Een andere dimensie van GeoGebra

André Heck (Universiteit van Amsterdam), A.J.P.Heck@uva.nl

Nationale Wiskunde Dagen 2019

Overzicht

1. Meetkundige stellingen geautomatiseerd bewijzen en ontdekken

2. Geautomatiseerde bewijsvoering

3. Geautomatiseerde ontdekkingen

Overzicht

1. Meetkundige stellingen geautomatiseerd bewijzen en ontdekken

2. Geautomatiseerde bewijsvoering

3. Geautomatiseerde ontdekkingen

Achtergrondmateriaal:

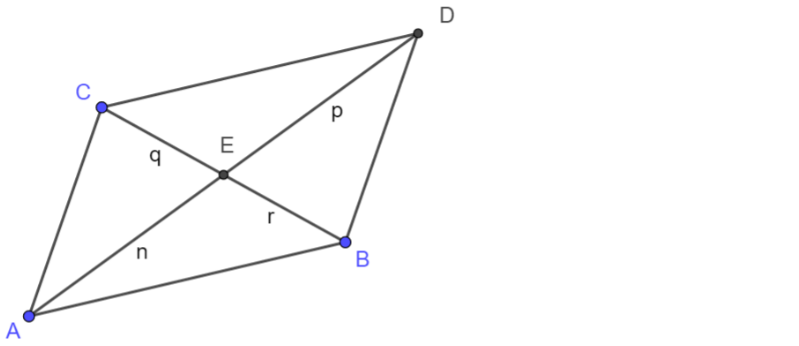
`http://staff.fnwi.uva.nl/a.j.p.heck@uva.nl/NWD2019`

Meetkundige stellingen geautomatiseerd bewijzen en ontdekken

Inleidende voorbeelden in GeoGebra

Stelling over een parallellogram

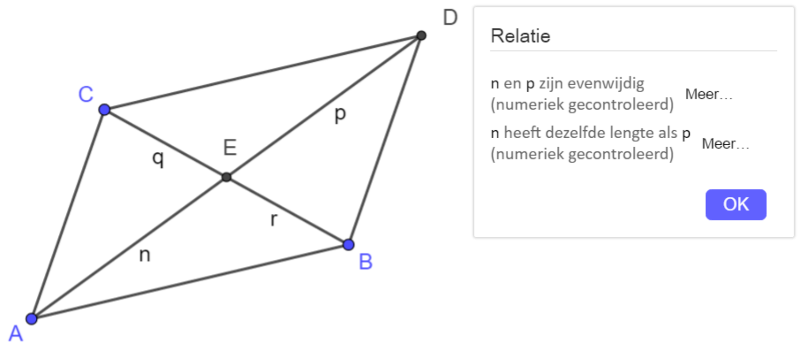
In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



Inleidende voorbeelden in GeoGebra

Stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.

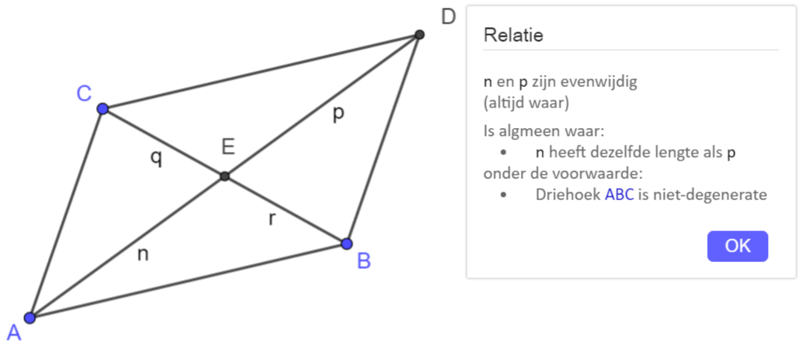


Relatie(n, p) doet numerieke check.

Inleidende voorbeelden in GeoGebra

Stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.

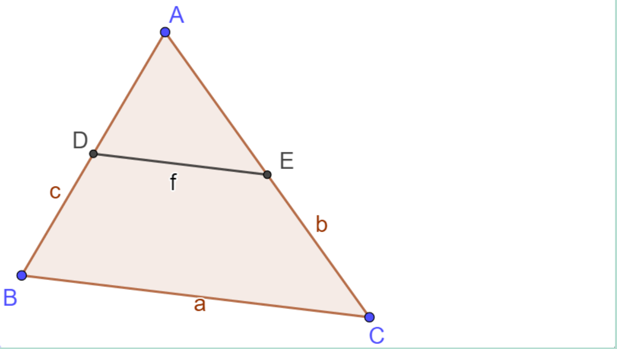


BewijsDetail(ZijnEvenwijdig(n, p)) doet exacte, algebraïsche check.

Inleidende voorbeelden in GeoGebra

Stelling over een driehoek

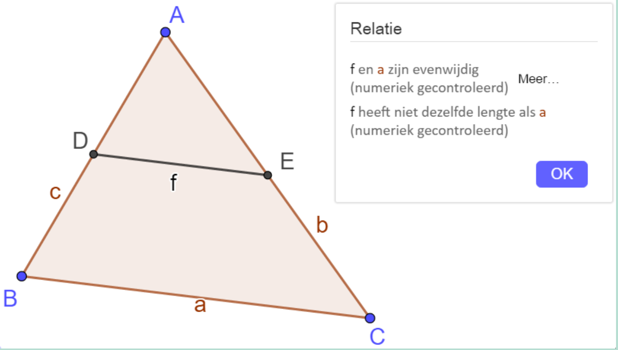
ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ *en* $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$



Inleidende voorbeelden in GeoGebra

Stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ *en* $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$

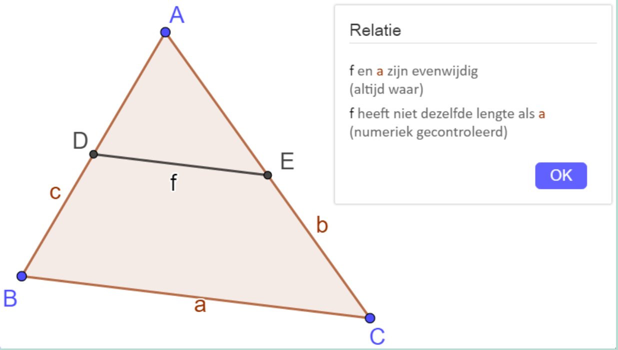


Relatie(f, a) doet numerieke check

Inleidende voorbeelden in GeoGebra

Stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ *en* $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$

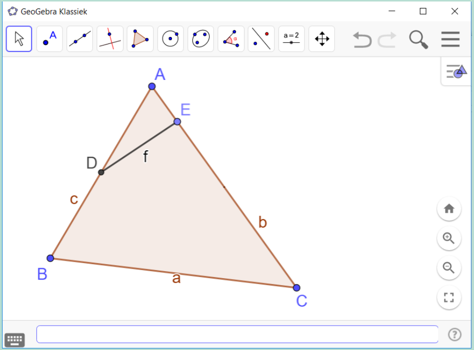


BewijsDetail(ZijnEvenwijdig(f, a)) doet exacte, algebraïsche check

Inleidende voorbeelden in GeoGebra

'Ontdekking' van de stelling over een driehoek

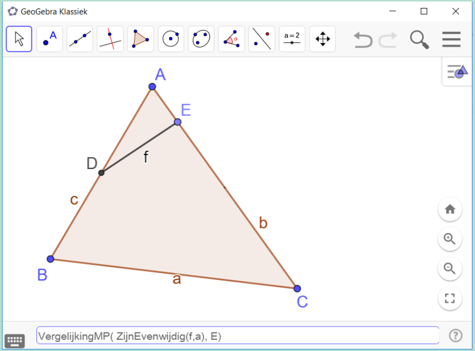
ABC een driehoek, D midden van AB, E punt op AC.
Waar plaats je E zodat DE ∥ BC?



Inleidende voorbeelden in GeoGebra

'Ontdekking' van de stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E punt op AC.
Waar plaats je E zodat $DE \parallel BC$?

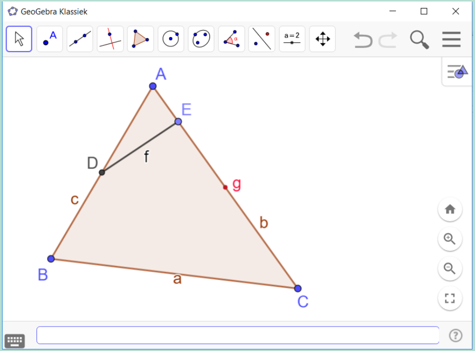


VergelijkingMP(ZijnEvenwijdig(f,a), E)

Inleidende voorbeelden in GeoGebra

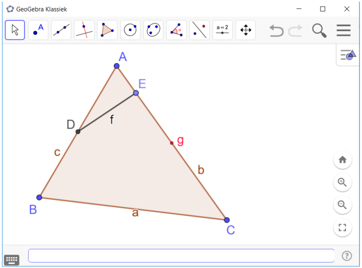
'Ontdekking' van de stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E punt op AC.
Waar plaats je E zodat DE $\parallel$ BC?



