UvA Mastercourse

WISKUNDE IN BEELD

Docenten: Jan van de Craats en André Heck

Amstel Instituut, 15 en 21 april 2005

1 Het tekenen van driedimensionale figuren

Het volgende is, in iets gewijzigde vorm, ontleend aan *Jan van de Craats, Vectoren en Matrices*, Epsilon Uitgaven 45, 2000.

Parallelprojecties

Bij het tekenen van driedimensionale figuren in een tweedimensionaal tekenvlak wordt van verschillende methoden gebruik gemaakt. De meest natuurlijke resultaten geven perspectieftekeningen; ook foto's ontstaan op zo'n manier. De punten van het af te beelden object worden in gedachten door rechte lijnen met een *oogpunt* verbonden, en de snijpunten van die *zichtlijnen* met een denkbeeldig vlak, het *tafereel*, vormen het tweedimensionale plaatje. De wetmatigheden van het perspectieftekenen zijn pas tijdens en na de Renaissance stap voor stap ontdekt. Een goede inleiding biedt het boekje *Perspectief, hoe moet je dat zien* van Agnes Verweij en Martin Kindt.[1]

Voor technische tekeningen maakt men meestal gebruik van een vorm van *parallelprojectie*. Het voordeel daarvan is dat evenwijdige lijnen, die bij perspectieftekenen vaak overgaan in snijdende lijnen, bij parallelprojectie evenwijdig blijven, en dat lengteverhoudingen van evenwijdige lijnstukken evenmin veranderen. Men kan parallelprojectie overigens opvatten als een grensgeval van perspectiefprojectie, als namelijk het projectiecentrum, het oogpunt, 'oneindig ver weg' gekozen wordt, waardoor de zichtlijnen onderling evenwijdig worden. Iedereen die fotografeert, weet dat het verschil tussen een afstand van een tiental meters en 'oneindig ver' voor de fotograaf maar heel klein is. Ook

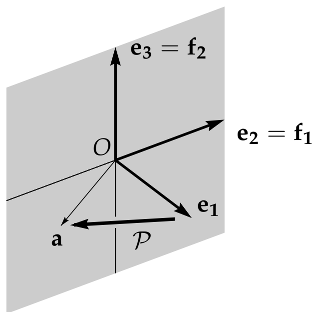
[1] Epsilon Uitgaven, Zebra-reeks nr. 2, 1999, ISBN 90-5041-052-9

schaduwbeelden van het zonlicht op een plat vlak kunnen we opvatten als ontstaan door parallelprojectie: de zon staat zo ver weg, dat we de zonnestralen als onderling evenwijdige lijnen kunnen beschouwen.

De reden voor deze uitwijding is dat we parallelprojectie kunnen opvatten als een lineaire afbeelding van de ruimte op het vlak. Daarbij moeten we natuurlijk in de ruimte en in het vlak een oorsprong kiezen, want anders zijn het geen vectorruimten. Als we het vlak (het 'tafereel') als deel van de ruimte zien, kunnen we de oorsprong in het tafereel kiezen, waardoor we hetzelfde punt O als oorsprong van de ruimte en van het vlak kunnen laten fungeren. Door een basiskeuze wordt de ruimte in een $\mathbb{R}^3$, en het vlak in een $\mathbb{R}^2$ getransformeerd. Het is daarbij mogelijk om twee van de drie basisvectoren in het tafereel te kiezen, zodat die daar ook als basis kunnen dienen. We zullen echter zien dat het soms ook voordelen kan hebben om dat niet te doen. We zullen daarom in de volgende voorbeelden de gekozen basis in de ruimte aanduiden met $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ en $\mathbf{e_3}$, en die in het vlak met $\mathbf{f_1}$ en $\mathbf{f_2}$. Steeds zullen we daarbij veronderstellen dat beide bases *orthonormaal* zijn.

Scheve parallelprojectie

Neem aan dat de basis $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ in de ruimte zo gekozen is dat $\mathbf{e_1}$ en $\mathbf{e_2}$ horizontaal zijn en $\mathbf{e_3}$ verticaal. Als tafereel nemen we het verticale vlak door $\mathbf{e_2}$ en $\mathbf{e_3}$. De projectierichting kiezen we schuin op dit vlak, waardoor $\mathbf{e_1}$ overgaat in een vector $\mathbf{a}$ in het tafereel, en $\mathbf{e_2}$ en $\mathbf{e_3}$ onveranderd blijven. We noemen deze scheve parallelprojectie $\mathcal{P}$ (zie Figuur 1). Het is duidelijk dat $\mathcal{P}$ een lineaire afbeelding is van de ruimte naar het vlak. In de ruimte hebben we al een basis



Figuur 1: Scheve parallelprojectie.

gekozen. Als we als basis in het tafereel de vectoren $\mathbf{f_1} = \mathbf{e_2}$ en $\mathbf{f_2} = \mathbf{e_3}$ kiezen, dan geldt voor zekere $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ dat

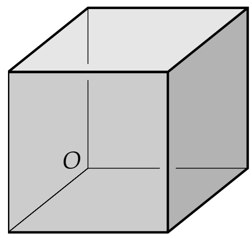
$$\mathcal{P}\mathbf{e_1} = a_1\mathbf{f_1} + a_2\mathbf{f_2}, \quad \mathcal{P}\mathbf{e_2} = \mathbf{f_1}, \quad \mathcal{P}\mathbf{e_3} = \mathbf{f_2}$$

en als we $\mathcal{P}$ dus overplanten naar een afbeelding van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^2$ met een bijbehorende matrix P, dan geldt

$$P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\quad P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

zodat de matrix P gegeven wordt door

$$P=\begin{pmatrix}a_1 & 1 & 0\\ a_2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$



Figuur 2: De eenheidskubus in scheve parallelprojectie.

Voorbeeld In Figuur 1 hebben we $a_1 = -0.5$ en $a_2 = -0.4$ gekozen. In Figuur 2 ziet u hoe de eenheidskubus $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x_i \le 1\}$ er in deze projectie uitziet. Met behulp van de matrix P kunnen we de coördinaten van een willekeurige vector $(x_1, x_2, x_3)^T$ uitdrukken in het coördinatenstelsel in het tafereel. Zo heeft bijvoorbeeld het beeld van het hoekpunt $(1, 1, 1)^T$ van de eenheidskubus de coördinatenvector

$$\begin{pmatrix}-0.5 & 1 & 0\\ -0.4 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0.6\end{pmatrix}.$$

De scheve parallelprojectie wordt veel in het onderwijs gebruikt, maar nauwelijks in de techniek. Het resultaat maakt namelijk altijd een schoolse en onprofessionele indruk. De reden is dat deze projectievorm niet overeenkomt met de manier waarop we in het algemeen de objecten om ons heen zien. Zelfs niet bij benadering. Bij een 'natuurlijke' beschouwingswijze van een getekende figuur houd je de afbeelding *recht voor je* als je haar bekijkt. Bekijk je de tekening van een grote afstand, dan zijn de zichtlijnen onderling vrijwel evenwijdig, en dan heb je dus ook 'in het echt' bij benadering met een parallelprojectie te maken. Maar om een *scheve* parallelprojectie levensecht te zien, moet je het plaatje dan ook nog scheef op de blikrichting bekijken, en dat is onnatuurlijk. Het is trouwens ook onmogelijk om met een gewoon fototoestel een kubus van grote afstand zo te fotograferen dat het beeld met Figuur 2 overeenkomt, want het stukje filmrol dat bij een opname belicht wordt, bevindt zich zo in de camera dat de lichtstralen de gevoelige plaat (vrijwel) loodrecht treffen.

