Opgave 1: bewijs zelf op algebraïsche wijze dat de lengte van *DE* gelijk is aan de helft van de lengte van *BC*.

Antwoord: de lengteverhouding vertaalt als:

$$(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = \frac{(u_5 - u_3)^2 + (u_6 - u_4)^2}{4}$$

Uit $2x_1 = u_1 + u_3$, $2x_2 = u_2 + u_4$, $2x_3 = u_1 + u_5$, $2x_4 = u_2 + u_6$ volgt

$$\begin{aligned}(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 &= \left(\frac{u_1 + u_5}{2} - \frac{u_1 + u_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_2 + u_6}{2} - \frac{u_2 + u_4}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u_5 - u_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_6 - u_4}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(u_5 - u_3)^2 + (u_6 - u_4)^2}{4}\end{aligned}$$

Dit is precies wat bewezen moest worden.

Opgave 2: De meeste meetkundige eigenschappen zijn invariant onder verschuiving en draaiing van de meetkundige figuur. Ga na dat het algebraïsche bewijs bijna een trivialiteit wordt als je veronderstelt dat *B* de oorsprong is en *C* een punt op de x-as is (we nemen dus $B(0,0)$ en $C(u_5, 0)$ als uitgangspunt)

Antwoord: Als $A(u_1, u_2), B(0,0), C(u_5, 0), D(x_1, x_2)$, en $E(x_3, x_4)$, dan

$$2x_1 = u_1,\ \ 2x_2 = u_2,\ \ 2x_3 = u_1 + u_5\ ,\ \ 2x_4 = u_2$$

Evenwijdigheid vertaalt als:

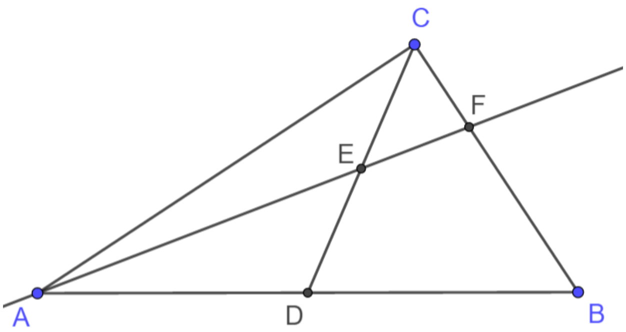
$$(x_4 - x_2)u_5 - (x_3 - x_1)0 = 0.$$

Maar dit is zeker waar omdat uit $2x_2 = u_2$ en $2x_4 = u_2$ eenvoudig volgt dat $x_4 - x_2 = 0$

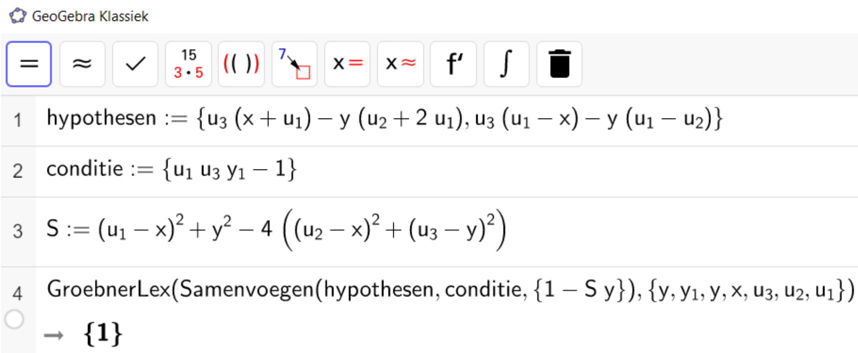
Opgave 3: Laat zien dat $u_2x_2 - u_3(x_1 - u_1) = 0$ afgeleid kan worden uit het tweetal vergelijkingen $x_1 - u_1 - u_2 = 0$ en $x_2 - u_3 = 0$. Toon ook aan dat $x_1 - u_1 - u_2 = 0$ volgt uit het tweetal vergelijkingen $u_2x_2 - u_3(x_1 - u_1) = 0$ en $x_2 - u_3 = 0$, mits we aannemen dat $u_3 \neq 0$.

