x, y) = 2x + y + 4 \quad \text{en} \quad f_y(x, y) = x + 4$$

De stationaire punten zijn dus de oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases}$$

Oplossing: $x = -4$ en $y = 4$. Er is dus één stationair punt: $(-4, 4)$

Extreme waarden

Zij (a, b) een stationair punt van $f(x, y)$. Beschouw

$$Q(u, v) = f_{xx}(a, b)u^2 + 2f_{xy}(a, b)uv + f_{yy}(a, b)v^2$$

- ▶ Als $Q(u, v)$ buiten $(0, 0)$ alleen positieve waarden aanneemt, dan is (a, b) een lokaal minimum van de functie $f(x, y)$.
- ▶ Als $Q(u, v)$ buiten $(0, 0)$ alleen negatieve waarden aanneemt, dan is (a, b) een lokaal maximum van de functie $f(x, y)$.
- ▶ Als $Q(u, v)$ buiten $(0, 0)$ zowel positieve als negatieve waarden aanneemt, dan heeft de functie $f(x, y)$ een zadelpunt in (a, b) .

Extreme waarden

Zij (a, b) een stationair punt van $f(x, y)$. Beschouw

$$Q(u, v) = f_{xx}(a, b)u^2 + 2f_{xy}(a, b)uv + f_{yy}(a, b)v^2$$

Dan

$$Q(u, v) = \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle$$

Hesse matrix

$\begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$ heet de Hesse matrix

Extreme waarden

Zij $f(x, y)$ een functie met een stationair punt (a, b) . Laat

$$H(a, b) = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

- ▶ Als $H(a, b) > 0$ en $f_{xx}(a, b) > 0$, dan is (a, b) een lokaal minimum van de functie $f(x, y)$. ($H(a, b)$ heeft positieve eigenwaarden)
- ▶ Als $H(a, b) > 0$ en $f_{xx}(a, b) < 0$, dan is (a, b) een lokaal maximum van de functie $f(x, y)$. ($H(a, b)$ heeft negatieve eigenwaarden)
- ▶ Als $H(a, b) < 0$, dan heeft de functie $f(x, y)$ een zadelpunt in (a, b) . ($H(a, b)$ heeft een positieve en een negatieve eigenwaarde)

Opgave

Bereken het stationaire punt van de functie

$$f(x, y) = -3y^2 + xy + 2y + x^2$$

Opgave

Bereken het stationaire punt van de functie

$$f(x, y) = -3y^2 + xy + 2y + x^2$$

Oplossing

Bereken $\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = -6y + x + 2$.

Opgave

Bereken het stationaire punt van de functie

$$f(x, y) = -3y^2 + xy + 2y + x^2$$

Oplossing

Bereken $\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = -6y + x + 2$.

Beide zijn nul als $(x, y) = \left(\frac{-2}{13}, \frac{4}{13}\right)$.

Opgave

Bereken de aard (minimum, maximum, zadelpunt) van het stationaire punt $(\frac{-2}{13}, \frac{4}{13})$ van de functie $f(x, y) = -3y^2 + xy + 2y + x^2$

Opgave

Bereken de aard (minimum, maximum, zadelpunt) van het stationaire punt $(-\frac{2}{13}, \frac{4}{13})$ van de functie $f(x, y) = -3y^2 + xy + 2y + x^2$

Oplossing

De Hesse matrix is

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Opgave

Bereken de aard (minimum, maximum, zadelpunt) van het stationaire punt $(-\frac{2}{13}, \frac{4}{13})$ van de functie $f(x, y) = -3y^2 + xy + 2y + x^2$

Oplossing

De Hesse matrix is

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Omdat de Hesse matrix negatieve determinant heeft, is het stationaire punt een zadelpunt.

Opgave

Wat is de kleinste afstand van het punt $(-4, 1, 3)$ tot het vlak $V = \{2x - y + z = 1\}$?

Oplossing

De afstand van $(-4, 1, 3)$ tot $(x, y, z) \in V$, is $\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$. Met $z = 1 - 2x + y$ is dit $\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2}$. We zoeken een minimum van het kwadraat $f(x, y) = (x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$. Partiële afgeleiden uitrekenen en nul stellen:

$$\begin{cases} 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 0 \\ 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 0 \end{cases}$$

Oplossing $(x, y) = (-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6})$. Dit is een minimum (ga na). De minimale afstand van $(-4, 1, 3)$ tot V is $\sqrt{\frac{49}{6}}$