Orthogonale parallelprojectie

Voor een natuurgetrouwe parallelprojectie moet de projectierichting dus *loodrecht* op het tafereel staan. In de situatie van hierboven moet het punt **a** dan met de oorsprong samenvallen. Laat $\mathcal{Q}$ deze projectie zijn. De bijbehorende matrix Q wordt nu

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voor een willekeurig punt $\mathbf{x}$ met coördinaten $(x_1, x_2, x_3)^T$ geldt $\mathcal{Q}\mathbf{x} = (x_2, x_3)^T$, dus de eerste coördinaat van $\mathbf{x}$ wordt bij deze projectiemethode eenvoudig weggelaten.

Een nadeel is echter dat de eenheidskubus als een vierkant wordt afgebeeld. Als het coördinatenstelsel overeenkomt met de 'hoofdrichtingen' van het af te beelden voorwerp, kan allerlei belangrijke grafische informatie daardoor onzichtbaar worden. Een *gedraaid* coördinatenstelsel geeft daarentegen vaak wél een realistisch plaatje. We zullen dat niet alleen laten zien, maar er ook formules voor afleiden.

Laat $\mathcal{D}_1$ de draaiing zijn over een hoek α om de drager van $\mathbf{e_3}$, dat wil zeggen om de verticale as door de oorsprong. Bij deze draaiing hoort de transformatiematrix

$$D_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De vector $(1, 0, 0)^T$ gaat immers over in de vector $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)^T$ (de derde coordinaat blijft nul). Evenzo gaat $(0, 1, 0)^T$ over in $(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)^T$. Natuurlijk blijft $(0, 0, 1)^T$ bij deze draaiing onveranderd.

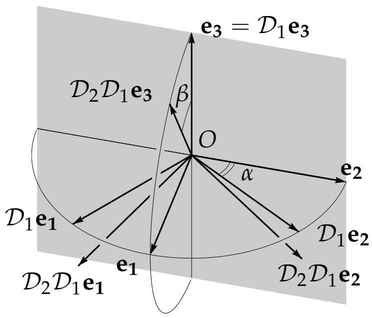
Op soortgelijke wijze zien we dat bij de draaiing $\mathcal{D}_2$ over een hoek β met als as de drager van de vector $\mathbf{e_2}$ de volgende transformatiematrix D_2 hoort:

$$D_2 = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Passen we nu eerst $\mathcal{D}_1$ toe en vervolgens $\mathcal{D}_2$ op het resultaat, dan krijgen we de transformatie $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1$ met de volgende matrix:

$$\begin{aligned} D_2D_1 &= \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

De kolommen van deze matrix zijn de beelden van de standaardbasis. Ze vormen een orthonormaal stelsel $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\mathbf{e_1}$, $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\mathbf{e_2}$, $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\mathbf{e_3}$ in de ruimte (zie Figuur 3, waar $\alpha = -33°$ en $\beta = -32°$ is genomen).



Figuur 3: Gewentelde basisvectoren.

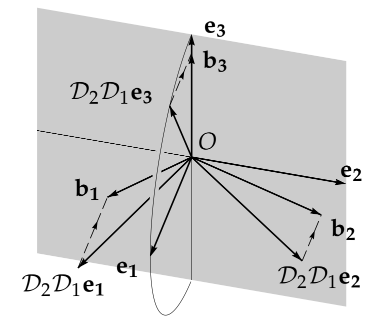
Als we hierop de orthogonale projectie $\mathcal{Q}$ op het vlak van $\mathbf{e_2}$ en $\mathbf{e_3}$ toepassen, wordt de transformatiematrix

$$QD_2D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Inderdaad wordt, zoals we al opgemerkt hebben, door $\mathcal{Q}$ telkens de eerste coordinaat verwijderd. De beelden van de standaardbasis $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ zijn de kolommen van de matrix QD_2D_1. We noemen ze

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Zie Figuur 4.



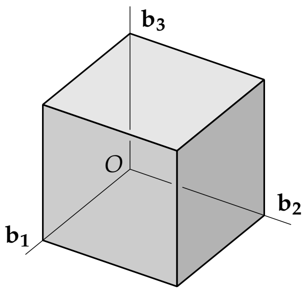
Figuur 4: De projecties $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$.

Merk op dat in dit geval de derde basisvector weer langs de verticale as valt. Daar kunnen we in het algemeen bij iedere orthogonale projectie voor zorgen:

bij het tekenen van een driedimensionaal assenkruis in het vlak kunnen we altijd één van de assen verticaal tekenen. Meestal neemt men daarvoor de as die ook 'in werkelijkheid' verticaal staat. De hier gepresenteerde formules zijn dan ook algemeen: bij elke orthogonale parallelprojectie kan men hoeken α en β vinden zo, dat de bovenstaande formules die projectie beschrijven.

Hierboven hebben we verondersteld dat we de basis in de ruimte hebben gedraaid terwijl het tafereel verticaal blijft. We kunnen de formules natuurlijk ook zo interpreteren, dat we de basis in de ruimte onveranderd laten, en juist het tafereel, en daarmee ook de projectierichting (want het is een orthogonale projectie), wentelen. Dat is ook wat men zich meestal goed kan voorstellen bij tekeningen van gebouwen, meubels, LEGO-figuren (ook de bouwtekeningen daarvan zijn altijd in orthogonale parallelprojectie getekend!), technische tekeningen van motoren, enzovoort.

Door α en β te variëren, kunnen we het tafereel, en daarmee ook de projectie van de eenheidskubus, allerlei verschillende gedaanten laten aannemen. Daarbij stellen $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$ steeds de projecties van de standaardbasis in de ruimte voor.



Figuur 5: Orthogonale projectie van de eenheidskubus.

