

Huiswerk en practicum
Continue Wiskunde
18 september

Laat de afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd zijn door

$$f(x, y) = (x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2 + x - 1, 3x^2y - y^3 - 2xy + y) \quad (1)$$

Beschouw de vergelijking

$$f(x, y) = (0, 0). \quad (2)$$

Deze vergelijking heeft drie oplossingen: $(1, 0)$, $(0, 1)$ en $(0, -1)$. We zullen niet laten zien dat dit alle oplossingen zijn.

Newton's methode wordt gegeven door een iteratie

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = N(x_n, y_n) = (x_n, y_n) - [Df(x_n, y_n)]^{-1} f(x_n, y_n) \quad (3)$$

(a) Geef expliciete uitdrukkingen voor $Df(x, y)$ en $N(x, y)$.

Voor elk van de drie oplossingen van (2) is er een verzameling van beginwaarden $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ waarvoor de iteratie $(x_{n+1}, y_{n+1}) = N(x_n, y_n)$ naar die oplossing convergeert als $n \rightarrow \infty$.

(b) (*Computer opgave:*) Bereken numeriek een figuur met deze drie verzamelingen in verschillende kleuren getekend. Geef de code.

(c) Converteert de iteratie voor elke beginwaarde naar één van de drie oplossingen?