Antwoord: Uit $x_1 - u_1 - u_2 = 0$ volgt $x_1 = u_1 + u_2$. Substitutie van deze formule voor x_1 en van de gelijkheid $x_2 = u_3$ in de linkerkant van de vergelijking $u_2x_2 - u_3(x_1 - u_1) = 0$ geeft bij uitwerking $u_2u_3 - u_3\big((u_1 + u_2) - u_1\big) = u_2u_3 - u_3u_2 = 0$. Substitutie van $x_2 = u_3$ in $u_2x_2 - u_3(x_1 - u_1) = 0$ geeft $u_2u_3 - u_3(x_1 - u_1) = 0$ oftewel $u_3(u_1 + u_2 - x_1) = 0$. Als $u_3 \neq 0$, dan $x_1 - u_1 - u_2 = 0$.

Opgave 4: Laat *D* het midden zijn van de zijde *AB* in een driehoek *ABC*. Laat *E* het midden zijn van het lijnstuk *CD*. Laat *F* het snijpunt zijn van het lijnstuk *BC* en de lijn door de punten *A* en *E*. Bewijs dat de lengte van het lijnstuk *BF* tweemaal de lengte van het lijnstuk *FC* is.

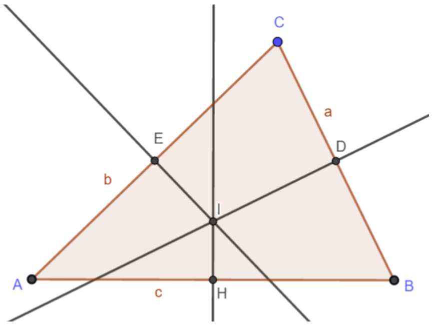


Antwoord: We nemen een coördinatenstelsel zodat $D(0,0), A(-u_1, 0), B(u_1, 0), C(u_2, u_3)$. Omdat F het midden is van *CD* is dit punt in het coördinatenstelsel ook direct te beschrijven als $E(\frac{1}{2}u_2, \frac{1}{2}u_3)$. Stel de coordinaten van *F* gelijk zijn aan (x, y). De eis dat *F* op de lijn AE ligt vertaalt in de volgende vergelijking: $u_3(x + u_1) - y(u_2 + 2u_1) = 0$. De eis dat *F* op de lijn *BC* ligt geeft de volgende vergelijking: $u_3(u_1 - x) - y(u_1 - u_2) = 0$ We bewijzen dat $d(B,F)^2 = 4d(C,F)^2$ oftewel dat de vergelijking $(u_1 - x)^2 + y^2 = 4((x - u_2)^2 + (y - u_3)^2)$ geldt. Deze vergelijking moet dus te herleiden zijn uit : $2u_3(x + u_1) - y(u_2 + 2u_1) = 0$ en $u_3(u_1 - x) - y(u_1 - u_2) = 0$. Onderstaande schermafdruk van een Gröbner bases berekening volgend Methode 3 toont dit aan onder de conditie van niet-ontaardheid van de figuur (de conditie vertaalt als $u_1 \cdot u_3 \neq 0$).



Opgave 5: Ga via de Gröbner basis methode in GeoGebra na dat de middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan.

Antwoord: Eerst maar eens een situatieschets



We nemen een coördinatenstelsel met A als oorsprong en B op de horizontale as, zeg $B(u_1, 0)$. Omdat H het midden van AB is kunnen we de coördinaten al opschrijven: $H(\frac{1}{2}u_1, 0)$. Hetzelfde geldt voor E als midden van AC: $H(\frac{1}{2}u_2, \frac{1}{2}u_3)$. Voor het punt I nemen we het snijpunt van de loodlijn door E en de loodlijn door H. De coördinaten van de overige punten in de meetkundige figuur stelen we gelijk aan $C(u_2, u_3)$, $D(x_1, x_2)$, $I(x_3, x_4)$. We vertalen de meetkundige constructie in veeltermvergelijkingen:

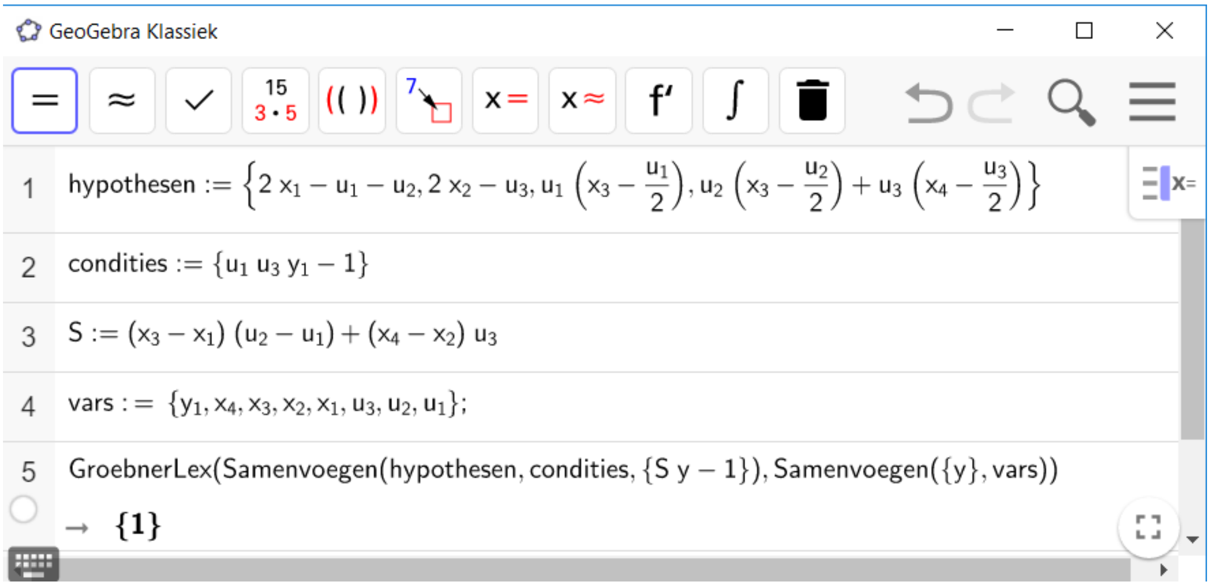
D is het midden van BC: $\quad 2x_1 - u_1 - u_2 = 0, \qquad 2x_2 - u_3 = 0.$

$HI \perp AB: u_1\left(x_3 - \frac{1}{2}u_1\right) = 0.$

$EI \perp AC: u_2\left(x_3 - \frac{1}{2}u_2\right) + u_3\left(x_4 - \frac{1}{2}u_3\right) = 0.$

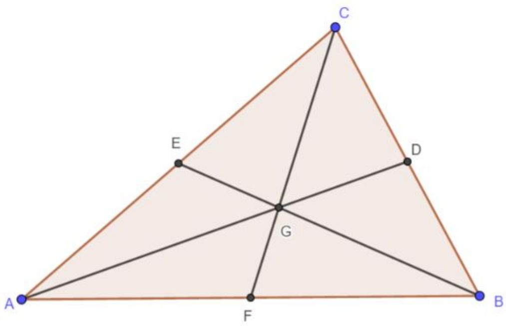
We moeten bewijzen dat de lijnstukken DI en BC onderling loodrecht zijn. Dit vertaalt in de veeltermvergelijking $(x_3 - x_1)\cdot(u_2 - u_1) + (x_4 - x_2)\cdot u_3 = 0$.

Dit kan met de Gröbner basis methode 3 als we als conditie toevoegen A, B en C niet op één lijn liggen, d.w.z. dat $u_1 u_3 \neq 0$. Onderstaande schermafdruk toont de berekening.



Opgave 6: Ga via de Gröbner basis methode in GeoGebra na dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan.

