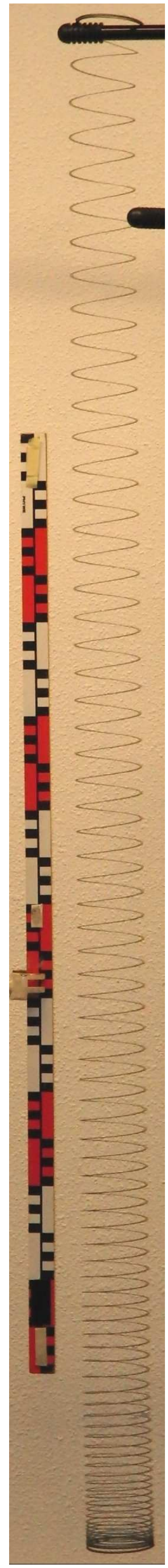
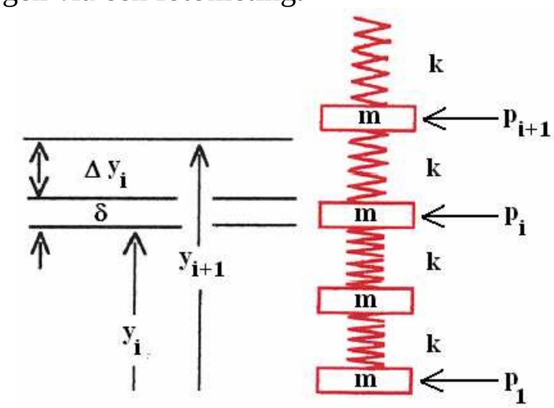
Hoe hangt een Slinky?

In natuurkundeonderwijs is de bestudering van mechanicaproblemen meestal beperkt tot starre lichamen. De beweging van niet-starre lichamen wordt als te ingewikkeld voor vwo-leerlingen beschouwd, met als belangrijke uitzondering een veer. Dit is een beetje raar want juist een veer maakt vaak complexe bewegingen. Het best komt de complexiteit tot uiting wanneer een stil hangende, door zijn eigen gewicht uitgerekte slinky losgelaten wordt (voor de goede orde: een slinky is een metalen of plastic spiraal, zie nevenstaande foto). De intuïtie over valbewegingen opgedaan bij de bestudering van starre lichamen lijkt dan in tegenspraak met de werkelijke beweging van de vallende slinky. We verklappen in dit artikel niet wat er dan gebeurt: u moet maar zelf experimenteren. In een volgend Signaalnummer gaan we op de dynamica van een vallende Slinky in. Als voorbereiding hierop onderzoeken we eerst de vorm van een onder invloed van zijn eigen gewicht hangende Slinky. Meten op een foto is bij uitstek geschikt om gegevens te verzamelen. Met voor vwo-leerlingen toegankelijke wis- en natuurkunde is een wiskundig model op te stellen. Theorie en experiment blijken in goede overeenstemming met elkaar te zijn.



Wiskundig model

We laten een slinky aan de bovenste winding hangen, waarbij de onderste winding vrij van de grond is, zie nevenstaande foto. De afstand tussen twee opeenvolgende windingen neemt van onder- en naar boven toe omdat de zwaartekracht van steeds meer windingen gecompenseerd moet worden. Het modelleren van deze onder zijn eigen gewicht uitgerekte slinky begint met een versimpeling van de werkelijke situatie. Wij hanteren het volgende schema, waarin gewichtjes van onderaf genummerd worden, beginnend bij 1, en toetsen later de geschiktheid op basis van gegevens verkregen via een fotometing:



Figuur 1. Versimpeld model van een slinky

We benaderen de slinky als een systeem van N gewichten met elk massa m en dikte δ, met daar tussenin massaloze veren met veerconstante k. Voor de totale massa M geldt dus: $M = N\,m$. Met L_0 noteren we de lengte van de slinky in horizontale, niet-uitgerekte vorm. Er geldt: $L_0 = N\,\delta$. De totale lengte voor de onder invloed van zwaartekracht uitgerekte slinky noteren we met L. We leiden een formule voor lengte L af. Hiervoor kiezen we een coördinatenstelsel zodanig dat de oorsprong ter hoogte van de onderkant van het onderste gewichtsblokje is. Verder nemen we nemen aan dat de boven- en onderkant van opeenvolgende gewichtjes steeds de uiteinden van een uitgerekte veer vormen. Gebruiken we de lengte Δy_1 van de veer tussen gewichtje 1 en 2 als eenheid u, dan geldt vanwege evenwicht van krachten dat de zwaartekracht en de veerkracht werkend op het onderste gewichtje aan elkaar gelijk moeten zijn: $m\,g = k\,u$

