

De valversnelling bij bungee-jumping

Naar aanleiding van een artikel over natuurkundige verschijnselen bij bungee-jumping op internet [1] besloten we ons Eigen eXperimenteel Onderzoek (EXO) aan dit onderwerp te wijden. In dit artikel stond een formule waarmee de uitrekking van een bungee-elastiek kan worden berekend voor een persoon met een bepaalde massa en een koord met een bepaalde stugheid. Wij vonden het echter niet interessant om de uitrekking van het elastiek op te meten bij de bungee-jump. Iets anders boeide ons wel: aan het einde van het artikel werd een sprong beschreven waarbij *en passant* genoemd werd dat de acceleratie gelijk was aan $2,7g$. Veel sneller dus dan $9,81 \text{ m/s}^2$. Met andere woorden, bij bungee-jumping krijgt men een grotere acceleratie dan wanneer iemand uit een vliegtuig springt. Wij wilden in de praktijk uitzoeken of de bungee-jumper echt een acceleratie groter dan g kan krijgen, en hoe groot die dan is. De UvA bekroonde dit onderzoek op 3 april bij de uitreiking van de Werkstuklab-prijzen met de tweede prijs. Niek Dubelaar en Remco Brantjes

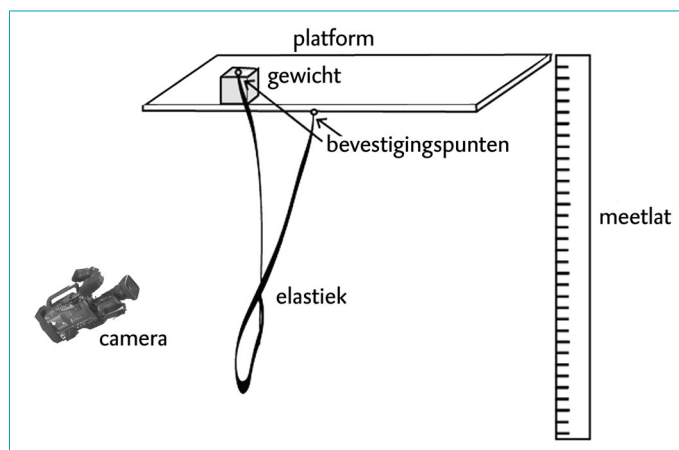
(Bonhoeffer College, Castricum)

GESCHIEDENIS

Bungee-jumping is gebaseerd op een vruchtbaarheidsritueel van de inwoners van het Pentecost-eiland in de Stille Oceaan. Deze traditie wordt daar 'landduiken' genoemd. Jonge mannen proberen hun mannelijkheid te bewijzen door jaarlijks deze rite uit te voeren. Men springt van een toren van zo'n dertig meter hoog, gebouwd van bamboe en wijnranken. Bij de sprong wordt geen elastiek gebruikt, maar wijnranken. Deze mogen natuurlijk niet knappen, daarom worden alleen verse wijnranken gebruikt die een hoog sappehalte hebben en elastisch zijn.

De wijnranken worden vastgebonden aan de enkels van de dappere jongens. Zonder veiligheidsnet of zachte ondergrond springen ze dan zo hoog mogelijk van de toren, waarbij het de bedoeling is zo laag mogelijk boven de grond te stoppen. Het mooiste is om zachtjes met het hoofd de grond aan te raken.

In 1977 werd de eerste moderne bungee-jump uitgevoerd door de Oxford University Dangerous Sports Club. Men sprong van een brug af met een elastiek. De springers werden, zoals verwacht, onmiddellijk gearresteerd. Bungee, 'indiaans rubber' in volkstaal, werd pas populair in de jaren negentig. Tegenwoordig hebben duizenden deze adrenaline-rush ervaren.



Figuur 1
Een schematische weergave van de meetopstelling.