Antwoord: Eerst maar eens een situatieschets



We nemen een coördinatenstelsel met *A* als oorsprong en *B* op de horizontale as, zeg $B(u_1, 0)$. Voor het punt *G* nemen we het snijpunt van de zwaartelijnen vanuit *A* en *B*. Laten we voor de andere punten zo min mogelijk informaatie er vantevoren instoppen; zeg dat de coördinaten zijn $C(u_2, u_3)$, $D(x_1, x_2), E(x_3, x_4), F(x_5, 0), G(x_6, x_7)$. We vertalen de meetkundige constructie in veelterm-vergelijkingen:

D is het midden van *BC*: $2x_1 - u_1 - u_2 = 0, \quad 2x_2 - u_3 = 0.$

E is het midden van *AC*: $2x_3 - u_2 = 0, \quad 2x_4 - u_3 = 0.$

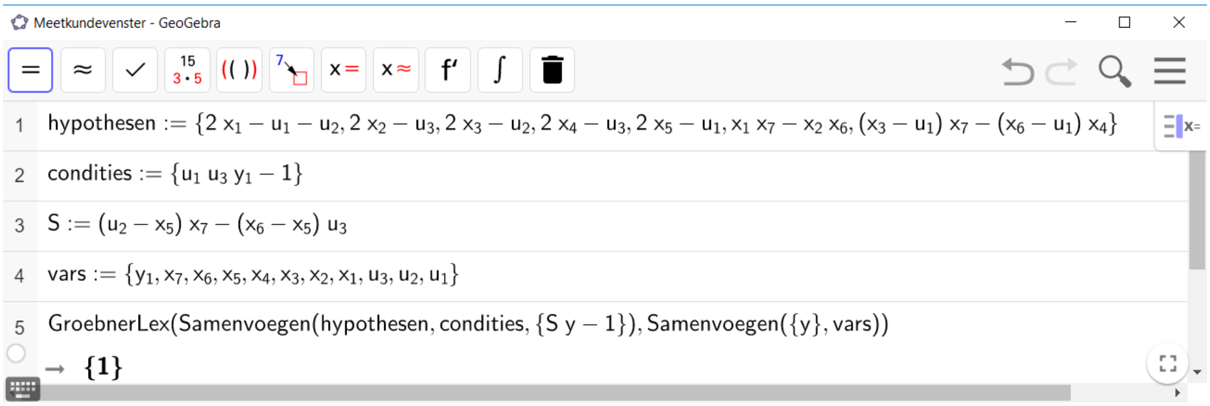
F is het midden van *BC*: $2x_5 - u_1 = 0.$

A, *D*, *G* op één lijn: $x_1 \cdot x_7 - x_2 \cdot x_6 = 0.$

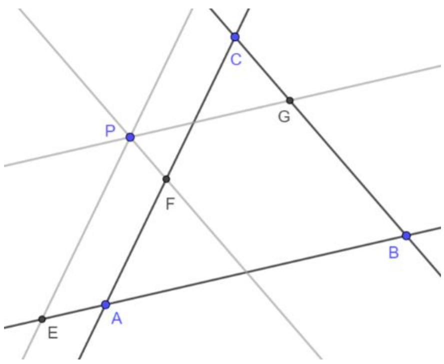
B, *E*, *G* op één lijn: $(x_3 - u_1) \cdot x_7 - (x_6 - u_1) \cdot x_4 = 0.$

We moeten bewijzen dat de lijnstukken *C*, *F*, *G* op één lijn liggen. Dit vertaalt in de veeltermvergelijking : $(u_2 - x_5) \cdot x_7 - (x_6 - x_5) \cdot u_3 = 0.$

Dit kan met de Gröbner basis methode 3 als we als conditie toevoegen *A*, *B* en *C* niet op één lijn liggen, d.w.z. dat $u_1 u_3 \neq 0$. Onderstaande schermafdruk toont de berekening.