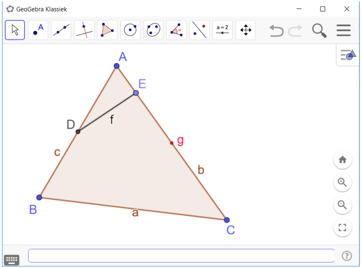
VergelijkingMP(ZijnEvenwijdig(f,a), E) bepaalt het punt g

Inleidende voorbeelden in GeoGebra



Vervolgaanpak:

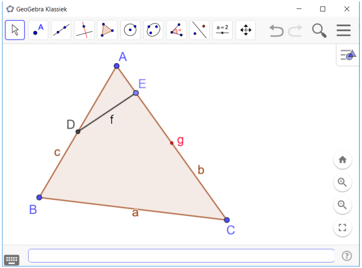
Inleidende voorbeelden in GeoGebra



Vervolgaanpak:

- Sleep E over het lijnstuk AC en 'ontdek' dat g wel eens het midden van AC kan wezen;

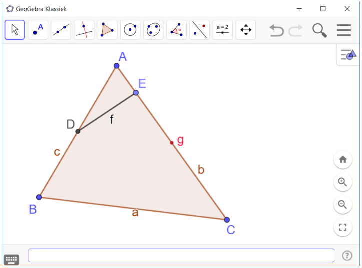
Inleidende voorbeelden in GeoGebra



Vervolgaanpak:

- Sleep E over het lijnstuk AC en 'ontdek' dat g wel eens het midden van AC kan wezen;
- Verberg de objecten E, f en g;

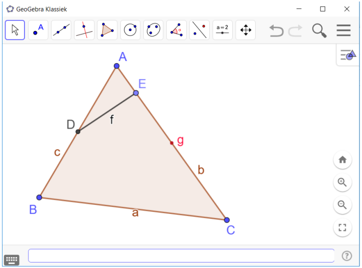
Inleidende voorbeelden in GeoGebra



Vervolgaanpak:

- Sleep E over het lijnstuk AC en 'ontdek' dat g wel eens het midden van AC kan wezen;
- Verberg de objecten E, f en g;
- Construeer het midden F van AC ;

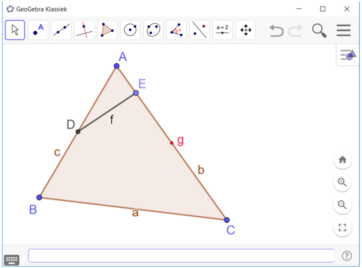
Inleidende voorbeelden in GeoGebra



Vervolgaanpak:

- Sleep E over het lijnstuk AC en 'ontdek' dat g wel eens het midden van AC kan wezen;
- Verberg de objecten E, f en g;
- Construeer het midden F van AC ;
- Construeer het lijnstuk DF;

Inleidende voorbeelden in GeoGebra



Vervolgaanpak:

- Sleep E over het lijnstuk AC en 'ontdek' dat g wel eens het midden van AC kan wezen;
- Verberg de objecten E, f en g;
- Construeer het midden F van AC ;
- Construeer het lijnstuk DF;
- Ga met het RELATIE-gereedschap of commando na dat DF en BC evenwijdig zijn.

Wat doet het RELATIE-gereedschap en commando?

Wat doet het RELATIE-gereedschap en commando?

Het RELATIE-gereedschap (+commando) geeft informatie over meetkundige relaties tussen twee of meer objecten.

Wat doet het RELATIE-gereedschap en commando?

Het RELATIE-gereedschap (+commando) geeft informatie over meetkundige relaties tussen twee of meer objecten.

Je bent in staat om numeriek (voor de getekende constructie met numerieke coördinaten) vast te stellen of

- twee lijnen parallel zijn of loodrecht op elkaar staan;

Wat doet het RELATIE-gereedschap en commando?

Het RELATIE-gereedschap (+commando) geeft informatie over meetkundige relaties tussen twee of meer objecten.

Je bent in staat om numeriek (voor de getekende constructie met numerieke coördinaten) vast te stellen of

- twee lijnen parallel zijn of loodrecht op elkaar staan;
- twee of meer objecten (punten, lengtes, oppervlaktes) gelijk aan elkaar zijn;

Wat doet het Relatie-gereedschap en commando?

Het Relatie-gereedschap (+commando) geeft informatie over meetkundige relaties tussen twee of meer objecten.

Je bent in staat om numeriek (voor de getekende constructie met numerieke coördinaten) vast te stellen of

- twee lijnen parallel zijn of loodrecht op elkaar staan;
- twee of meer objecten (punten, lengtes, oppervlaktes) gelijk aan elkaar zijn;
- een punt op een lijn of kegelsnede ligt;

Wat doet het RELATIE-gereedschap en commando?

Het RELATIE-gereedschap (+commando) geeft informatie over meetkundige relaties tussen twee of meer objecten.

Je bent in staat om numeriek (voor de getekende constructie met numerieke coördinaten) vast te stellen of

- twee lijnen parallel zijn of loodrecht op elkaar staan;
- twee of meer objecten (punten, lengtes, oppervlaktes) gelijk aan elkaar zijn;
- een punt op een lijn of kegelsnede ligt;
- drie of vier punten op één lijn liggen;

Wat doet het RELATIE-gereedschap en commando?

Het RELATIE-gereedschap (+commando) geeft informatie over meetkundige relaties tussen twee of meer objecten.

Je bent in staat om numeriek (voor de getekende constructie met numerieke coördinaten) vast te stellen of

- twee lijnen parallel zijn of loodrecht op elkaar staan;
- twee of meer objecten (punten, lengtes, oppervlaktes) gelijk aan elkaar zijn;
- een punt op een lijn of kegelsnede ligt;
- drie of vier punten op één lijn liggen;
- drie lijnen door één punt gaan of evenwijdig zijn;
- ...

Wat doet het BEWIJS-gereedschap en commando?

Wat doet het BEWIJS-gereedschap en commando?

Het BEWIJS-gereedschap (+BEWIJS en BEWIJSDETAIL commando's) controleert een meetkundige bewering.

Wat doet het Bewijs-gereedschap en commando?

Het Bewijs-gereedschap (+Bewijs en BewijsDetail commando's) controleert een meetkundige bewering.

Uitvoer is:

- *true*: als de bewering altijd juist is of onder voorwaarden van niet-ontaardheid;

Wat doet het BEWIJS-gereedschap en commando?

Het BEWIJS-gereedschap (+BEWIJS en BEWIJSDETAIL commando's) controleert een meetkundige bewering.

Uitvoer is:

- *true*: als de bewering altijd juist is of onder voorwaarden van niet-ontaardheid;
- *false*: als deze bewering in het algemeen onjuist is;

Wat doet het BEWIJS-gereedschap en commando?

Het BEWIJS-gereedschap (+BEWIJS en BEWIJSDETAIL commando's) controleert een meetkundige bewering.

Uitvoer is:

- *true*: als de bewering altijd juist is of onder voorwaarden van niet-ontaardheid;
- *false*: als deze bewering in het algemeen onjuist is;
- *undefined*: als GeoGebra geen beslissing kan nemen.

Wat doet het Bewijs-gereedschap en commando?

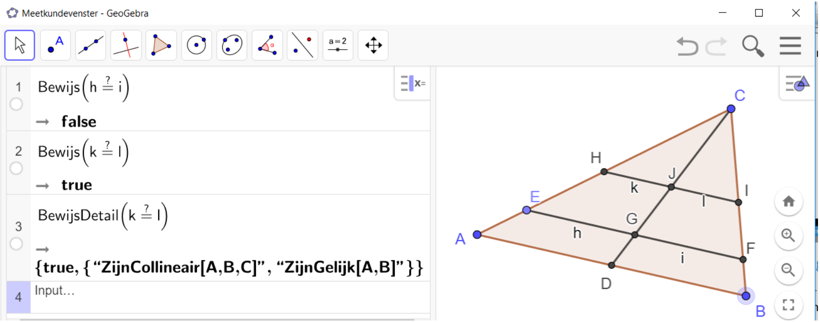
Het Bewijs-gereedschap (+Bewijs en BewijsDetail commando's) controleert een meetkundige bewering.

Uitvoer is:

- *true*: als de bewering altijd juist is of onder voorwaarden van niet-ontaardheid;
- *false*: als deze bewering in het algemeen onjuist is;
- *undefined*: als GeoGebra geen beslissing kan nemen.

BewijsDetail is gelijk aan Bewijs, maar geeft ook informatie omtrent de condities van niet-ontaardheid.

Voorbeeld van Bewijs-commando's in CAS van GGB

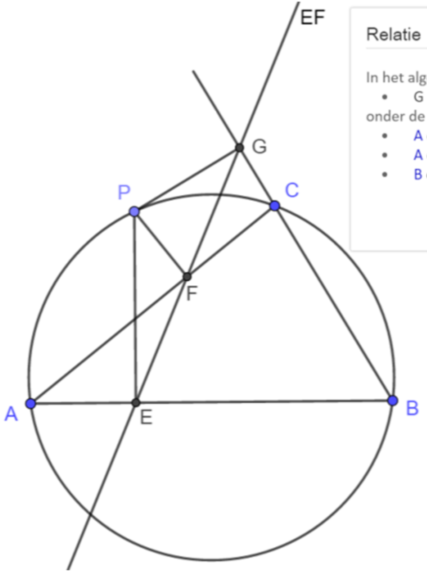


Bewijs(h==i) voor E op AC en $EF \parallel AB$ geeft false.

BewijsDetail(k==l) voor middens H en I geeft noodzakelijke voorwaarden:

punten A, B, C liggen niet op één lijn, en A is niet gelijk aan B.