ONDERZOEK

Onze onderzoeksvraag was: *Hoe groot is de acceleratie bij een bungee-jump en wat is de invloed hierop van de massa van de springer in verhouding tot de massa van het elastiek?* Voor het onderzoek hebben we de bungee-jump in het klein nagebootst en hebben we geprobeerd om met behulp van een videometing de onderzoeksvraag te beantwoorden. We legden met een camera de weg vast van het vallende voorwerp vanaf het punt dat dit losgelaten werd tot het onderste punt. Uit de analyse van de videobeelden leidden we de snelheid van het voorwerp af en hieruit berekenden we de versnelling.

In het begin dachten we dat het niet mogelijk zou zijn dat, als je aan een koord vastzit, je ineens harder zou kunnen vallen dan wanneer je niet aan een koord vastzit. Maar aangezien het artikel uit een wetenschappelijk blad komt, begonnen we toch aan deze gedachte te twijfelen. We vonden zelfs ergens anders op internet [2] de formule voor de acceleratie bij een bungee-jump:

$$a = g\left(1 + \frac{\mu(4+\mu)}{8}\right). \quad (1)$$

Hierbij is a de acceleratie in m/s^2 en μ de verhouding tussen de massa van het touw en de massa van de springer. Vooral bij de stugge elastieken is de acceleratie soms groter dan g . Wij dachten dat voor de valversnelling de stug-

heid van het elastiek en de massa van de springer van belang waren. Daarom hebben we gekozen om een proef te doen met variaties in stugheid en deze massa. Na onze eerste proef zijn we er achter gekomen dat niet zozeer de stugheid van belang is voor de valversnelling, maar de massa van het elastiek, omdat dit bepalend is voor de hoeveelheid potentiële energie van het elastiek (zie kader 'Theorie'), terwijl stugheid, ook al heeft het invloed op de massa, alleen voor de uitrekking van belang is.

We hadden echter bij onze eerste opzet geen rekening gehouden met het feit dat de verhouding tussen de massa van het voorwerp en de massa van het elastiek in het echt bijna een op een is. Toen we de massaverhoudingen die we gebruikten bij de proef narekenden kwamen we er achter dat deze allemaal nogal laag waren, in de orde van 0,1 tot 0,2. Vandaar waarschijnlijk dat de valversnellingen die we uit de proef konden afleiden nogal weinig van elkaar verschilden. Dit alles was voor ons reden genoeg om een tweede proef uit te voeren.

METINGEN

We hebben de proef uitgevoerd vanuit een raam op een goede hoogte waaruit het voorwerp kon vallen. Naast een elastiek van 2,5 meter lang en zeventig gram hadden we de verschillende rol-

len wc-papier nauwkeurig afgewogen die als 'jumper' optraden. We gebruikten wc-papier omdat dit licht, wit, niet te klein en makkelijk te verlichten is. Verder hebben we een lijmkleem gebruikt om het elastiek aan te bevestigen en een camera om de val op te nemen.

We hebben alleen de vrije val geanalyseerd: de val voordat het elastiek gaat uitrekken. Omdat de valversnelling toeneemt tijdens de vrije val, hebben we als meetpunt de hoogste waarde van a genomen. Dit was vrijwel altijd op het punt aan het einde van de vrije val, voordat het elastiek gaat uitrekken. Omdat we ons alleen met de maximale vrije valversnelling bezig houden is dit het enige meetpunt dat we verwerken.

RESULTATEN

Zoals is af te leiden uit de resultaten in de tabel in kader 'Resultaten' is de valversnelling ruim boven g . De valversnelling is groter naarmate de massaverhouding hoger wordt en volgt een parabolische vorm.