2 Orthogonale parallelprojectie in PostScript

De code van de eps-file waarmee Figuur 5 gemaakt is (zonder de belettering), luidt als volgt.

```
%!PS-Adobe-2.0 EPSF-2.0
%%BoundingBox: 0 0 280 270
%%%%%%%%% filenaam: kubus1.eps
2 setlinejoin
115 115 translate
%%%%%%%% schaling (eenheid ca. 5cm)
```

```
/sc 150 def
sc sc scale
%%%%%%% lijndiktes
/lw1 1.5 sc div def  % dik
/lw2 .7 sc div def   % dun
%%%%%%% grijstinten
/g1 .7 def
/g2 .8 def
/g3 .9 def
%%%%%%% projectiehoeken
/alpha -33 def
/beta -32 def
%%%%%%% projecties van de eenheidsvectoren
/x1 alpha sin def
/y1 alpha cos beta sin mul def
/x2 alpha cos def
/y2 alpha sin beta sin neg mul def
/x3 0 def
/y3 beta cos def
lw1 setlinewidth
%%%%%%%%%%% zichtbare kubusvlakken
gsave
newpath
  x1 y1 moveto
  x2 y2 rlineto
  x3 y3 rlineto
  x2 neg y2 neg rlineto
  closepath
gsave g2 setgray fill grestore stroke
newpath
  x3 y3 moveto
  x1 y1 rlineto
  x2 y2 rlineto
  x1 neg y1 neg rlineto
  closepath
gsave g3 setgray fill grestore stroke
newpath
  x2 x3 add y2 y3 add moveto
  x1 y1 rlineto
  x3 neg y3 neg rlineto
  x1 neg y1 neg rlineto
  closepath
gsave g1 setgray fill grestore stroke
grestore
%%%%%%%%%%%% coordinaatassen met onderbrekingen
lw2 setlinewidth
%%%%%%% onderbrekingsfactoren
/f1 .45 def
/f2 .31 def
/f3 .21 def
```

```
/d .08 def
newpath
  0 0 moveto
  x1 1.2 mul y1 1.2 mul lineto
stroke
newpath
  0 0 moveto
  x2 f2 mul y2 f2 mul lineto
  stroke
  x2 f2 d add mul y2 f2 d add mul moveto
  x2 1.2 mul y2 1.2 mul lineto
stroke
newpath
  0 0 moveto
  x3 f3 mul y3 f3 mul lineto
  stroke
  x3 f3 d add mul y3 f3 d add mul moveto
  x3 1.2 mul y3 1.2 mul lineto
stroke
showpage
```

Het kan handig zijn om in een eps-file zo'n orthogonale projectie in een *procedure* onder te brengen zodat je dan paden rechtstreeks in hun 3D-coördinaten kunt beschrijven. Hieronder is weer de bovenstaande kubus geprogrammeerd, maar nu met behulp van een procedure `coord` die de coördinaten `x y z` van de stack neemt, en omzet in de geprojecteerde coördinaten `X Y`. De code van die procedure luidt:

```
/coord {
  /z exch def /y exch def /x exch def
  x x1 mul y x2 mul add z x3 mul add
  x y1 mul y y2 mul add z y3 mul add} bind def
```

Hier is het gehele programma:

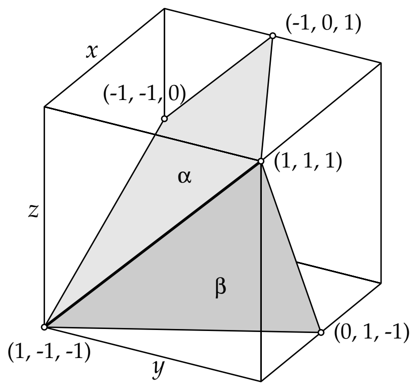
```
%!PS-Adobe-2.0 EPSF-2.0
%%BoundingBox: 0 0 280 270
%%%%%%%%% filenaam: kubus2.eps
2 setlinejoin
115 115 translate
%%%%%%%% schaling (eenheid ca. 5cm)
/sc 150 def
sc sc scale
%%%%%%% lijndiktes
/lw1 1.5 sc div def  % dik
/lw2 .7 sc div def   % dun
%%%%%% grijstinten
```

```
/g1 .7 def
/g2 .8 def
/g3 .9 def
%%%%%%% projectiehoeken
/alpha -33 def
/beta -32 def
%%%%%%% projecties van de eenheidsvectoren
/x1 alpha sin def
/y1 alpha cos beta sin mul def
/x2 alpha cos def
/y2 alpha sin beta sin neg mul def
/x3 0 def
/y3 beta cos def
%%%%%%%%%%%%% omzetprocedure
/coord {
  /z exch def /y exch def /x exch def
  x x1 mul y x2 mul add z x3 mul add
  x y1 mul y y2 mul add z y3 mul add} bind def
lw1 setlinewidth
%%%%%%%%%%% zichtbare kubusvlakken
newpath
  1 0 0 coord moveto
  1 1 0 coord lineto
  1 1 1 coord lineto
  1 0 1 coord lineto
  closepath
gsave g2 setgray fill grestore stroke
newpath
  0 0 1 coord moveto
  1 0 1 coord lineto
  1 1 1 coord lineto
  0 1 1 coord lineto
  closepath
gsave g3 setgray fill grestore stroke
newpath
  0 1 0 coord moveto
  0 1 1 coord lineto
  1 1 1 coord lineto
  1 1 0 coord lineto
  closepath
gsave g1 setgray fill grestore stroke
%%%%%%%%%%%% coordinaatassen met onderbrekingen
lw2 setlinewidth
%%%%%%% onderbrekingsfactoren
/f1 .45 def
/f2 .31 def
/f3 .21 def
/d .08 def
newpath
  0 0 0 coord moveto
```

```
  1.2 0 0 coord lineto
stroke
newpath
  0 0 0 coord moveto
  0 f2 0 coord lineto
  stroke
  0 f2 d add 0 coord moveto
  0 1.2 0 coord lineto
stroke
newpath
  0 0 0 coord moveto
  0 0 f3 coord lineto
  stroke
  0 0 f3 d add coord moveto
  0 0 1.2 coord lineto
stroke
showpage
```

Opgave: Teken in een orthogonaal geprojecteerd assenstelsel het deel van het vlak $x + y + z = 2$ dat in het eerste octant ligt. Kleur dat vlakdeel blauw.
Opgave: Teken de octaëder met hoekpunten $(\pm 2, 0, 0)$, $(0, \pm 2, 0)$, $(0, 0, \pm 2)$.