Dus:

$$u = \frac{m\,g}{k}$$

en

$$\Delta y_1 = u\,.$$

De verticale afstand y_2 van de oorsprong tot de bovenkant van de eerste veer (gelijk aan de onderkant van gewichtsblokje 2) is gegeven door:

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 + \delta = u + \delta .$$

Omdat de veer tussen gewichtje 2 en 3 een gewicht moet dragen van $2m$, geldt voor de lengte Δy_2 van de veer tussen gewichtje 2 en 3:

$$\Delta y_2 = 2u$$

De verticale afstand y_3 van de oorsprong tot de bovenkant van de tweede veer (gelijk aan de onderkant van gewichtsblokje 3) is gegeven door:

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 + \delta = u + 2u + 2\delta .$$

Meer algemeen, omdat de veer tussen gewichtje i en $i+1$ een gewicht moet dragen van $i\,m$, geldt voor de lengte Δy_i van de veer tussen gewichtje i en $i+1$ (voor $i = 1, 2, \ldots, N-1$):

$$\Delta y_i = i\,u$$

Ook geldt:

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i = \Delta y_i + \delta = i\,u + \delta .$$

De verticale afstand y_{i+1} van de oorsprong tot de bovenkant van de i^{de} veer (gelijk aan de onderkant van gewichtsblokje $i+1$) is gegeven door:

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i + \delta &= u\left(\sum_{j=1}^{i} j\right) + i\,\delta \\ &= \frac{1}{2} i\left(i+1\right)u + i\,\delta \end{aligned} .$$

Hierbij hebben we de somformule van een rekenkundige rij gebruikt. Voor het bovenste gewichtje nemen we $i = N-1$ en hieruit volgt:

$$L = \frac{1}{2}\left(N-1\right)N\,u + N\delta = L_0 + \frac{1}{2}\left(N-1\right)N\,u .$$

De voornaamste conclusies uit dit wiskundige model zijn:

(1) de afstand tussen twee opeenvolgende windingen neemt van onder naar boven lineair toe;

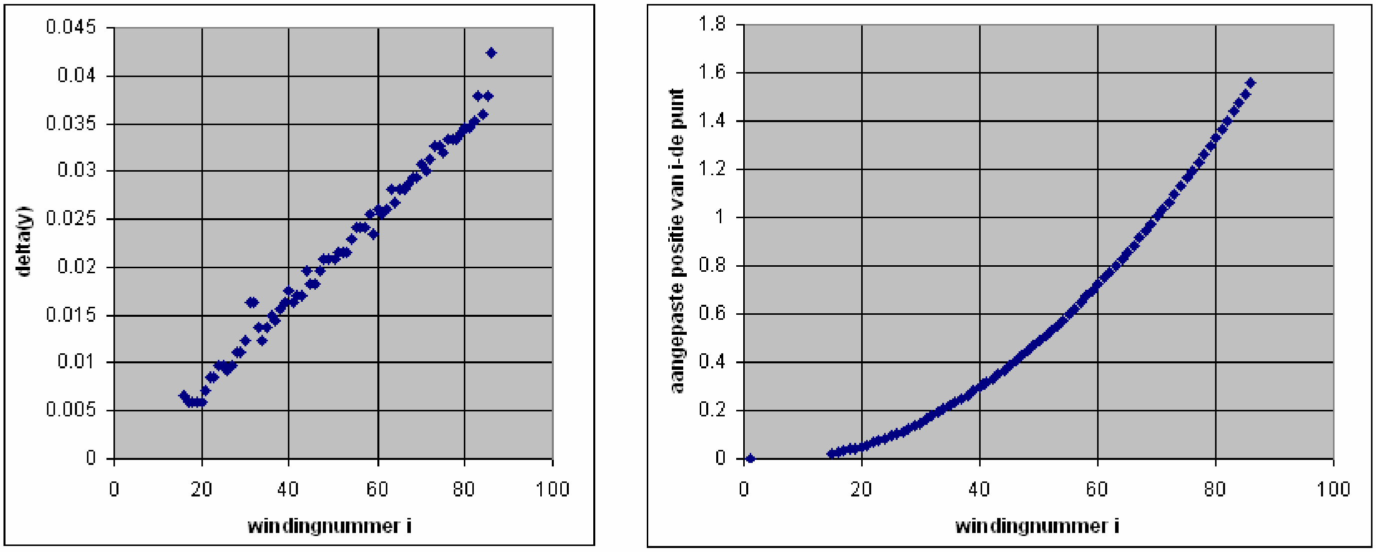
(2) de lengtetoename van een slinky in rusttoestand naar een verticaal opgehangen slinky hangt kwadratisch af van het aantal windingen.