Bewijs van de stelling van Simson in GeoGebra



Relatie

In het algemeen is het waar dat:

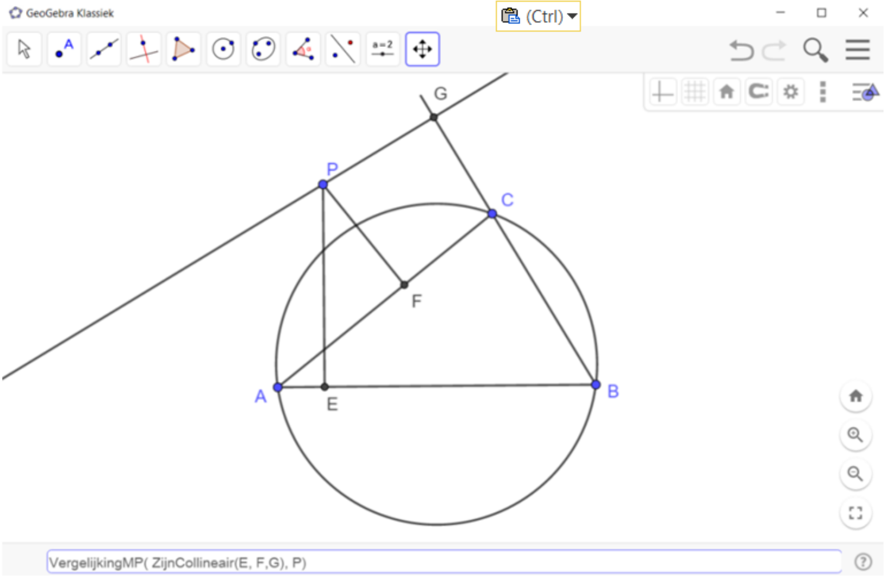
- G is gelegen op EF

onder de voorwaarde:

- A en B zijn verschillend en
- A en C zijn verschillend en
- B en C zijn verschillend

OK

'Ontdekking' van de stelling van Simson in GeoGebra

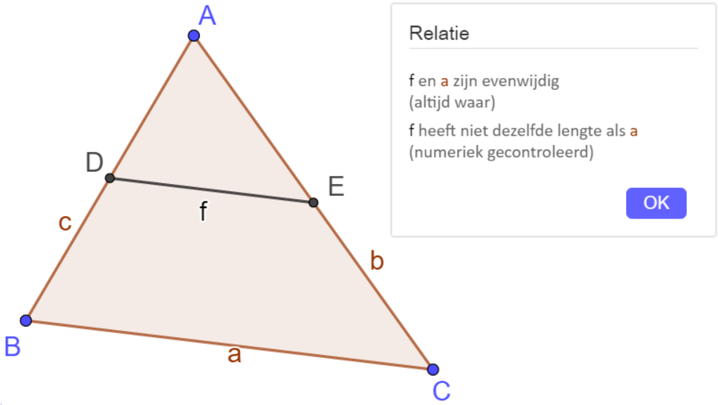


Geautomatiseerde bewijsvoering

Wat gebeurt er achter de schermen?

Terug naar de stelling over een driehoek:

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ *en* $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$



Logboek bij GEOGEBRA.EXE –LOGLEVEL=INFO

Windows PowerShell

```
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: A = (0.59, 2.71) /* free point */
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: // Free point A(v7,v8)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: v7 is free
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: v8 is free
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: B = (-3.21, -1.89) /* free point */
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: // Free point B(v9,v10)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: v9 is free
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: v10 is free
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: C = (6.25, -3.45) /* free point */
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: // Free point C(v11,v12)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: v11 is free
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: v12 is free
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: f1 = Polygon[A, B, C] /* Polygon A, B, C */
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: a = Segment[B, C, f1] /* Segment B, C */
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: D = Midpoint[A, B] /* Midpoint of A, B */
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: // Constrained point D(v13,v14)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Hypotheses:
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Adding poly #1: 2v_{13}-v_{9}-v_{7}
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Adding poly #2: 2v_{14}-v_{10}-v_{8}
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: E = Midpoint[A, C] /* Midpoint of A, C */
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: // Constrained point E(v15,v16)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Hypotheses:
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Adding poly #3: 2v_{15}-v_{11}-v_{7}
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Adding poly #4: 2v_{16}-v_{12}-v_{8}
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: f = Segment[D, E] /* Segment D, E */
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Processing numerical object
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Hypotheses have been processed.
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Thesis equations (non-denied ones):
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Thesis reductio ad absurdum (denied statement), product of factors:
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: (v15*v12-v13*v12-v16*v11+v14*v11-v15*v10+v13*v10+v16*v9-v14*v9)*v17-
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Adding poly #5: -1+v_{17}v_{15}v_{12}-v_{17}v_{13}v_{12}-v_{17}v_{16
}-v_{17}v_{15}v_{10}+v_{17}v_{13}v_{10}+v_{17}v_{16}v_{9}-v_{17}v_{14}v_{9}
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: substitutions: {v7=0, v8=0}
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Eliminating system in 9 variables (5 dependent)
```

Logboek bij GEOGEBRA.EXE –LOGLEVEL=INFO

```
GeoGebra: ============== restarted ===============
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: input = [[ff:=""],[aa:=eliminate([2*v13-v9,2*v14-v10,2*v15-v11,2*v16-
13*v12-v17*v16*v11+v17*v14*v11-v17*v15*v10+v17*v13*v10+v17*v16*v9-v17*v14*v9],revlist([v13,v14,v
(aa)],[for ii from 0 to bb-1 do ff+=("["+(ii+1)+"]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1");cc:=factors
r jj from 0 to dd-1 by 2 do ff+=("  unicode95uunicode91u"+(jj/2+2)+"]="+cc[jj]); od; ff+=(" [2]:
to dd-1 by 2 do ff+=(","+cc[kk]);od;od],[if(ff=="") begin ff:=[0] end],ff][5]
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: result = [1]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1  unicode95uunicode91u2]=
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Considering NDG 1...
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Found a better NDG score (0) than Infinity
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Statement is GENERALLY TRUE
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Benchmarking: 120 ms
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: STATEMENT IS TRUE (yes/no: TRUE)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: OUTPUT for ProveDetails: undefined = {true}
```

Logbook bij GEOGEBRA.EXE –LOGLEVEL=INFO

```
GeoGebra: ============== restarted ===============
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: input = [[ff:=""],[aa:=eliminate([2*v13-v9,2*v14-v10,2*v15-v11,2*v16-
13*v12-v17*v16*v11+v17*v14*v11-v17*v15*v10+v17*v13*v10+v17*v16*v9-v17*v14*v9],revlist([v13,v14,v
(aa)],[for ii from 0 to bb-1 do ff+=("["+(ii+1)+"]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1");cc:=factors
r jj from 0 to dd-1 by 2 do ff+=("  unicode95uunicode91u"+(jj/2+2)+"]="+cc[jj]); od; ff+=(" [2]:
to dd-1 by 2 do ff+=(","+cc[kk]);od;od],[if(ff=="") begin ff:=[0] end],ff][5]
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: result = [1]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1  unicode95uunicode91u2]=
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Considering NDG 1...
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Found a better NDG score (0) than Infinity
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Statement is GENERALLY TRUE
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Benchmarking: 120 ms
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: STATEMENT IS TRUE (yes/no: TRUE)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: OUTPUT for ProveDetails: undefined = {true}
```

Stappenplan bij intern bewijs:

Logboek bij GEOGEBRA.EXE –LOGLEVEL=INFO

```
GeoGebra: ============== restarted ===============
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: input = [[ff:=""],[aa:=eliminate([2*v13-v9,2*v14-v10,2*v15-v11,2*v16-
13*v12-v17*v16*v11+v17*v14*v11-v17*v15*v10+v17*v13*v10+v17*v16*v9-v17*v14*v9],revlist([v13,v14,v
(aa)],[for ii from 0 to bb-1 do ff+=("["+(ii+1)+"]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1");cc:=factors
r jj from 0 to dd-1 by 2 do ff+=("  unicode95uunicode91u"+(jj/2+2)+"]="+cc[jj]); od; ff+=(" [2]:
to dd-1 by 2 do ff+=(","+cc[kk]);od;od],[if(ff=="") begin ff:=[0] end],ff][5]
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: result = [1]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1  unicode95uunicode91u2]=
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Considering NDG 1...
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Found a better NDG score (0) than Infinity
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Statement is GENERALLY TRUE
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Benchmarking: 120 ms
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: STATEMENT IS TRUE (yes/no: TRUE)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: OUTPUT for ProveDetails: undefined = {true}
```

Stappenplan bij intern bewijs:

- Stap over naar meetkunde met coördinaten;

Logboek bij GEOGEBRA.EXE –LOGLEVEL=INFO

```
GeoGebra: ============== restarted ===============
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: input = [[ff:=""],[aa:=eliminate([2*v13-v9,2*v14-v10,2*v15-v11,2*v16-
13*v12-v17*v16*v11+v17*v14*v11-v17*v15*v10+v17*v13*v10+v17*v16*v9-v17*v14*v9],revlist([v13,v14,v
(aa)],[for ii from 0 to bb-1 do ff+=("["+(ii+1)+"]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1");cc:=factors
r jj from 0 to dd-1 by 2 do ff+=("  unicode95uunicode91u"+(jj/2+2)+"]="+cc[jj]); od; ff+=(" [2]:
to dd-1 by 2 do ff+=(","+cc[kk]);od;od],[if(ff=="") begin ff:=[0] end],ff][5]
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: result = [1]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1  unicode95uunicode91u2]=
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Considering NDG 1...
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Found a better NDG score (0) than Infinity
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Statement is GENERALLY TRUE
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Benchmarking: 120 ms
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: STATEMENT IS TRUE (yes/no: TRUE)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: OUTPUT for ProveDetails: undefined = {true}
```

Stappenplan bij intern bewijs:

- Stap over naar meetkunde met coördinaten;
- Vertaal naar algebraïsch probleem met veeltermen;