Hiernaast staat een voorbeeld van een kubus met twee vlakken erin. Het komt uit het boek Basiswiskunde, hoofdstuk 15. De kubus heeft hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ en de twee snijvlakken zijn $\alpha: \; x - 2y + 2z = 1$ en $\beta: \; 2x + y - z = 2$. De bijbehorende PostScript-code staat hieronder.




```
%!PS-Adobe-2.0 EPSF-2.0
%%BoundingBox: 100 100 400 400
%%%%%%%%%%%% filenaam: kubus3.eps
2 setlinejoin
/punt {2 eh div 0 360 arc gsave 1 setgray fill grestore stroke} def
252 250 translate
%%%%%%%%%%%%% eenheid
/eh 90 def
eh eh scale
%%%%%%%%%%%%% projectiehoeken
```

```
/alpha -29 def
/beta -27 def
%%%%%%%%%%%%% projectieformules
/xa alpha sin def
/ya alpha cos beta sin mul def
/xb alpha cos def
/yb alpha sin beta sin neg mul def
/xc 0 def
/yc beta cos def
%%%%%%%%%%%%% coordinatenomzetting
/coord {
  /z exch def /y exch def /x exch def
  x xa mul y xb mul add z xc mul add
  x ya mul y yb mul add z yc mul add} bind def
%%%%%%%%%%%%% lettertypes
/f1 {/Palatino-Italic findfont 18 eh div scalefont setfont} bind def
/f3 {/Palatino findfont 16 eh div scalefont setfont} bind def
/fs {/Symbol findfont 16 eh div scalefont setfont} bind def
%%%%%%%%%%%%% lijndiktes
/lw1 1.4 eh div def
/lw2 1 eh div def
/lw3 2 eh div def
%%%%%%%%%%%%% grijstinten
/grijs1 0.9 def
/grijs2 0.8 def
/grijs3 0.7 def
%%%%%%%%%% kubusribben tekenen
lw2 setlinewidth
newpath
-1 -1 -1 coord moveto
-1 1 -1 coord lineto
-1 1 1 coord lineto
-1 -1 1 coord lineto
-1 -1 -1 coord lineto
-1 -1 1 coord lineto
1 -1 1 coord lineto
1 -1 -1 coord lineto
-1 -1 -1 coord lineto
-1 1 -1 coord lineto
1 1 -1 coord lineto
1 -1 -1 coord lineto
stroke
%%%%%%%% vlak1
lw2 setlinewidth
newpath
1 1 1 coord moveto
-1 0 1 coord lineto
-1 -1 0 coord lineto
1 -1 -1 coord lineto
closepath
```

```
gsave grijs1 setgray fill grestore stroke
%%%%%%%%% vlak2
newpath
1 1 1 coord moveto
0 1 -1 coord lineto
1 -1 -1 coord lineto
closepath
gsave grijs2 setgray fill grestore stroke
%%%%%%%%%% kubusribben nogmaals
lw2 setlinewidth
newpath
1 1 1 coord moveto
1 -1 1 coord lineto
1 1 1 coord lineto
1 1 -1 coord lineto
1 1 1 coord lineto
-1 1 1 coord lineto
stroke
%%%%%%%%%%% snijlijn vlak1 en vlak2 dikker
gsave
lw3 setlinewidth
newpath
1 1 1 coord moveto
1 -1 -1 coord lineto
stroke
grestore
%%%%%%%%%%%% punten
1 1 1 coord punt
1 -1 -1 coord punt
-1 0 1 coord punt
-1 -1 0 coord punt
0 1 -1 coord punt
%%%%%%%%%%%%% belettering
1 1 1 coord moveto .1 -.05 rmoveto f3 (\050) show (1, 1, 1) show (\051) show
1 -1 -1 coord moveto -.3 -.25 rmoveto f3 (\050) show (1, ) show
(-1, ) show (-1) show (\051) show
0 1 -1 coord moveto .1 -.05 rmoveto f3 (\050) show (0, 1, ) show
(-1) show (\051) show
-1 0 1 coord moveto .1 .05 rmoveto f3 (\050) show (-1, 0, 1) show (\051) show
-1 -1 0 coord moveto -.5 .15 rmoveto f3 (\050) show (-1, ) show
(-1, 0) show (\051) show
1 0 0 coord moveto .2 .5 rmoveto fs (\141) show
1 0 0 coord moveto .5 -.4 rmoveto fs (\142) show
1 0 -1 coord moveto 0 -.15 rmoveto f1 (y) show
1 -1 0 coord moveto -.13 0 rmoveto f1 (z) show
0 -1 1 coord moveto -.15 0 rmoveto f1 (x) show
showpage
```

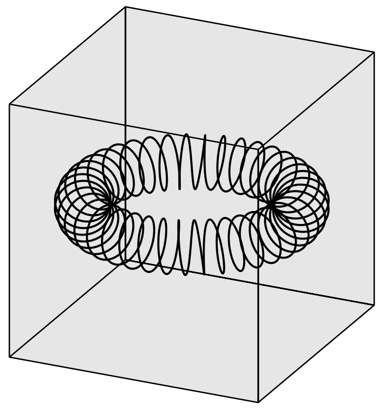
Opgave: Vul deze figuur aan met de doorsnede van de kubus met het vlak $\gamma: \; 2x - 4y - z = -3$ dat door de punten $(1,1,1)$, $(-1,0,1)$ en $(0,1,-1)$ gaat.

3 Ruimtekrommen

Met dezelfde methode kunnen we een ruimtekromme tekenen die in parametervorm is gegeven. De ruimtelijke indruk kan worden versterkt door er een box in de vorm van een omvattende kubus omheen te tekenen. De kromme hiernaast heeft als parametrisatie

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{5}((4+\sin 40t)\cos t) \\ y(t) &= \frac{1}{5}((4+\sin 40t)\sin t) \\ z(t) &= \frac{1}{5}\cos 40t \end{cases}$$

en de omvattende kubus heeft de hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Hieronder staat de code van de eps-file.



```
%!PS-Adobe-2.0 EPSF-2.0
%%BoundingBox: 100 100 400 400
%%%%%%%%%%%% filenaam: torusspiraal.eps
2 setlinejoin
255 250 translate
%%%%%%%%% eenheid
/eh 100 def
eh eh scale
%%%%%%%%%% projectie
/alpha -25 def
/beta -23 def
/xa alpha sin def
/ya alpha cos beta sin mul def
/xb alpha cos def
/yb alpha sin beta sin neg mul def
/xc 0 def
/yc beta cos def
/coord {
  /z exch def /y exch def /x exch def
  x xa mul y xb mul add z xc mul add
  x ya mul y yb mul add z yc mul add} bind def
%%%%%%%%% lijndiktes
/lw2 1 eh div def
/lw3 1.5 eh div def
%%%%%%%%% grijstinten
/grijs1 0.9 def
%%%%%%%%% constanten en factoren
/pi 3.1415962 def
```

```
/N 40 def
%%%%%%%%% parametrisatie
%%%%%%%%% (1/5)((4 + sin N t) cos t, (4 + sin N t) sin t, cos N t)
/X {/tx exch def tx N mul sin 4 add tx cos mul 5 div} bind def
/Y {/ty exch def ty N mul sin 4 add tx sin mul 5 div} bind def
/Z {/tz exch def tz N mul cos 5 div} bind def
%%%%%%%%%% kubusachterkant
lw2 setlinewidth
newpath
-1 -1 -1 coord moveto
-1 1 -1 coord lineto
-1 1 1 coord lineto
-1 -1 1 coord lineto
-1 -1 -1 coord lineto
-1 -1 1 coord lineto
1 -1 1 coord lineto
1 -1 -1 coord lineto
-1 -1 -1 coord lineto
-1 1 -1 coord lineto
1 1 -1 coord lineto
1 -1 -1 coord lineto
gsave grijs1 setgray fill grestore stroke
%%%%%%%% spiraal
lw3 setlinewidth
newpath
/t -180 def
t X t Y t Z coord moveto
1800 {
/t t .2 add def
t X t Y t Z coord lineto
} repeat
stroke
%%%%%%%%%% kubusvoorkant
lw2 setlinewidth
newpath
1 -1 1 coord moveto
1 1 1 coord lineto
1 1 -1 coord lineto
1 1 1 coord lineto
-1 1 1 coord lineto
stroke
showpage
```