Meting op een foto

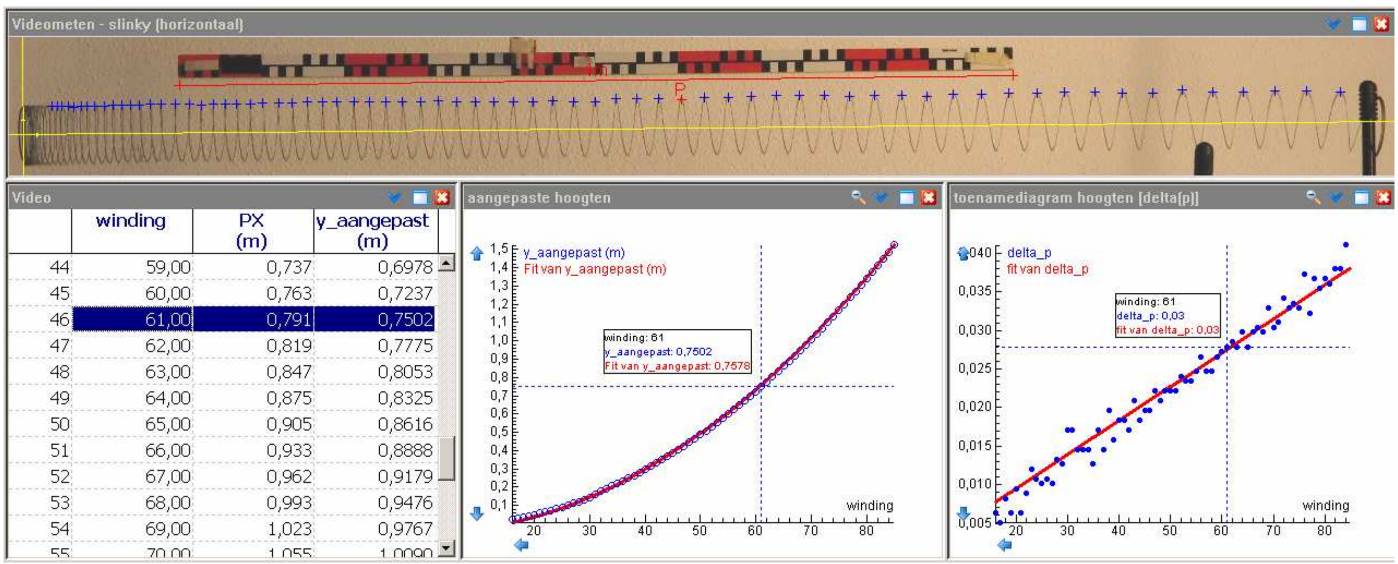
De kwaliteit van een wiskundig model wordt bepaald door de beschrijvende en voorspellende waarde. De eerste eigenschap van het model komt in dit voorbeeld tot zijn recht wanneer de verticale positie van opeenvolgende windingen van de hangende slinky op een foto opgemeten worden en de experimentele resultaten met het theoretische model vergeleken worden. De fotometing kan op verschillende manieren gebeuren. In het gratis programma IrfanView om digitale afbeeldingen te bekijken en te bewerken kunnen de posities van de windingen, d.w.z. de posities waar de windingen aan de rechterkant in de foto naar de fotograaf toekomen, in pixels heel nauwkeurig bepaald worden omdat je ongelimiteerd kunt inzoomen en nog steeds de posities in pixel coördinaten van de originele afmeting te zien krijgt. De meetlat in de foto maakt de conversie van pixel naar meter mogelijk.

De gegevens kun je verzamelen in een spreadsheet programma zoals Excel en verder analyseren. Daarbij is het wel handig om eerst een paar gegevens van de gebruikte slinky vast te stellen omdat bijvoorbeeld in het onderste deel van de hangende slinky op een gegeven moment geen goed onderscheid te maken is tussen windingen. Je moet dus wel het totale aantal windingen van de slinky weten om de rangnummers correct te krijgen in de vergelijking van de experimentele gegevens met het wiskundige model. Ook moet je in ons wiskundige model de dikte δ van de spiraal weten en de positiemetingen hiervoor corrigeren. Voor de in het experiment gebruikte slinky geldt: rustlengte L_0 = 0,0575 m, massa = 0,231 kg, diameter = 0,069 m en het aantal windingen N = 86 (bovenste en onderste winding meegeteld). Dus: $\delta = 0{,}0006686\,\text{m}$ en $m = 0{,}002686\,\text{kg}$.