Logboek bij GEOGEBRA.EXE –LOGLEVEL=INFO

```
GeoGebra: ============== restarted ===============
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: input = [[ff:=""],[aa:=eliminate([2*v13-v9,2*v14-v10,2*v15-v11,2*v16-
13*v12-v17*v16*v11+v17*v14*v11-v17*v15*v10+v17*v13*v10+v17*v16*v9-v17*v14*v9],revlist([v13,v14,v
(aa)],[for ii from 0 to bb-1 do ff+=("["+(ii+1)+"]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1");cc:=factors
r jj from 0 to dd-1 by 2 do ff+=("  unicode95uunicode91u"+(jj/2+2)+"]="+cc[jj]); od; ff+=(" [2]:
to dd-1 by 2 do ff+=(","+cc[kk]);od;od],[if(ff=="") begin ff:=[0] end],ff][5]
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: result = [1]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1  unicode95uunicode91u2]=
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Considering NDG 1...
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Found a better NDG score (0) than Infinity
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Statement is GENERALLY TRUE
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Benchmarking: 120 ms
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: STATEMENT IS TRUE (yes/no: TRUE)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: OUTPUT for ProveDetails: undefined = {true}
```

Stappenplan bij intern bewijs:

- Stap over naar meetkunde met coördinaten;
- Vertaal naar algebraïsch probleem met veeltermen;
- Los algebraïsch probleem op;

Logboek bij GEOGEBRA.EXE –LOGLEVEL=INFO

```
GeoGebra: ============== restarted ===============
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: input = [[ff:=""],[aa:=eliminate([2*v13-v9,2*v14-v10,2*v15-v11,2*v16-
13*v12-v17*v16*v11+v17*v14*v11-v17*v15*v10+v17*v13*v10+v17*v16*v9-v17*v14*v9],revlist([v13,v14,v
(aa)],[for ii from 0 to bb-1 do ff+=("["+(ii+1)+"]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1");cc:=factors
r jj from 0 to dd-1 by 2 do ff+=("  unicode95uunicode91u"+(jj/2+2)+"]="+cc[jj]); od; ff+=(" [2]:
to dd-1 by 2 do ff+=(","+cc[kk]);od;od],[if(ff=="") begin ff:=[0] end],ff][5]
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: result = [1]: [1]:  unicode95uunicode91u1]=1  unicode95uunicode91u2]=
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Considering NDG 1...
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Found a better NDG score (0) than Infinity
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Statement is GENERALLY TRUE
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: Benchmarking: 120 ms
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: STATEMENT IS TRUE (yes/no: TRUE)
GeoGebra: 8:43:6 DEBUG: ?: OUTPUT for ProveDetails: undefined = {true}
```

Stappenplan bij intern bewijs:

- Stap over naar meetkunde met coördinaten;
- Vertaal naar algebraïsch probleem met veeltermen;
- Los algebraïsch probleem op;
- Vertaal de uitkomst terug naar meetkundige beweringen.

Van meetkunde naar algebra

Stel $A(x_1, x_2)$, $B(x_3, x_4)$, $C(x_5, x_6)$, $D(x_7, x_8)$.

Van meetkunde naar algebra

Stel $A(x_1, x_2)$, $B(x_3, x_4)$, $C(x_5, x_6)$, $D(x_7, x_8)$.

$A = B$

Van meetkunde naar algebra

Stel $\quad A(x_1, x_2), \quad B(x_3, x_4), \quad C(x_5, x_6), \quad D(x_7, x_8).$

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

Van meetkunde naar algebra

Stel $A(x_1, x_2)$, $B(x_3, x_4)$, $C(x_5, x_6)$, $D(x_7, x_8)$.

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$

Van meetkunde naar algebra

Stel $\quad A(x_1, x_2), \quad B(x_3, x_4), \quad C(x_5, x_6), \quad D(x_7, x_8).$

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$: $2x_5 - x_3 - x_1 = 0$ en $2x_6 - x_4 - x_2 = 0$

Van meetkunde naar algebra

Stel $\quad A(x_1, x_2), \quad B(x_3, x_4), \quad C(x_5, x_6), \quad D(x_7, x_8).$

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$: $2x_5 - x_3 - x_1 = 0$ en $2x_6 - x_4 - x_2 = 0$

A, B, C op één lijn

Van meetkunde naar algebra

Stel $\quad A(x_1, x_2), \quad B(x_3, x_4), \quad C(x_5, x_6), \quad D(x_7, x_8).$

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$: $2x_5 - x_3 - x_1 = 0$ en $2x_6 - x_4 - x_2 = 0$

A, B, C op één lijn: gelijke hellingen van AB en BC:

Van meetkunde naar algebra

Stel $\quad A(x_1, x_2), \quad B(x_3, x_4), \quad C(x_5, x_6), \quad D(x_7, x_8).$

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$: $2x_5 - x_3 - x_1 = 0$ en $2x_6 - x_4 - x_2 = 0$

A, B, C op één lijn: gelijke hellingen van AB en BC:

$$\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_1} = \frac{x_6 - x_4}{x_5 - x_3}$$

Van meetkunde naar algebra

Stel $\quad A(x_1, x_2), \quad B(x_3, x_4), \quad C(x_5, x_6), \quad D(x_7, x_8).$

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$: $2x_5 - x_3 - x_1 = 0$ en $2x_6 - x_4 - x_2 = 0$

A, B, C op één lijn: gelijke hellingen van AB en BC:

$$\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_1} = \frac{x_6 - x_4}{x_5 - x_3}$$

als veeltermvergelijking: $(x_4 - x_2)(x_5 - x_3) - (x_6 - x_4)(x_3 - x_1) = 0$

Van meetkunde naar algebra

Stel $\quad A(x_1, x_2), \quad B(x_3, x_4), \quad C(x_5, x_6), \quad D(x_7, x_8).$

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$: $2x_5 - x_3 - x_1 = 0$ en $2x_6 - x_4 - x_2 = 0$

A, B, C op één lijn: gelijke hellingen van AB en BC:

$$\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_1} = \frac{x_6 - x_4}{x_5 - x_3}$$

als veeltermvergelijking: $(x_4 - x_2)(x_5 - x_3) - (x_6 - x_4)(x_3 - x_1) = 0$

$AB \perp CD$

Van meetkunde naar algebra

Stel $\quad A(x_1, x_2), \quad B(x_3, x_4), \quad C(x_5, x_6), \quad D(x_7, x_8).$

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$: $2x_5 - x_3 - x_1 = 0$ en $2x_6 - x_4 - x_2 = 0$

A, B, C op één lijn: gelijke hellingen van AB en BC:

$$\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_1} = \frac{x_6 - x_4}{x_5 - x_3}$$

als veeltermvergelijking: $(x_4 - x_2)(x_5 - x_3) - (x_6 - x_4)(x_3 - x_1) = 0$

$AB \perp CD$: $(x_3 - x_1)(x_7 - x_5) - (x_4 - x_2)(x_8 - x_6) = 0$

Van meetkunde naar algebra

Stel $A(x_1, x_2)$, $B(x_3, x_4)$, $C(x_5, x_6)$, $D(x_7, x_8)$.

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$: $2x_5 - x_3 - x_1 = 0$ en $2x_6 - x_4 - x_2 = 0$

A, B, C op één lijn: gelijke hellingen van AB en BC:

$$\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_1} = \frac{x_6 - x_4}{x_5 - x_3}$$

als veeltermvergelijking: $(x_4 - x_2)(x_5 - x_3) - (x_6 - x_4)(x_3 - x_1) = 0$

$AB \perp CD$: $(x_3 - x_1)(x_7 - x_5) - (x_4 - x_2)(x_8 - x_6) = 0$

$AB \parallel CD$

Van meetkunde naar algebra

Stel $A(x_1,x_2)$, $B(x_3,x_4)$, $C(x_5,x_6)$, $D(x_7,x_8)$.

$A = B$: $x_3 - x_1 = 0$ en $x_4 - x_2 = 0$

werkt beter dan $(x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 = 0$

$C = \text{midden}(AB)$: $2x_5 - x_3 - x_1 = 0$ en $2x_6 - x_4 - x_2 = 0$

A, B, C op één lijn: gelijke hellingen van AB en BC:

$$\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_1} = \frac{x_6 - x_4}{x_5 - x_3}$$

als veeltermvergelijking: $(x_4 - x_2)(x_5 - x_3) - (x_6 - x_4)(x_3 - x_1) = 0$

$AB \perp CD$: $(x_3 - x_1)(x_7 - x_5) - (x_4 - x_2)(x_8 - x_6) = 0$

$AB \parallel CD$: $(x_4 - x_2)(x_7 - x_5) - (x_3 - x_1)(x_3 - x_1) = 0$

Voorbeeld: stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ *en* $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$.

Voorbeeld: stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ en $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$.

Kies coördinaten $A(u_2, u_3)$, $B(0, 0)$, $C(u_1, 0)$, $D(x_1, x_2)$, $E(x_3, x_4)$.

Voorbeeld: stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ en $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$.

Kies coördinaten $A(u_2, u_3)$, $B(0, 0)$, $C(u_1, 0)$, $D(x_1, x_2)$, $E(x_3, x_4)$.

Vergelijkingen bij de constructie (hypothesen)

Voorbeeld: stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ en $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$.

Kies coördinaten $A(u_2, u_3)$, $B(0, 0)$, $C(u_1, 0)$, $D(x_1, x_2)$, $E(x_3, x_4)$.

Vergelijkingen bij de constructie (hypothesen)

$$D = \text{midden}(AB)$$

Voorbeeld: stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ en $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$.

Kies coördinaten $A(u_2, u_3)$, $B(0, 0)$, $C(u_1, 0)$, $D(x_1, x_2)$, $E(x_3, x_4)$.