In de bovenstaande parametrisatie kon de parameter t in graden genomen worden omdat t alleen maar in goniometrische functies (die PostScript altijd in graden neemt) voorkwam. In de onderstaande opgave kan dat niet meer. Daar wordt t in radialen gedefinieerd. Omrekenen kan met behulp van een procedure `deg` die radialen in graden omzet: `/deg 180 mul pi div def`.

Opgave: Maak een tekening van de ruimtekromme $(t\cos 24\pi t, t\sin 24\pi t, t)$ met $-1 \leq t \leq 1$.

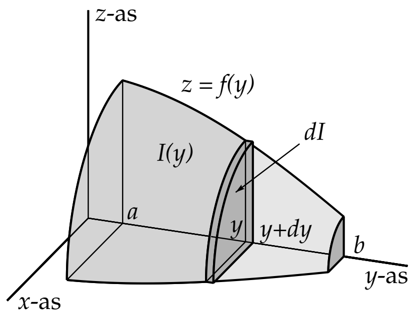
4 Omwentelingsoppervlakken

In hoofdstuk 23 van het boek Basiswiskunde komt het volgende fragment voor:

Stel dat de functie $z = f(y)$ continu en niet-negatief is op het interval $[a, b]$. Het lichaam dat wordt begrensd door de vlakken $y = a$, $y = b$ en het oppervlak dat ontstaat door de grafiek van deze functie rond de y-as te wentelen, noemen we K. In de figuur hieronder is slechts het kwart gedeelte van K geschetst dat in het eerste octant ligt. (Het eerste octant is het deel van de ruimte waarvoor $x \geq 0, y \geq 0$ en $z \geq 0$.) Wat is de inhoud van K?

Kies een getal y tussen a en b. De inhoud van het deel van K dat zich links van het verticale vlak door $(0, y, 0)$ bevindt, noemen we $I(y)$. De gevraagde inhoud van K is dan gelijk aan $I(b)$.

Voor kleine positieve dy is de toename $\Delta I = I(y + dy) - I(y)$ gelijk aan de inhoud van het dunne plakje van K dat tussen de verticale vlakken door de punten $(0, y, 0)$ en $(0, y + dy, 0)$ ligt. Dat plakje valt voor kleine positieve dy vrijwel samen met het in de figuur aangegeven dunne cilinderschijfje met dikte dy en cirkels met straal $f(y)$ als linker- en rechterbegrenzing.



Tot zo ver de boektekst. Het gaat ons natuurlijk om het plaatje. Hieronder staat de code. Kijk zelf naar alle tussenstappen door van bovenaf bij elke regel waar `%showpage` staat, het teken `%` even weg te halen. Je krijgt dan de constructie tot op dat moment te zien.

```
%!PS-Adobe-2.0 EPSF-2.0
%%BoundingBox: 0 0 235 182
%%%%%%%%%%% filenaam: omwenteling.eps
2 setlinejoin
/punt {1.5 eh div 0 360 arc gsave 1 setgray fill grestore stroke} def
/arrowhead {
   gsave
    currentpoint
    4 2 roll exch 4 -1 roll exch
```

```
    sub 3 1 roll sub
    exch atan rotate dup scale
    -7 2 rlineto
    1 -2 rlineto
    -1 -2 rlineto
    closepath fill
   grestore
   newpath
} bind def
50 60 translate
/eh 30 def
eh eh scale
/lijn1 1.2 eh div def
/lijn2 .7 eh div def
lijn1 setlinewidth
/grijs1 .9 def
/grijs2 .83 def
/grijs3 .76 def
/grijs4 .7 def
%%%%%%%%%%%%% orthogonale projectie
/alpha -21 def
/beta -23 def
/xa alpha sin def
/ya alpha cos beta sin mul def
/xb alpha cos def
/yb alpha sin beta sin neg mul def
/xc 0 def
/yc beta cos def
/coord {
  /z exch def /y exch def /x exch def
  x xa mul y xb mul add z xc mul add
  x ya mul y yb mul add z yc mul add} bind def
%%%%%%%% functievoorschrift:
/f {/t exch 4 div def 1 t t mul 2 div sub t t mul t mul t mul 24 div add 3 mul} bind def
%%%%%%%%% keuze en verdeling van het interval [a,b] met tussenpunt y0
/n 45 def
/n1 25 def
/a .7 def
/del .1 def
/b a del n mul add def
/y0 a del n1 mul add def
%%%%%%%%% assen
newpath
0 0 0 coord moveto
4.3 0 0 coord lineto
0 0 0 coord lineto
0 6.5 0 coord lineto
0 0 0 coord lineto
0 0 4.3 coord lineto
stroke
```