We vergelijken in de figuur onze metingen (gecorrigeerd voor meetfouten) met de theoretische waarde (zie figuur 2). De grafieken lijken erg op elkaar, de theoretische waarde ligt alleen een stukje hoger. Dit is te verklaren doordat in de theorie geen rekening is gehouden met luchtweerstand en warm-

Theorie

Formule (1) is afkomstig uit een artikel van Kagan en Kott [3]. Dit artikel was na vele uren zoeken echter niet te vinden op internet. Na onze proeven hebben we contact opgenomen met de auteurs. We hebben vooral gecorrespondeerd met Alan Kott, een docent aan de universiteit van Californië, die hetzelfde proces bij bungee-jumping heeft bestudeerd. Gelukkig had hij het artikel nog op zijn computer staan en heeft hij het naar ons toegestuurd. In dit artikel wordt de theorie achter de valversnelling groter dan g bij een bungee-jump besproken. We zullen aan de hand van dit artikel het proberen uit te leggen.

De potentiële energie van het zwaartepunt van het bungee-elastiek, met (onuitgerekte) lengte L en massa m , ten opzichte van de hoogte van een brug waar vanaf gesprongen wordt is gelijk aan:

$$E_p = -mg\frac{L}{4}. \quad (2)$$

De potentiële energie van de springer, met massa M , ten opzichte van de brug is nul, net als de kinetische energie van elastiek en springer. De totale potentiële energie is daarom in het begin gelijk aan (2).

Na vallen over een afstand y is de totale kinetische energie gelijk aan:

$$E_k = \frac{1}{2}m\frac{L-y}{2L}v^2 + \frac{1}{2}Mv^2. \quad (3)$$

Hier is de eerste term de kinetische energie van het gedeelte van het elastiek dat valt, v is de snelheid van de springer en het uiteinde van het elastiek. De potentiële energie van het vallende gedeelte van het elastiek is gelijk aan:

$$E_{p,\text{moving}} = -m\frac{L-y}{2L}g\left(y + \frac{L-y}{4}\right). \quad (4)$$

Hierbij is de term na g de plaats van het aangrijpingspunt van de massa van het bewegende deel van het elastiek. De potentiële energie van het stuk van het elastiek dat stil hangt is gelijk aan:

$$E_{p,\text{still}} = -m\frac{L+y}{2L}g\frac{L+y}{4}. \quad (5)$$

De term achter de massa van het elastiek vertegenwoordigt het deel van het elastiek dat in rust is, het gedeelte na g is weer de plaats van het aangrijpingspunt van dit deel van het elastiek.

Resultaten

Meting	Massaverhouding elastiek-voorwerp	Valversnelling (g)
1	1,00	1,4
2	1,17	1,2
3	1,40	1,6
4	1,75	1,9
5	2,33	2,4
6	3,50	3,9

teontwikkeling. Luchtwrijving is verwaarloosbaar klein in zo'n opstelling, maar warmteontwikkeling niet.