Vergelijkingen bij de constructie (hypothesen)

$$D = \mathrm{midden}(AB) \implies \begin{aligned} 2x_1 - u_2 &= 0 \\ 2x_2 - u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Voorbeeld: stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ en $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$.

Kies coördinaten $A(u_2, u_3)$, $B(0, 0)$, $C(u_1, 0)$, $D(x_1, x_2)$, $E(x_3, x_4)$.

Vergelijkingen bij de constructie (hypothesen)

$$\begin{aligned} D = \text{midden}(AB) \implies\ & 2x_1 - u_2 = 0 \\ & 2x_2 - u_3 = 0 \\ E = \text{midden}(AC) \ & \end{aligned}$$

Voorbeeld: stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ *en* $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$.

Kies coördinaten $A(u_2, u_3)$, $B(0,0)$, $C(u_1, 0)$, $D(x_1, x_2)$, $E(x_3, x_4)$.

Vergelijkingen bij de constructie (hypothesen)

$$\begin{aligned} D = \text{midden}(AB) &\implies 2x_1 - u_2 = 0 \\ & 2x_2 - u_3 = 0 \\ E = \text{midden}(AC) &\implies 2x_3 - u_1 - u_2 = 0 \\ & 2x_4 - u_3 = 0 \end{aligned}$$

Voorbeeld: stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ en $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$.

Kies coördinaten $A(u_2, u_3)$, $B(0, 0)$, $C(u_1, 0)$, $D(x_1, x_2)$, $E(x_3, x_4)$.

Vergelijkingen bij de constructie (hypothesen)

$$\begin{aligned} D = \text{midden}(AB) &\implies 2x_1 - u_2 = 0 \\ & 2x_2 - u_3 = 0 \\ E = \text{midden}(AC) &\implies 2x_3 - u_1 - u_2 = 0 \\ & 2x_4 - u_3 = 0 \end{aligned}$$

Vergelijking bij de stelling: $u_1 \cdot (x_4 - x_2) = 0$

Voorbeeld: stelling over een driehoek

ABC een driehoek, D midden van AB, E midden van AC.
Dan: $DE \parallel BC$ en $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |BC|$.

Kies coördinaten $A(u_2, u_3)$, $B(0,0)$, $C(u_1, 0)$, $D(x_1, x_2)$, $E(x_3, x_4)$.

Vergelijkingen bij de constructie (hypothesen)

$$\begin{aligned} D = \text{midden}(AB) &\implies 2x_1 - u_2 = 0 \\ & 2x_2 - u_3 = 0 \\ E = \text{midden}(AC) &\implies 2x_3 - u_1 - u_2 = 0 \\ & 2x_4 - u_3 = 0 \end{aligned}$$

Vergelijking bij de stelling: $u_1 \cdot (x_4 - x_2) = 0$

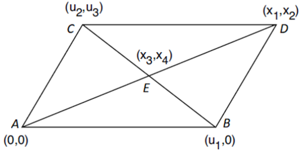
Vraag (het op te lossen algebraïsche probleem):
Is de vergelijking bij de stelling te herleiden tot $0 = 0$
op basis van de vergelijkingen bij de constructie?

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

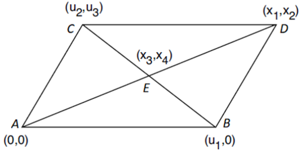
In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



Kies coördinaten

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.

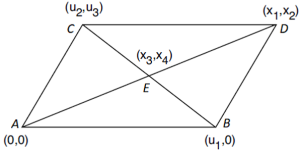


Kies coördinaten

Vergelijkingen bij de constructie:

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



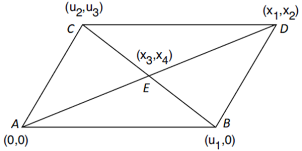
Kies coördinaten

Vergelijkingen bij de constructie:

$ABCD$ is een parallellogram

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



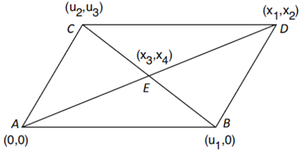
Kies coördinaten

Vergelijkingen bij de constructie:

$$ABCD \text{ is een parallellogram} \implies \begin{aligned} x_1 - u_1 - u_2 &= 0 \\ x_2 - u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



Kies coördinaten

Vergelijkingen bij de constructie:

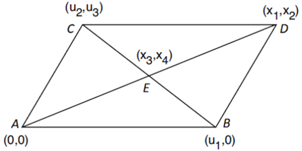
$ABCD$ is een parallellogram $\implies x_1 - u_1 - u_2 = 0$

$$x_2 - u_3 = 0$$

A, E, D collineair

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



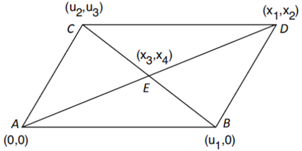
Kies coördinaten

Vergelijkingen bij de constructie:

$$
\begin{aligned}
ABCD \text{ is een parallellogram} \implies\ & x_1 - u_1 - u_2 = 0 \\
& x_2 - u_3 = 0 \\
A, E, D \text{ collineair} \implies\ & x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \\
& (u_2 - u_1) x_4 - u_3 (x_3 - u_1) = 0
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



Kies coördinaten

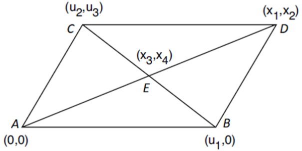
Vergelijkingen bij de constructie:

$$
\begin{aligned}
ABCD \text{ is een parallellogram} \implies\ & x_1 - u_1 - u_2 = 0 \\
& x_2 - u_3 = 0 \\
A, E, D \text{ collineair} \implies\ & x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \\
& (u_2 - u_1)x_4 - u_3(x_3 - u_1) = 0
\end{aligned}
$$

Vergelijkingen bij de stelling:

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



Kies coördinaten

Vergelijkingen bij de constructie:

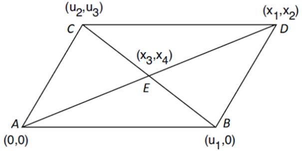
$$
\begin{aligned}
ABCD \text{ is een parallellogram} \implies\ & x_1 - u_1 - u_2 = 0 \\
& x_2 - u_3 = 0 \\
A, E, D \text{ collineair} \implies\ & x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \\
& (u_2 - u_1)x_4 - u_3(x_3 - u_1) = 0
\end{aligned}
$$

Vergelijkingen bij de stelling:

$$d(A, E) = d(E, D)$$

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



Kies coördinaten

Vergelijkingen bij de constructie:

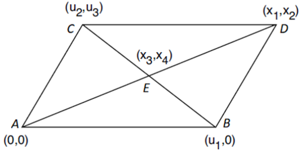
$$
\begin{aligned}
ABCD \text{ is een parallellogram} \implies\ & x_1 - u_1 - u_2 = 0 \\
& x_2 - u_3 = 0 \\
A, E, D \text{ collineair} \implies\ & x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \\
& (u_2 - u_1)x_4 - u_3(x_3 - u_1) = 0
\end{aligned}
$$

Vergelijkingen bij de stelling:

$$d(A, E) = d(E, D) \implies x_1^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 + x_2^2 = 0$$

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



Kies coördinaten

Vergelijkingen bij de constructie:

$$ABCD \text{ is een parallellogram} \implies x_1 - u_1 - u_2 = 0$$

$$x_2 - u_3 = 0$$

$$A, E, D \text{ collineair} \implies x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$$

$$(u_2 - u_1)x_4 - u_3(x_3 - u_1) = 0$$

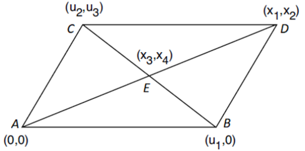
Vergelijkingen bij de stelling:

$$d(A, E) = d(E, D) \implies x_1^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 + x_2^2 = 0$$

$$d(B, E) = d(E, C)$$

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

In een parallellogram verdeelt het snijpunt van de diagonalen elk van deze diagonalen in twee stukken van gelijke lengte.



Kies coördinaten

Vergelijkingen bij de constructie:

$$ABCD \text{ is een parallellogram} \implies x_1 - u_1 - u_2 = 0$$
$$x_2 - u_3 = 0$$
$$A, E, D \text{ collineair} \implies x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$$
$$(u_2 - u_1)x_4 - u_3(x_3 - u_1) = 0$$

Vergelijkingen bij de stelling:

$$d(A,E) = d(E,D) \implies x_1^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 + x_2^2 = 0$$
$$d(B,E) = d(E,C) \implies 2u_1x_3 - 2u_2x_3 - 2u_3x_4 - u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

Vraag (het op te lossen algebraïsche probleem):

Is elke vergelijking bij de stelling te herleiden tot $0 = 0$ op basis van de vergelijkingen bij de constructie?

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

Vraag (het op te lossen algebraïsche probleem):

Is elke vergelijking bij de stelling te herleiden tot $0 = 0$ op basis van de vergelijkingen bij de constructie?

Herleiding van vergelijkingen bij de constructie leidt tot voorwaarden:

$$u_1 \neq 0 \quad \text{en} \quad u_3 \neq 0.$$

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

Vraag (het op te lossen algebraïsche probleem):

Is elke vergelijking bij de stelling te herleiden tot $0 = 0$ op basis van de vergelijkingen bij de constructie?

Herleiding van vergelijkingen bij de constructie leidt tot voorwaarden:

$$u_1 \neq 0 \quad \text{en} \quad u_3 \neq 0.$$

Als je eist dat $u_1 u_3 \neq 0$, dan is de stelling te bewijzen.