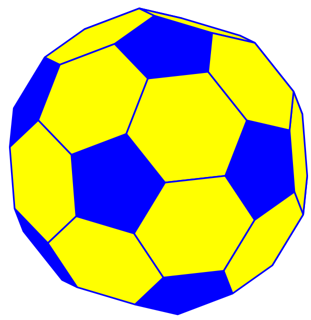
```
%%%%%%%%%%% omwentelingsoppervlak, eerst in lichtgrijs
/y a def
/phi 0 def
newpath
y f y 0 coord moveto
90 {
/phi phi 1 add def
phi cos y f mul y phi sin y f mul coord lineto
} repeat
n {
/y y del add def
0 y y f coord lineto
} repeat
90 {
/phi phi 1 sub def
phi cos y f mul y phi sin y f mul coord lineto
} repeat
n {
/y y del sub def
y f y 0 coord lineto
} repeat
gsave grijs1 setgray fill grestore
stroke
%showpage
/y a def
/phi 0 def
newpath
y f y 0 coord moveto
90 {
/phi phi 1 add def
phi cos y f mul y phi sin y f mul coord lineto
} repeat
n1 {
/y y del add def
0 y y f coord lineto
} repeat
90 {
/phi phi 1 sub def
phi cos y f mul y phi sin y f mul coord lineto
} repeat
n1 {
/y y del sub def
y f y 0 coord lineto
} repeat
gsave grijs2 setgray fill grestore
stroke
%showpage
lijn2 setlinewidth
%%%%%%%%% assen, dun
newpath
```

```
0 0 0 coord moveto
4.3 0 0 coord lineto
0 0 0 coord lineto
0 5.9 0 coord lineto
0 0 0 coord lineto
0 0 4.3 coord lineto
stroke
newpath
a f a 0 coord moveto
0 a 0 coord lineto
0 a a f coord lineto
stroke
%showpage
lijn1 setlinewidth
newpath
b f b 0 coord moveto
0 b 0 coord lineto
0 b b f coord lineto
/phi 90 def
90 {
phi cos b f mul b phi sin b f mul coord lineto
/phi phi 1 sub def
} repeat
gsave grijs4 setgray fill grestore
stroke
%showpage
/dely .15 def  %%%%%%%% dikte van het plakje
newpath
0 y0 y0 f coord moveto
/phi 90 def
90 {
/phi phi 1 sub def
phi cos y0 f mul y0 phi sin y0 f mul coord lineto
} repeat
phi cos y0 f mul y0 dely add phi sin y0 f mul coord lineto
90 {
/phi phi 1 add def
phi cos y0 f mul y0 dely add phi sin y0 f mul coord lineto
} repeat
closepath
gsave grijs4 setgray fill grestore
stroke
newpath
y0 f y0 dely add 0 coord moveto
0 y0 dely add 0 coord lineto
0 y0 dely add y0 f coord lineto
/phi 90 def
90 {
phi cos y0 f mul y0 dely add phi sin y0 f mul coord lineto
/phi phi 1 sub def
```

```
} repeat
gsave grijs4 setgray fill grestore
stroke
%showpage
lijn2 setlinewidth
newpath
0 y0 y0 f coord moveto
0 y0 0 coord lineto
y0 f y0 0 coord lineto
stroke
newpath
0 y0 .7 sub 0 coord moveto
0 y0 dely add 0 coord lineto
stroke
%showpage
newpath
0 y0 1.1 add y0 f .1 add coord moveto
0 y0 -.2 add y0 f -1.1 add coord lineto
stroke
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% pijlpunt
newpath
0 y0 -.2 add y0 f -1.1 add coord moveto
.025 0 y0 1.1 add y0 f .1 add coord arrowhead
%%%%%%%%%%%%% belettering
/f1 {/Palatino-Italic findfont 14 eh div scalefont setfont} bind def
/f2 {/Palatino findfont 10 eh div scalefont setfont} bind def
/f3 {/Palatino findfont 14 eh div scalefont setfont} bind def
/f4 {/Palatino-Bold findfont 14 eh div scalefont setfont} bind def
0 .8 .1 coord moveto f1 (a) show
0 3.5 .15 coord moveto f1 (y+dy) show
0 2.9 .15 coord moveto f1 (y) show
4.5 .3 -.05 coord moveto f1 (x) show f3 (-as) show
0 5.4 .1 coord moveto f1 (b) show
0 .15 4.1 coord moveto f1 (z) show f3 (-as) show
.95 6 -.05 coord moveto f1 (y) show f3 (-as) show
0 y0 1.2 add y0 f .2 add coord moveto f1 (dI) show
0 1.4 1.4 coord moveto f1 (I(y)) show
0 1.9 2.9 coord moveto f1 (z = f(y)) show
showpage
```

5 Het voetbalveelvlak

Hiernaast is het voetbalveelvlak getekend, het halfregelmatige veelvlak dat ontstaat als je de hoekpunten van een regelmatig twintigvlak (icosaëder) afknot. Het heeft twaalf regelmatige vijfhoeken en twintig regelmatige zeshoeken als zijvlakken. Hieronder staat de code waarmee het gemaakt is. Je kunt opmerken dat het tekenen van de vijfhoeken eleganter geprogrammeerd moet kunnen worden. Dat is een aardige huiswerkopgave. Aan de andere kant is de structuur wel duidelijk, en met copy en paste is het typewerk ook goed te doen.



```
%!PS-Adobe-2.0 EPSF-2.0
%%BoundingBox: 0 0 400 400
%%%%%%%%%%%%%% filenaam: voetbal.eps
2 setlinejoin
200 200 translate
128 rotate
/eh 2.2 def
eh eh scale
/gr1 0.2 def %%%%% grijstint vijfhoeken
/gr2 0.9 def %%%%% grijstint zeshoeken
/kleur1 {0 0 1} def  %%%%%%% kleur vijfhoeken
/kleur2 {1 1 0} def  %%%%%%% kleur zeshoeken
/R 98 def
/lw1 2 eh div def   %%%% lijndikte
/c5 72 cos def
/s5 72 sin def
%%%%%%%%%% tangens
/tan {
  /a exch def
  a sin a cos div
} bind def
%%%%%%%% projectiehoeken:
/alpha 32 def
/beta 7 def
%%%%%%%%%% geprojecteerde basisvectoren:
/xa alpha sin def
/ya alpha cos beta sin mul def
/xb alpha cos def
/yb alpha sin beta sin neg mul def
```

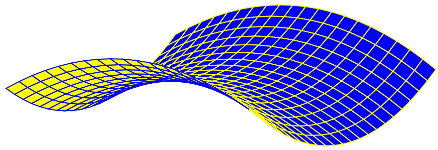
```
/xc 0 def
/yc beta cos def
%%%%%%%%% orthogonale projectie:
/coord {
/z exch def
/y exch def
/x exch def
x xa mul y xb mul add z xc mul add
x ya mul y yb mul add z yc mul add
} bind def

%%%%%%%%% cosinus hoek vector (n1,n2,n3)
%%%%%%%%% met projectierichting
/projCos {
/n3 exch def
/n2 exch def
/n1 exch def
/nm n1 n1 mul n2 n2 mul add n3 n3 mul add sqrt def
n1 alpha cos mul beta cos mul
n2 alpha sin mul neg beta cos mul add
n3 beta sin mul neg add nm div} bind def
%%%%%%%%% cross product (aa1,aa2,aa3)X(bb1,bb2,bb3)
/cp {
/bb3 exch def
/bb2 exch def
/bb1 exch def
/aa3 exch def
/aa2 exch def
/aa1 exch def
aa2 bb3 mul aa3 bb2 mul sub
aa3 bb1 mul aa1 bb3 mul sub
aa1 bb2 mul aa2 bb1 mul sub
} bind def

%%%%%%%%% tekenen van een regelmatige zeshoek binnen een gelijkzijdige driehoek
%%%%%%%%% hoekpunten: a1 a2 a3 b1 b2 b3 c1 c2 c3
/driehoek {
/c3 exch def  /c2 exch def  /c1 exch def
/b3 exch def  /b2 exch def  /b1 exch def
/a3 exch def  /a2 exch def  /a1 exch def
/proj
  c1 a1 sub c2 a2 sub c3 a3 sub b1 a1 sub b2 a2 sub b3 a3 sub
  cp projCos def
proj 0 gt {
  newpath
  a1 2 mul b1 add 3 div a2 2 mul b2 add 3 div a3 2 mul b3 add 3 div coord moveto
  b1 2 mul a1 add 3 div b2 2 mul a2 add 3 div b3 2 mul a3 add 3 div coord lineto
  b1 2 mul c1 add 3 div b2 2 mul c2 add 3 div b3 2 mul c3 add 3 div coord lineto
  c1 2 mul b1 add 3 div c2 2 mul b2 add 3 div c3 2 mul b3 add 3 div coord lineto
  c1 2 mul a1 add 3 div c2 2 mul a2 add 3 div c3 2 mul a3 add 3 div coord lineto
```