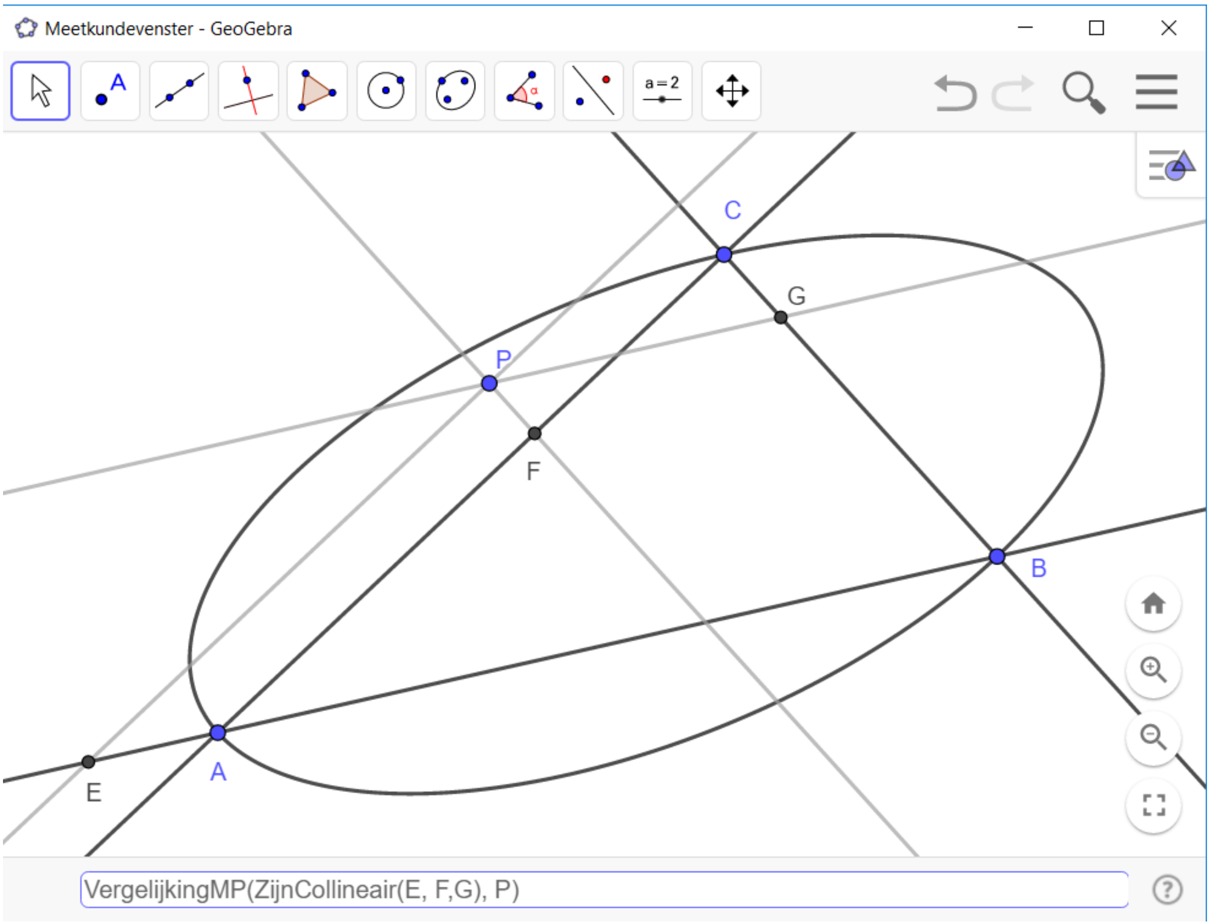


Opgave 7: Neem een willekeurige driehoek *ABC* en een willekeurig *P* in het vlak. Laat *E* de parallelle projectie van *P* op de lijn *AB* zijn, *F* de parallelle projectie van *P* op de lijn *AC*, en *G* de parallelle projectie van *P* op de lijn *BC* zoals in onderstaande constructie.



Zoek uit wanneer *E*, *F*, *G* op één lijn liggen.

Antwoord: Onderstaande schermafdruk suggereert dat het punt *P* op een ellips door de hoekpunten van de driehoek *ABC* moet liggen.