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

Vraag (het op te lossen algebraïsche probleem):

Is elke vergelijking bij de stelling te herleiden tot $0 = 0$ op basis van de vergelijkingen bij de constructie?

Herleiding van vergelijkingen bij de constructie leidt tot voorwaarden:

$$u_1 \neq 0 \quad \text{en} \quad u_3 \neq 0.$$

Als je eist dat $u_1 u_3 \neq 0$, dan is de stelling te bewijzen.

Kennelijk kon GeoGebra dit niet automatisch afleiden en faalt daardoor het bewijs van de lengte-eigenschappen.

Voorbeeld: stelling over een parallellogram

Vraag (het op te lossen algebraïsche probleem):

Is elke vergelijking bij de stelling te herleiden tot $0 = 0$ op basis van de vergelijkingen bij de constructie?

Herleiding van vergelijkingen bij de constructie leidt tot voorwaarden:

$$u_1 \neq 0 \quad \text{en} \quad u_3 \neq 0.$$

Als je eist dat $u_1 u_3 \neq 0$, dan is de stelling te bewijzen.

Kennelijk kon GeoGrebra dit niet automatisch afleiden en faalt daardoor het bewijs van de lengte-eigenschappen.

Truc van Rabinowitsch: $u_1 u_3 \neq 0$ kun je in het bewijs inbouwen door de hulpvariabele y_1 te introduceren samen met de vergelijking $u_1 u_3 y_1 - 1 = 0$.

Algebraïsche formulering van meetkundig probleem

Vrije variabelen $u_1, u_2, \ldots u_m$ gebruikt voor coördinaten van vrij te kiezen punten.

Algebraïsche formulering van meetkundig probleem

Vrije variabelen $u_1, u_2, \ldots u_m$ gebruikt voor coördinaten van vrij te kiezen punten.

Afhankelijke variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebruikt bij geconstrueerde punten.

Algebraïsche formulering van meetkundig probleem

Vrije variabelen $u_1, u_2, \ldots u_m$ gebruikt voor coördinaten van vrij te kiezen punten.

Afhankelijke variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebruikt bij geconstrueerde punten.

Stel veeltermvergelijkingen bij de constructie op (hypothesen):
$H_1(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots x_n) = 0, \ldots, H_s(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots x_n) = 0$

Algebraïsche formulering van meetkundig probleem

Vrije variabelen $u_1, u_2, \ldots u_m$ gebruikt voor coördinaten van vrij te kiezen punten.

Afhankelijke variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebruikt bij geconstrueerde punten.

Stel veeltermvergelijkingen bij de constructie op (hypothesen):
$H_1(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots x_n) = 0, \ldots, H_s(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots x_n) = 0$

Vertaal meetkundige stelling in veeltermvergelijkingen (hier 1):
$S(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots x_n) = 0$

Algebraïsche formulering van meetkundig probleem

Vrije variabelen $u_1, u_2, \ldots u_m$ gebruikt voor coördinaten van vrij te kiezen punten.

Afhankelijke variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gebruikt bij geconstrueerde punten.

Stel veeltermvergelijkingen bij de constructie op (hypothesen):
$H_1(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots x_n) = 0, \ldots, H_s(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots x_n) = 0$

Vertaal meetkundige stelling in veeltermvergelijkingen (hier 1):
$S(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots x_n) = 0$

Het algebraïsche probleem: Is $S = 0$ te herleiden tot $0 = 0$ op basis van de vergelijkingen $H_1 = 0, \ldots, H_s = 0$?

Algebraïsche formulering van meetkundig probleem

Vrije variabelen $u_1, u_2, \dots u_m$ gebruikt voor coördinaten van vrij te kiezen punten.

Afhankelijke variabelen $x_1, x_2, \dots x_n$ gebruikt bij geconstrueerde punten.

Stel veeltermvergelijkingen bij de constructie op (hypothesen):
$H_1(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots x_n) = 0, \dots, H_s(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots x_n) = 0$

Vertaal meetkundige stelling in veeltermvergelijkingen (hier 1):
$S(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots x_n) = 0$

Het algebraïsche probleem: Is $S = 0$ te herleiden tot $0 = 0$ op basis van de vergelijkingen $H_1 = 0, \dots, H_s = 0$?

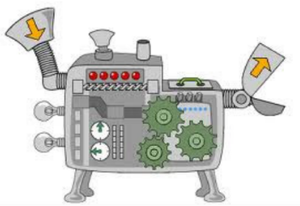
M.a.w. zijn gemeenschappelijke nulpunten van $H_1 \dots H_s$ bevat in de nulpunten van S?

Gröbner basis

Oplossen van veeltermvergelijkingen doe je met een CAS m.b.v. Gröbner basis berekeningen.

Gröbner basis

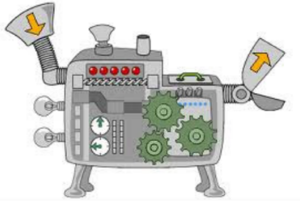
Oplossen van veeltermvergelijkingen doe je met een CAS m.b.v. Gröbner basis berekeningen.



Gröbner basis

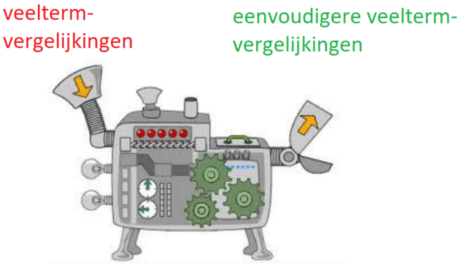
Oplossen van veeltermvergelijkingen doe je met een CAS m.b.v. Gröbner basis berekeningen.

veelterm-
vergelijkingen



Gröbner basis

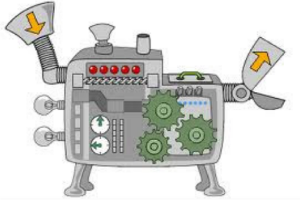
Oplossen van veeltermvergelijkingen doe je met een CAS m.b.v. Gröbner basis berekeningen.



Gröbner basis

Oplossen van veeltermvergelijkingen doe je met een CAS m.b.v. Gröbner basis berekeningen.

$$f_1 := x - y - z = 0$$
$$f_2 := x + y - z^2 = 0$$
$$f_3 := x^2 + y^2 - 1 = 0$$



Gröbner basis

Oplossen van veeltermvergelijkingen doe je met een CAS m.b.v. Gröbner basis berekeningen.

$f_1 := x - y - z = 0$

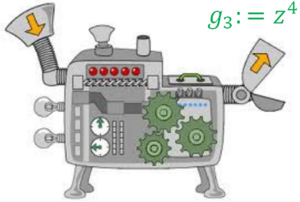
$f_2 := x + y - z^2 = 0$

$f_3 := x^2 + y^2 - 1 = 0$

$g_1 := 2x - z^2 - z = 0$

$g_2 := 2y - z^2 + z = 0$

$g_3 := z^4 + z^2 - 2 = 0$



De gereduceerde Gröbner basis van $\{f_1, f_2, f_3\}$ t.o.v. lexicografische termordening met $x \succ y \succ z$ is $\{g_1, g_2, g_3\}$.

Uitvinder van Gröbner bases en hun berekening

Bruno Buchberger (RISC, Linz)

CAS in Geogebra kan Gröbner bases uitrekenen:

CAS - GeoGebra

1 $\text{GroebnerLex}(\{x-y-z, x+y-z^2, x^2+y^2-1\}, \{x, y, z\})$

$\to \{z^4+z^2-2, 2y-z^2+z, 2x-z^2-z\}$

2 $\text{GroebnerLex}(\{x-y-z, x+y-z^2, x^2+y^2-1\}, \{z, y, x\})$

$\to \{-2x^4-2x^3+x^2+3x, -3y-4x^3-2x^2+3x+3, -3z+4x^3+2x^2-3\}$

Gröbner basis bij bewijzen van meetkundige stellingen

Gröbner basis bij bewijzen van meetkundige stellingen

Methode 1 in GeoGebra (niet aanbevolen)

De gereduceerde Gröbner basis van hypothesen $GB(H_1, H_2, \ldots H_s)$ is gelijk aan de gereduceerde Gröbner basis van de hypothesen plus de stelling, $GB(H_1, H_2, \ldots H_s, S)$.

Gröbner basis bij bewijzen van meetkundige stellingen

Methode 1 in GeoGebra (niet aanbevolen)

De gereduceerde Gröbner basis van hypothesen $GB(H_1, H_2, \ldots H_s)$ is gelijk aan de gereduceerde Gröbner basis van de hypothesen plus de stelling, $GB(H_1, H_2, \ldots H_s, S)$.

Methode 2 (ingeval er geen voorwaarden nodig zijn)

De gereduceerde Gröbner basis van hypothesen plus de veelterm horende bij ontkenning van de stelling is gelijk aan $\{1\}$.
M.a.w. $GB(H_1, H_2, \ldots H_s, S \cdot y - 1) = \{1\}$.

Gröbner basis bij bewijzen van meetkundige stellingen

Methode 1 in GeoGebra (niet aanbevolen)

De gereduceerde Gröbner basis van hypothesen $GB(H_1, H_2, \ldots H_s)$ is gelijk aan de gereduceerde Gröbner basis van de hypothesen plus de stelling, $GB(H_1, H_2, \ldots H_s, S)$.

Methode 2 (ingeval er geen voorwaarden nodig zijn)

De gereduceerde Gröbner basis van hypothesen plus de veelterm horende bij ontkenning van de stelling is gelijk aan $\{1\}$.
M.a.w. $GB(H_1, H_2, \ldots H_s, S \cdot y - 1) = \{1\}$.