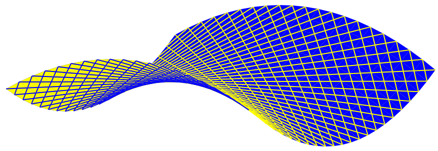
```
  a1 2 mul c1 add 3 div a2 2 mul c2 add 3 div a3 2 mul c3 add 3 div coord lineto
  closepath
  gsave kleur2 setrgbcolor fill grestore
  stroke
  } if
} bind def
%%%%%%%%% rotatie over 72 graden om z-as
/rot5z {
/z exch def
/y exch def
/x exch def
x c5 mul y s5 mul sub
x s5 mul y c5 mul add
z
} bind def
%%%%%%% phi: halve hoek tussen twee 5-assen
/phi 2 1 atan 2 div def
/c phi 2 mul cos def
/s phi 2 mul sin def
%%%%%%%%% spiegeling in bissectricevlak van twee 5-assen
%%%%%%%%% (de z-as en as in het xz-vlak)
/r2p {
/z exch def
/y exch def
/x exch def
x c mul neg z s mul add
y
x s mul z c mul add
} bind def
%%%%%%%%%%%%% verdere samengestelde rotaties
/rot1 {r2p rot5z} def
/rot2 {r2p rot5z rot5z} def
/rot3 {r2p rot5z rot5z rot5z} def
/rot4 {r2p rot5z rot5z rot5z rot5z} def
/rot5 {r2p rot5z rot5z rot5z rot5z rot5z} def


%%%%%%% basisvectoren (eutactische ster)
0 0 R               %%%%%% langs z-as
/w0 exch def /v0 exch def /u0 exch def
0 0 R r2p           %%%%%% in xz-vlak
/w1 exch def /v1 exch def /u1 exch def
0 0 R r2p rot5z
/w2 exch def /v2 exch def /u2 exch def
0 0 R r2p rot5z rot5z
/w3 exch def /v3 exch def /u3 exch def
0 0 R r2p rot5z rot5z rot5z
/w4 exch def /v4 exch def /u4 exch def
0 0 R r2p rot5z rot5z rot5z rot5z
/w5 exch def /v5 exch def /u5 exch def
```

```
%%%%%%%%%%% array van 10 van de 12 hoekpunten icosaeder (niet top en bottom)
/vert [[u1 v1 w1] [u1 neg v1 neg w1 neg]
       [u2 v2 w2] [u2 neg v2 neg w2 neg]
       [u3 v3 w3] [u3 neg v3 neg w3 neg]
       [u4 v4 w4] [u4 neg v4 neg w4 neg]
       [u5 v5 w5] [u5 neg v5 neg w5 neg]] def

lw1 setlinewidth
%%%%%%%%%% alle vijfhoeken tekenen
kleur1 setrgbcolor
gsave
/px u0 2 mul u1 add 3 div def
/py v0 2 mul v1 add 3 div def
/pz w0 2 mul w1 add 3 div def
2 {
newpath
 px py pz coord moveto
 px py pz rot5z coord lineto
 px py pz rot5z rot5z coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot5z coord lineto
 closepath
 gsave fill grestore
stroke
newpath
 px py pz rot1 coord moveto
 px py pz rot5z rot1 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot1 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot1 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot5z rot1 coord lineto
 closepath
 gsave fill grestore
stroke
newpath
 px py pz rot2 coord moveto
 px py pz rot5z rot2 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot2 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot2 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot5z rot2 coord lineto
 closepath
 gsave fill grestore
stroke
newpath
 px py pz rot3 coord moveto
 px py pz rot5z rot3 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot3 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot3 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot5z rot3 coord lineto
 closepath
```

```
 gsave fill grestore
stroke
newpath
 px py pz rot4 coord moveto
 px py pz rot5z rot4 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot4 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot4 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot5z rot4 coord lineto
 closepath
 gsave fill grestore
stroke
newpath
 px py pz rot5 coord moveto
 px py pz rot5z rot5 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot5 coord lineto
 px py pz rot5z rot5z rot5z rot5z rot5 coord lineto
 closepath
 gsave fill grestore
stroke
 /px px neg def
 /py py neg def
 /pz pz neg def
} repeat
%showpage
%%%%%%%%%%%% zichtbare zeshoeken tekenen
gsave
/i 0 def
5 {
u0 v0 w0
vert i 10 mod get aload pop
vert i 2 add 10 mod get aload pop
driehoek
vert i 10 mod get aload pop
vert i 7 add 10 mod get aload pop
vert i 2 add 10 mod get aload pop
driehoek
vert i 7 add 10 mod get aload pop
vert i 9 add 10 mod get aload pop
vert i 2 add 10 mod get aload pop
driehoek
u0 neg v0 neg w0 neg
vert i 3 add 10 mod get aload pop
vert i 1 add 10 mod get aload pop
driehoek
/i i 2 add def
} repeat
grestore
showpage
```

6 Een zadelvlak





Als voorbeeld van een geparametriseerd oppervlak is hiernaast het zadelvlak $z = x^2 - y^2$ getekend. Het heeft als bijzonderheid dat het twee scharen van rechte lijnen bevat (onderste plaatje). De ene schaar bestaat uit de snijlijnen van de vlakkenparen $z = p(x - y)$, $x + y = p$ en de andere schaar bestaat uit de snijlijnen van de vlakkenparen $z = p(x + y)$, $x - y = p$. Als parameters kun je x en y nemen. De parameterlijnen zijn dan de parabolen $(x, c, x^2 - c^2)$ en $(d, y, d^2 - y^2)$ (bovenste plaatje).