Idealiter geldt voor de meting dat het verschil van twee opeenvolgende posities lineair toeneemt met het rangnummer. Meer preciezer: idealiter is de meting van de positie p_i van winding i gelijk is aan $y_i + \dfrac{\delta}{2}$, d.w.z. $p_i = \dfrac{1}{2}\left(i-1\right)iu + \left(i - \dfrac{1}{2}\right)\delta$, voor geschikte waarde van u. Je kunt ook de grootheid $p_i - \left(i - \dfrac{1}{2}\right)\delta$ uitzetten tegen het rangnummer i en de beste functiefit van de vorm $\dfrac{1}{2}\left(i-1\right)iu$ opsporen of het toenamediagram van deze grootheid bepalen en vaststellen dat hierbij de formule $i\,u$ goed past. In Figuur 1 staan de in Excel gemaakte diagrammen: links het lineaire verband van het toenamediagram en rechts het bijpassende kwadratische verband. Afwijkingen komen doordat de slinky in werkelijkheid oneffenheden vertoont.



Figuur 1. Excel diagrammen bij de fotometing via IrfanView.



Figuur 2. Fotometing en analyse van resultaten.

Ook in Coach kun je meten op een foto. Omdat je in Coach 6 nog niet kunt inzoomen tijdens het meten is het voor de meeste computerschermen handig om de foto een kwartslag te draaien, zoals in Figuur 2 te zien is. De beste rechte-lijn-benadering van Δp_i met $\delta = 0{,}0006686\,\text{m}$ (rechterdiagram) geeft: $u = 0{,}00044\,\text{m}$. Deze waarde is goed te gebruiken in de benadering van de aangepaste hoogten in het linkerdiagram met een constante correctieterm wordt toegevoegd. Wij hebben de grafiek van de volgende uitdrukking gevonden:

$$\text{aangepaste hoogte} = 0{,}00022(i-1)i - 0{,}04743.$$

Theoretisch zou deze constante term er niet moeten wezen: het wijst op een te grote berekende doorhang. De grafiek van de meetwaarden in vergelijking met de functiefit illustreert een sterkere afbuiging aan de onderkant. Dit duidt er op dat de veerconstanten tussen de windingen aan de uiteinden van de slinky groter zijn dan in het middenstuk. Wellicht is veelvuldig gebruik van de slinky de oorzaak van de afwijking. Al met al is de overeenstemming tussen theorie en experiment toch goed te noemen.

Waar bevindt zich het zwaartepunt?

Het zwaartepunt van een niet uitgerekte slinky bevindt zich halverwege, bij de middelste winding. Menigeen veronderstelt gemakkelijk dat dit ook zo is bij een onder zijn eigen gewicht hangende slinky. Dit is evenwel fout, maar waar ligt het zwaartepunt dan wel? Met ons theoretisch model kunnen we daar ook achterkomen:

$$\text{zwaartepunt} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i$$
$$= \frac{u}{2N}\left(\sum_{i=1}^{N} i^2\right) + \left(\frac{2\delta - u}{2N}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} i\right) - \frac{1}{2}\delta$$
$$= \frac{u}{2N}\cdot\frac{N\left(N+1\right)\left(2N+1\right)}{6} + \left(\frac{2\delta - u}{2N}\right)\cdot\frac{N\left(N+1\right)}{2} - \frac{1}{2}\delta$$
$$= \frac{u}{6}\left(N^2 - 1\right) + \frac{1}{2}\delta N = \left(L - L_0\right)\left(\frac{N+1}{3N}\right) + \frac{1}{2}L_0$$
$$= \left(\frac{N+1}{3N}\right)L + \left(\frac{N-1}{6N}\right)L_0$$

Voor een groot aantal windingen vinden we dan:

$$\text{zwaartepunt} \approx \frac{1}{3}L + \frac{1}{6}L_0$$

Dit resultaat wijkt enigszins af van de literatuur waarin de hoogte van het zwaartepunt gelijk is aan eenderde van de totale lengte. Dit komt omdat wij de dikte van de windingen in ons model niet verwaarloosd hebben. Maar het is ook weer niet zo erg afwijkend omdat bij een groot aantal windingen L_0 te verwaarlozen is ten opzichte van L.
Het is overigens niet zo gemakkelijk om het zwaartepunt van een hangende slinky experimenteel te bepalen. Eén manier is de slinky van boven los te laten en de val te bestuderen. Aan de hand van een videometing kan men dan controleren of het berekende zwaartepunt zich inderdaad gedraagt als een vallende puntmassa ($y(t) = \frac{1}{2}gt^2$). Hierover meer in het volgende Signaalnummer.

Wat mogen we nu concluderen? Ons inziens is deze studie een mooi voorbeeld van hoe modelleren in de praktijk gebeurt en hoe theorie en experiment met elkaar in verband worden gebracht, soms met verassende resultaten. Anderzijds is een belangrijk pluspunt van deze activiteit is dat het een aardige combinatie van behapbare wis- en natuurkunde met zich meebrengt.

André Heck, Peter Uylings,
AMSTEL Instituut,
A.J.P.Heck@uva.nl, P.H.M.Uylings@uva.nl