Methode 3 (bij voorwaarden $D_1 \neq 0, \ldots, D_t \neq 0$)

$GB(H_1, H_2, \ldots H_s, D_1 \cdot y_1 - 1, \ldots, D_t \cdot y_t - 1, S \cdot y - 1) = \{1\}$.
Meestal lexicografische termordening met
$y \succ y_t \succ \cdots \succ y_1 \succ x_n \succ \cdots \succ x_1 \succ u_m \succ \cdots \succ u_1$

Methode 3 bij stelling over een parallellogram

GeoGebra Klassiek

1 hypothesen $:= \{x_1 - u_1 - u_2, x_2 - u_3, x_1\, x_4 - x_2\, x_3, (u_2 - u_1)\, x_4 - u_3\,(x_3 - u_1)\}$

$\rightarrow$ **hypothesen** $:= \{-u_1 - u_2 + x_1, -u_3 + x_2, x_1\, x_4 - x_2\, x_3, -u_3\,(-u_1 + x_3) + x_4\,(-u_1 + u_2)\}$

2 condities $:= \{u_1\, u_3\, y_1 - 1\}$

$\rightarrow$ **condities** $:= \{u_1\, u_3\, y_1 - 1\}$

3 $S_1 := x_1^2 - 2\, x_1\, x_3 - 2\, x_2\, x_4 + x_2^2$

$\rightarrow$ $S_1 := -2\, x_1\, x_3 - 2\, x_2\, x_4 + x_1^2 + x_2^2$

4 $S_2 := 2\, u_1\, x_3 - 2\, u_2\, x_3 - 2\, u_3\, x_4 - u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

$\rightarrow$ $S_2 := 2\, u_1\, x_3 - 2\, u_2\, x_3 - 2\, u_3\, x_4 - u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$

5 vars $:= \{x_4, x_3, x_2, x_1, u_3, u_2, u_1\}$

$\rightarrow$ **vars** $:= \{x_4, x_3, x_2, x_1, u_3, u_2, u_1\}$

6 GroebnerLex(Samenvoegen(hypothesen, condities, $\{S_1\, y - 1\}$), Samenvoegen($\{y, y_1\}$, vars))

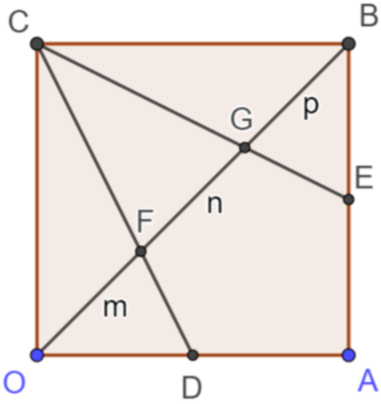
$\rightarrow$ $\{1\}$

7 GroebnerLex(Samenvoegen(hypothesen, condities, $\{S_2\, y - 1\}$), Samenvoegen($\{y, y_1\}$, vars))

$\rightarrow$ $\{1\}$

Methode 3 bij stelling over een vierkant

Neem een vierkant OABC. Dan delen de twee lijnen die C verbinden met de middens van OA en AB de hoofddiagonaal OB in drie stukken van gelijke lengte.



Methode 1 en 3 bij stelling over een vierkant

1 hypothesen := $\{x_1 - x_2, x_3 - x_4, u - 2\,x_1 - x_2, u + x_3 - 2\,x_4\}$

→ **hypothesen** := $\{\mathbf{x_1 - x_2, x_3 - x_4, u - 2\,x_1 - x_2, u + x_3 - 2\,x_4}\}$

2 condities := $\{u\,y_1 - 1\}$

→ **condities** := $\{\mathbf{u\,y_1 - 1}\}$

3 $S_1 := x_1^2 + x_2^2 - \frac{2}{9}\,u^2$

→ $\mathbf{S_1 := -\frac{2}{9}\,u^2 + x_1^2 + x_2^2}$

4 $S_2 := x_3^2 + x_4^2 - \frac{8}{9}\,u^2$

→ $\mathbf{S_2 := -\frac{8}{9}\,u^2 + x_3^2 + x_4^2}$

5 $S_3 := (u - x_3)^2 + (u - x_4)^2 - \frac{2}{9}\,u^2$

→ $\mathbf{S_3 := -\frac{2}{9}\,u^2 + (u - x_3)^2 + (u - x_4)^2}$

6 vars := $\{x_4, x_3, x_2, x_1, u\}$

→ **vars** := $\{\mathbf{x_4, x_3, x_2, x_1, u}\}$

7 GroebnerLex(hypothesen, vars)

→ $\{\mathbf{x_4 - u, -x_3 + u, 3\,x_2 - u, -3\,x_1 + u}\}$

8 GroebnerLex(Samenvoegen(hypothesen, $\{S_1, S_2, S_3\}$), vars)

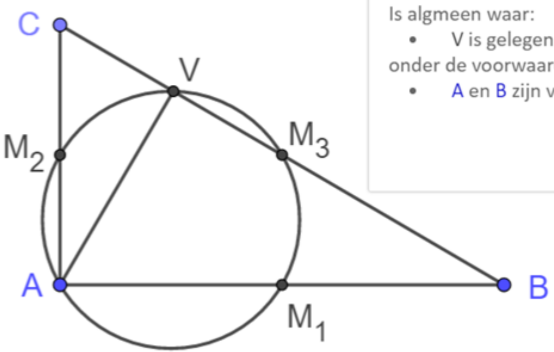
→ $\{\mathbf{u^2, 3\,x_1 - u, 3\,x_2 - u, x_3 - u, x_4 - u}\}$

9 GroebnerLex(Samenvoegen(hypothesen, condities, $\{S_1\,y - 1, S_2\,z - 1, S_3\,w - 1\}$), Samenvoegen($\{z, w, y, y_1\}$, vars))

→ $\{\mathbf{1}\}$

Methode 3 bij cirkelstelling van Apollonius

In een rechthoekige driehoek ABC met rechte hoek in hoekpunt A liggen de middens van de zijden van de driehoek en het voetpunt van de hoogtelijn van A naar BC op een cirkel.



Methode 1 en 3 bij cirkelstelling van Apollonius

Punten: $A(0,0)$, $B(u_1,0)$, $C(0,u_2)$, $M_1(x_1,0)$, $M_2(0,x_2)$, $M_3(x_3,x_4)$, $V(x_5,x_6)$ en middelpunt $M(x_7,x_8)$ van de cirkel door M_1, M_2, M_3.

Methode 1 en 3 bij cirkelstelling van Apollonius

Punten: $A(0,0)$, $B(u_1,0)$, $C(0,u_2)$, $M_1(x_1,0)$, $M_2(0,x_2)$, $M_3(x_3,x_4)$, $V(x_5,x_6)$ en middelpunt $M(x_7,x_8)$ van de cirkel door M_1, M_2, M_3.

Hypothesen:

$$\begin{aligned}
\text{middens} &\implies 2x_1-u_1-u_2, 2x_2-u_2, 2x_3-u_1, 2x_4-u_2\\
AV \perp BC &\implies x_5u_1-x_6u_2\\
B,H,C\text{collineair} &\implies x_5u_2+x_6u_1-u_1u_2\\
|MM_1|^2=|MM_2|^2 &\implies (x_1-x_7)^2+x_8^2-x_7^2-(x_2-x_8)^2\\
|MM_1|^2=|MM_3|^2 &\implies (x_1-x_7)^2+x_8^2-(x_3-x_7)^2-(x_4-x_8)^2
\end{aligned}$$

Methode 1 en 3 bij cirkelstelling van Apollonius

Punten: $A(0,0)$, $B(u_1,0)$, $C(0,u_2)$, $M_1(x_1,0)$, $M_2(0,x_2)$, $M_3(x_3,x_4)$, $V(x_5,x_6)$ en middelpunt $M(x_7,x_8)$ van de cirkel door M_1, M_2, M_3.

Hypothesen:

$$\begin{aligned}
\text{middens} &\implies 2x_1 - u_1 - u_2, 2x_2 - u_2, 2x_3 - u_1, 2x_4 - u_2 \\
AV \perp BC &\implies x_5 u_1 - x_6 u_2 \\
B, H, C\text{collineair} &\implies x_5 u_2 + x_6 u_1 - u_1 u_2 \\
|MM_1|^2 = |MM_2|^2 &\implies (x_1 - x_7)^2 + x_8^2 - x_7^2 - (x_2 - x_8)^2 \\
|MM_1|^2 = |MM_3|^2 &\implies (x_1 - x_7)^2 + x_8^2 - (x_3 - x_7)^2 - (x_4 - x_8)^2
\end{aligned}$$

Condities: $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$

Methode 1 en 3 bij cirkelstelling van Apollonius

Punten: $A(0,0)$, $B(u_1,0)$, $C(0,u_1)$, $D(0,u)$, $M_1(x_1,0)$, $M_2(0,x_2)$, $M_3(x_3,x_4)$, $V(x_5,x_6)$ en middelpunt $M(x_7,x_8)$ van de cirkel door M_1, M_2, M_3.