De tekeningen zijn gemaakt door *patches* te tekenen: kleine vierhoekjes met parameterwaarden (x, y), $(x + dx, y)$, $(x + dx, y + dy)$, $(x, y + dy)$. De patches zijn hier zo gekozen, dat de diagonalen ervan precies de scharen rechte lijnen vormen. Voor de zichtbare onderkant van het oppervlak zijn de kleuren verwisseld. Voor het tekenen van die onderkant is de naar boven gerichte normaal $\mathbf{n} = (-2x, 2y, 1)$ van het zadelvlak gebruikt. Als beeld van deze vector onder de rotatie

$$D_2D_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

(zie bladzijde 4) ten opzichte van het tafereel naar achteren steekt, zien we daar de onderkant van het zadelvlak, en anders de bovenkant. Dit wordt bepaald door het teken van de eerste component, en die is $-2x\cos\alpha\cos\beta - 2y\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta$. Deze uitdrukking is het inproduct van de vector $\mathbf{n}$ en de vector die gevormd wordt door de eerste rij van de matrix D_2D_1. In het onderstaande programma heten de drie componenten van die rij respectievelijk `za`, `zb` en `zc`.

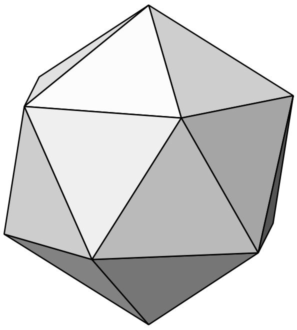
```
%!PS-Adobe-2.0 EPSF-2.0
%%BoundingBox: 0 0 310 300
%%%%%%%%%%%% filenaam: zadelvlak.eps
155 230 translate
/eh 350 def
eh eh scale
/kleur2 {1 1 0} def
/kleur1 {0 0 1} def
/lw1 .7 eh div def
lw1 setlinewidth
```

```
%%%%%%%%%%% projectiehoeken
/alpha -33 def
/beta -12 def
%%%%%%%%%%% orthogonale projectie
/xa alpha sin def
/ya alpha cos beta sin mul def
/za alpha cos beta cos mul def
/xb alpha cos def
/yb alpha sin beta sin neg mul def
/zb alpha sin beta cos mul neg def
/xc 0 def
/yc beta cos def
/zc beta sin neg def
/coord {
  /zz exch def /yy exch def /xx exch def
  xx xa mul yy xb mul add zz xc mul add
  xx ya mul yy yb mul add zz yc mul add} bind def
%%%%%%%%% zadelvlak:  z = x^2 - y^2
/z {/y exch def /x exch def x x mul y y mul sub} bind def
/delx .03 def /dely .03 def
%%%%%%%% tekening, eerst bovenste plaatje (bool2 = 0),
%%%%%%%% dan het onderste (bool2 = 1).
/bool2 0 def
2 {%%%%%%%%% bovenkant: bool1 = 0
   %%%%%%%%% onderkant: bool1 = 1
 /bool1 0 def
 2 {/x -.3 def
  20 {/y -.3 def
   20 {%%%%%%%% patch tekenen
     x y x y z coord /y1 exch def /x1 exch def
     /x x delx add def
     x y x y z coord /y2 exch def /x2 exch def
     /y y dely add def
     x y x y z coord /y3 exch def /x3 exch def
     /x x delx sub def
     x y x y z coord /y4 exch def /x4 exch def
     /y y dely sub def
     newpath
     x1 y1 moveto
     x2 y2 lineto
     x3 y3 lineto
     x4 y4 lineto
     closepath
     bool1 0 eq %%%%%%%%% ifelse constructie
      { kleur2 setrgbcolor
        gsave
        kleur1 setrgbcolor
        fill
        grestore
        bool2 0 eq %%%%%%% ifelse constructie
```

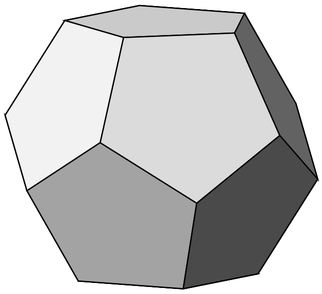
```
          {stroke}{newpath
          x1 y1 moveto
          x3 y3 lineto
          stroke
          newpath
          x2 y2 moveto
          x4 y4 lineto
          stroke}
        ifelse
      }{%%%%%%%% als patch zichtbaar is van onderaf:
        %%%%%%%% (if constructie)
        x -2 mul za mul y 2 mul zb mul add zc add 0 le
        { kleur1 setrgbcolor
          gsave
          kleur2 setrgbcolor
          fill
          grestore
          bool2 0 eq %%%%%%%%%% ifelse constructie
            {stroke}{newpath
            x1 y1 moveto
            x3 y3 lineto
            stroke
            newpath
            x2 y2 moveto
            x4 y4 lineto
            stroke}
          ifelse
        } if
      } ifelse
   /y y dely add def
   } repeat
  /x x delx add def
  } repeat
  /bool1 1 def
 } repeat
0 -.5 translate %%%%%%% translatie voor onderste plaatje
/bool2 1 def
} repeat
showpage
```

7 Inspirerende voorbeelden

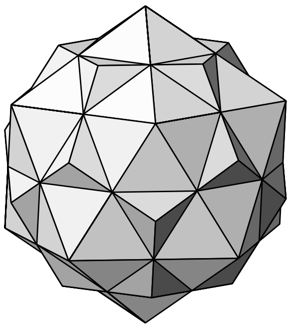
De eps-files van de volgende figuren zijn te vinden op de cd-rom.



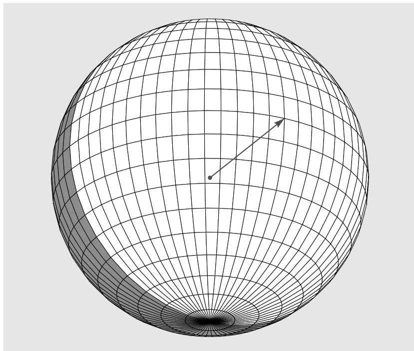
`icosaeder.eps`



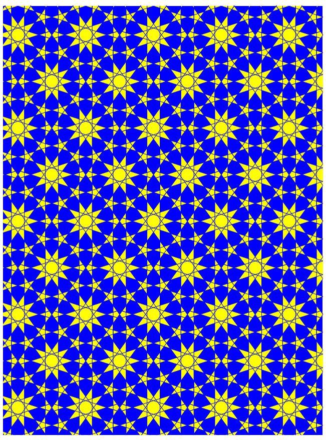
`dodecaeder.eps`



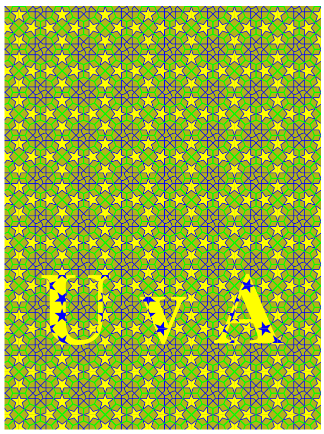
`compound.eps`



`maan.eps`



`patroon1.eps`



`patroon2.eps`