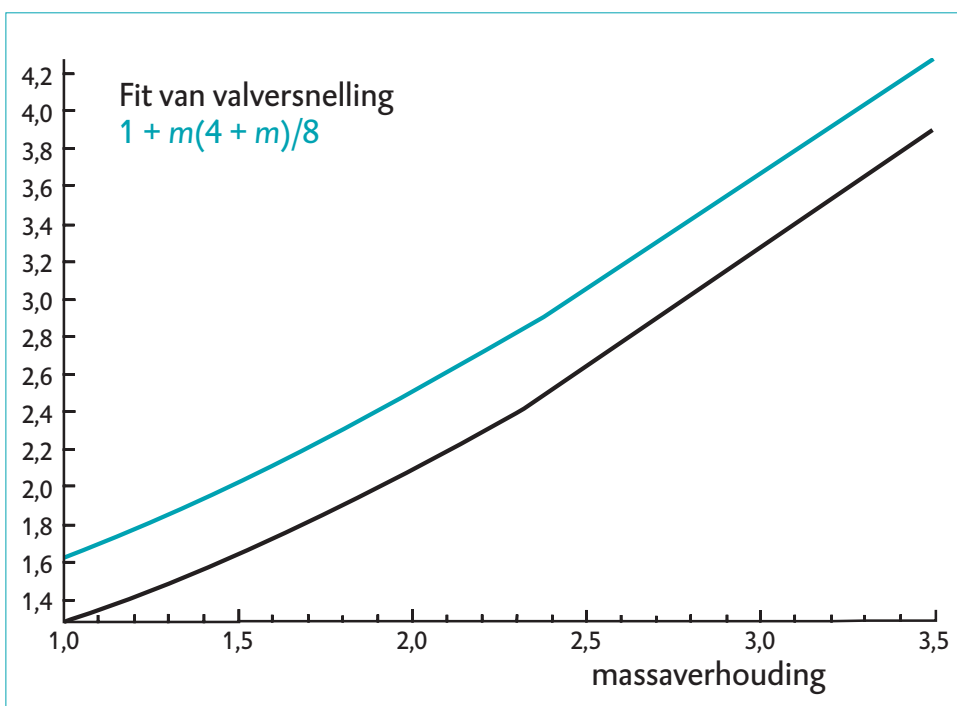
CONCLUSIE

Bij de tweede proef liep de valversnelling op tot bijna $4g$. Uit de resultaten hebben we een duidelijke conclusie kunnen trekken met betrekking tot het verband tussen massaverhouding en valversnelling. Duidelijk is dat bij een grote massaverhouding elastiek-voorwerp de valversnelling groter is. Bij een bungee-jump in het echt, val je volgens onze proef met een valversnelling van $1,4g$. Dat verklaart waarom bungee-jumping zo populair is.

REFERENTIES

- <http://www.bungee.com/bzapp/press/pt.html>. Dit artikel van Paul G. Menz komt uit *The Physics Teacher* 31/8 (november 1993).
- <http://www.darylscience.com/Bungee.html>.
- D.T. Kagan en A. Kott, 'The Greater-Than- g Acceleration of a Bungee Jumper', *The Physics Teacher* 34/6 (september 1996), 368–373.

318



Figuur 2
Een grafische weergave van de meetresultaten (zwarte lijn) en de berekende theoretische waarden (groene lijn).

Door (3), (4), and (5) bij elkaar op te tellen, krijgen we de totale energie van springer plus elastiek.

Door gebruik te maken van de wet van energiebehoud kunnen we (2) gelijkstellen aan (6) en de snelheid oplossen.

$$v^2 = gy \frac{[4ML+2mL-my]}{[mL-my+2ML]} \quad (6)$$

De snelheid bij $y = L$ is dan gelijk aan:

$$v^2 = 2gL + \frac{1}{2} \frac{m}{M} gL. \quad (7)$$

Vermenigvuldig alles met M en deel door 2, en zie dat de term na het gelijkteken hetzelfde is voor de springer bij een gewone vrije val.

De term die erna komt is het resultaat van het verlies van potentiële energie van het elastiek. Hierdoor is de acceleratie groter dan g .

We kunnen de acceleratie vinden door te differentiëren naar de tijd:

$$2v \frac{dv}{dt} = g \frac{dy}{dt} \left[\frac{(mL-my+2ML)(4ML+2mL-2my)+my(4ML+2mL-my)}{(mL-my+2ML)^2} \right]. \quad (8)$$

Door te vereenvoudigen krijgen we het volgende:

$$a = g \left[1 + \frac{my(4ML+2mL-my)}{2(mL-my+2ML)^2} \right]. \quad (9)$$

Nu is al te zien dat de acceleratie g zou zijn wanneer de massa van het elastiek te verwaarlozen is, zoals te verwachten.

De acceleratie op het punt $y = L$ is het hoogst, voor dit punt kunnen we vereenvoudigen:

$$a_{y=L} = g \left[1 + \frac{m(4M+m)}{8M^2} \right]. \quad (10)$$

Om nog meer te vereenvoudigen gebruiken we het volgende voor de verhouding tussen massa elastiek en massa jumper:

$$\mu \equiv \frac{m}{M}. \quad (11)$$

Nu kunnen we schrijven:

$$a_{y=L} = g \left[1 + \frac{\mu(4+\mu)}{8} \right]. \quad (12)$$

Dit is de formule (1) voor de acceleratie van de bungee-jump.