Hypothesen:

$$\begin{aligned}
\text{middens} &\implies 2x_1 - u_1 - u_2, 2x_2 - u_2, 2x_3 - u_1, 2x_4 - u_2 \\
AV \perp BC &\implies x_5 u_1 - x_6 u_2 \\
B, H, C \text{collineair} &\implies x_5 u_2 + x_6 u_1 - u_1 u_2 \\
|MM_1|^2 = |MM_2|^2 &\implies (x_1 - x_7)^2 + x_8^2 - x_7^2 - (x_2 - x_8)^2 \\
|MM_1|^2 = |MM_3|^2 &\implies (x_1 - x_7)^2 + x_8^2 - (x_3 - x_7)^2 - (x_4 - x_8)^2
\end{aligned}$$

Condities: $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$

Stelling (M op cirkel): $(x_1 - x_7)^2 + x_8^2 - (x_5 - x_7)^2 - (x_6 - x_8)^2$

Methode 3 bij cirkelstelling van Apolonius

GeoGebra Klassiek

1 hypothesen $:= \{2 \cdot x_1 - u_1, 2 \cdot x_2 - u_2, 2 \cdot x_3 - u_1, 2 \cdot x_4 - u_2, x_5 \cdot u_1 - x_6 \cdot u_2, x_5 \cdot u_2 + x_6 \cdot$

2 condities $:= \{u_1 \cdot y_1 - 1, u_2 \cdot y_2 - 1\};$

3 $S := (x_1 - x_7)^2 + x_8^2 - (x_5 - x_7)^2 - (x_6 - x_8)^2;$

4 vgl $:=$ Samenvoegen(hypothesen, condities, $\{S \cdot y - 1\}$);

5 vars $:= \{y, y_1, y_2, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, u_2, u_1\};$

6 GroebnerLex(vgl, vars)

$\rightarrow \{1\}$

Geautomatiseerde ontdekkingen

Wat gebeurt er achter de schermen

Wat gebeurt er achter de schermen

- Stel dat een meetkundige stelling S niet te herleiden is uit de hypothesen H.

Wat gebeurt er achter de schermen

- Stel dat een meetkundige stelling S niet te herleiden is uit de hypothesen H.
- Gepoogd wordt om automatisch een extra hypothese H_0 te vinden zodat S wel volgt uit $H \cup \{H_0\}$.

Wat gebeurt er achter de schermen

- Stel dat een meetkundige stelling S niet te herleiden is uit de hypothesen H.
- Gepoogd wordt om automatisch een extra hypothese H_0 te vinden zodat S wel volgt uit $H \cup \{H_0\}$.
- Gröbner bases worden hiervoor gebruikt.

Wat gebeurt er achter de schermen

- Stel dat een meetkundige stelling S niet te herleiden is uit de hypothesen H.
- Gepoogd wordt om automatisch een extra hypothese H_0 te vinden zodat S wel volgt uit $H \cup \{H_0\}$.
- Gröbner bases worden hiervoor gebruikt.
- Aanpak:

Wat gebeurt er achter de schermen

- Stel dat een meetkundige stelling S niet te herleiden is uit de hypothesen H.
- Gepoogd wordt om automatisch een extra hypothese H_0 te vinden zodat S wel volgt uit $H \cup \{H_0\}$.
- Gröbner bases worden hiervoor gebruikt.
- Aanpak:
  - Stel je wilt de meetkundige plaats van vrij punt $P(x, y)$ bepalen;

Wat gebeurt er achter de schermen

- Stel dat een meetkundige stelling S niet te herleiden is uit de hypothesen H.
- Gepoogd wordt om automatisch een extra hypothese H_0 te vinden zodat S wel volgt uit $H \cup \{H_0\}$.
- Gröbner bases worden hiervoor gebruikt.
- Aanpak:
  - Stel je wilt de meetkundige plaats van vrij punt $P(x, y)$ bepalen;
  - Bereken Gröbner basis van hypothesen, condities van niet-ontaardheid, en de stelling t.o.v de lexicografische ordening met $x \prec y \prec x_1 \prec \cdots x_n$;

Wat gebeurt er achter de schermen

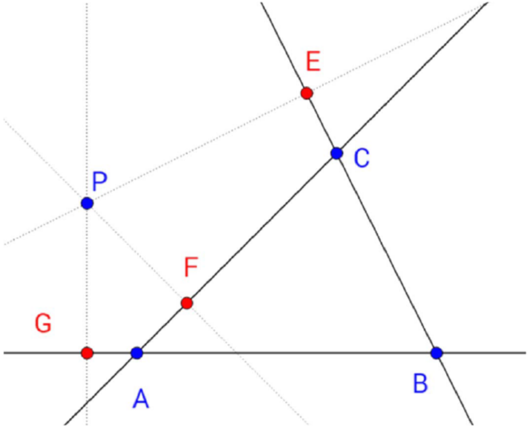
- Stel dat een meetkundige stelling S niet te herleiden is uit de hypothesen H.
- Gepoogd wordt om automatisch een extra hypothese H_0 te vinden zodat S wel volgt uit $H \cup \{H_0\}$.
- Gröbner bases worden hiervoor gebruikt.
- Aanpak:
  - Stel je wilt de meetkundige plaats van vrij punt $P(x, y)$ bepalen;
  - Bereken Gröbner basis van hypothesen, condities van niet-ontaardheid, en de stelling t.o.v de lexicografische ordening met $x \prec y \prec x_1 \prec \cdots x_n$;
  - Zoek in Gröbner basis veeltermen met alleen x en y.

Wat gebeurt er achter de schermen

- Stel dat een meetkundige stelling S niet te herleiden is uit de hypothesen H.
- Gepoogd wordt om automatisch een extra hypothese H_0 te vinden zodat S wel volgt uit $H \cup \{H_0\}$.
- Gröbner bases worden hiervoor gebruikt.
- Aanpak:
  - Stel je wilt de meetkundige plaats van vrij punt $P(x, y)$ bepalen;
  - Bereken Gröbner basis van hypothesen, condities van niet-ontaardheid, en de stelling t.o.v de lexicografische ordening met $x \prec y \prec x_1 \prec \cdots x_n$;
  - Zoek in Gröbner basis veeltermen met alleen x en y.

Illustratief voorbeeld: stelling van Simson

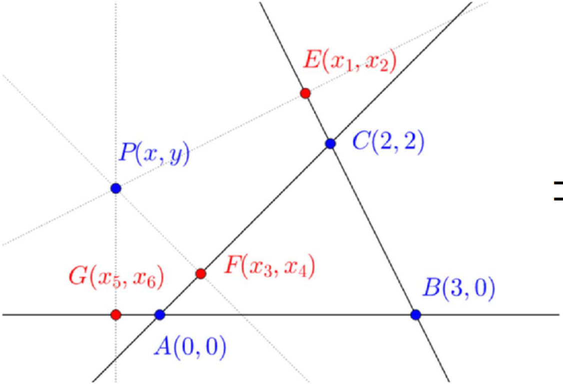
Ontdekking van de stelling van Simson



$$=\begin{cases} PE \perp BC \\ E \in BC \\ PF \perp AC \\ F \in AC \\ PG \perp AB \\ G \in AB \end{cases}$$

$A(0,0)\ \ B(3,0)\ \ C(2,2)\ \ P(x,y)\ \ E(x_1,x_2)\ \ F(x_3,x_4)\ \ G(x_5,x_6)$

Ontdekking van de stelling van Simson: Specifiek



$$\Longrightarrow \begin{cases} x - y - x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ x + y - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x - x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

Ontdekking van de stelling van Simson: Specifiek

$$\begin{cases} x - y - x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ x + y - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x - x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

Ontdekking van de stelling van Simson: Specifiek

$$\begin{cases} x - y - x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ x + y - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x - x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

E, F, G collineair

$$+ \quad (x_5 - x_1) \cdot (x_4 - x_2) - (x_3 - x_1) \cdot (x_6 - x_2) = 0$$

Ontdekking van de stelling van Simson: Specifiek

$$\begin{cases} x - y - x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ x + y - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x - x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

E, F, G collineair

$$+ \quad (x_5 - x_1)\cdot(x_4 - x_2) - (x_3 - x_1)\cdot(x_6 - x_2) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 - 3x - y = 0}$$

"oplossen voor x en y" (Eliminatietheorie – Gröbner bases)

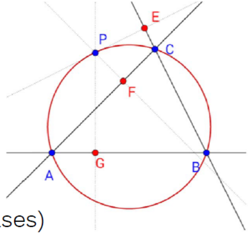
Ontdekking van de stelling van Simson: Specifiek

$$\begin{cases} x - y - x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ x + y - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x - x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

E, F, G collineair

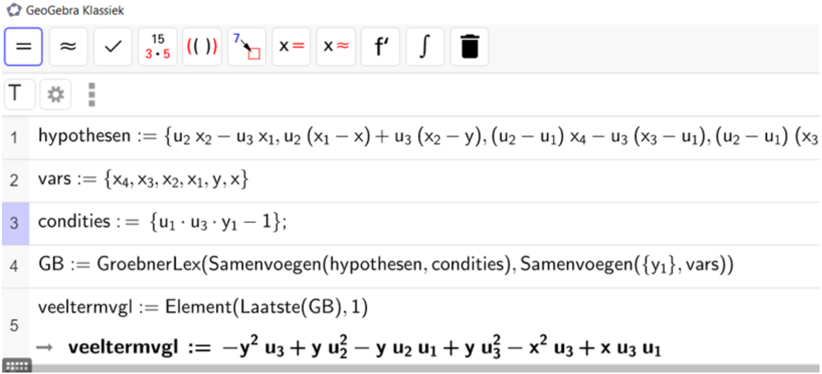
$$+ \quad (x_5 - x_1)\cdot(x_4 - x_2) - (x_3 - x_1)\cdot(x_6 - x_2) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 - 3x - y = 0} \quad \Longrightarrow$$



"oplossen voor x en y" (Eliminatietheorie – Gröbner bases)

Ontdekking van de stelling van Simson: Algemeen



Dit is een vergelijking van een cirkel;
namelijk de omgeschreven cirkel van de driehoek.