We kunnen ook de vergelijking voor de ellips bepalen via de Gröbner basis methode. We bekijken een willekeurige driehoek *ABC* met hoekpunten $A(0,0)$, $B(u_1,0)$, $C(u_2,u_3)$ en we veronderstellen een niet-ontaarde situatie met $u_1 \neq 0$, $u_3 \neq 0$. De niet-ontaardheid vertalen we via de truc van Rabinowitsch tot de veelterm $u_1 \cdot u_3 \cdot y_1 - 1$. We nemen een algemeen punt $P(x,y)$. Laat de andere geconstrueerde punten zijn $E(x_1,x_2)$, $F(x_3,x_4)$ en $G(x_5,x_6)$. We stellen weer veelterm-vergelijkingen op die bij de situatie passen:

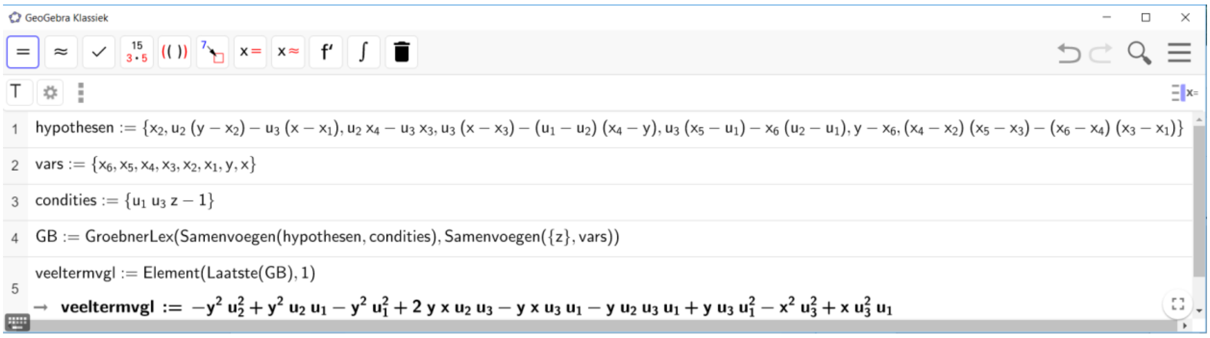
E ligt op de lijn AB: $x_2 = 0$
$PE \parallel AC$ (evenwijdige stand): $u_2 \cdot (y - x_2) - u_3 \cdot (x - x_1) = 0$

F ligt op de lijn AC: $u_2 \cdot x_4 - u_3 \cdot x_3 = 0$
$PF \parallel BC$ (evenwijdige stand): $u_3 \cdot (x - x_3) - (u_1 - u_2) \cdot (x_4 - y) = 0$

G ligt op de lijn BC: $u_3 \cdot (x_5 - u_1) - x_6 \cdot (u_2 - u_1) = 0$
$PG \parallel AB$ (evenwijdige stand): $y - x_6 = 0$

E, *F*, en *G* op één lijn: $(x_4 - x_2)(x_5 - x_3) - (x_6 - x_4)(x_3 - x_1) = 0$

Het resultaat krijg je nu door de Gröbner basis van de veeltermen aan de linkerkant van de gevonden veergelijkingen en de bij niet-ontaardheid passende veelterm te bepalen t.o.v. de lexicografische ordening met $x \prec y \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x_4 \prec x_5 \prec x_6 \prec y_1$. In deze basis kijk je naar het laatste element want dit is een vergelijking waarin de veeltermrelatie in de variabelen x, y. In onderstaande schermafdruk zie je het resultaat van de berekening in GeoGebra.



Het punt $P(x, y)$ ligt dus op de kromme met

$$u_3^2 x^2 + (u_1^2 - u_1 \cdot u_2 + u_2^2) y^2 + (u_1 - 2u_2) u_3 xy - u_1 u_3^2 x + (u_2 - u_1) u_1 u_3 y = 0$$

als karakteriserende vergelijking. Dit is de vergelijking van een ellips die door *A*, *B* en *C* gaat.