

In dit artikel modelleert **André Heck** het veranderingsproces van bier in een glas met gebruikmaking van ICT.

## Dit programma wordt u aangeboden door AMSTEL

### Inleiding

Contexten in wiskundeonderwijs staan de laatste jaren ter discussie. Slechte voorbeelden van gekunstelde ‘verhaaltjessommen’ in schoolboeken en eindexamens, waarin leerlingen eigenlijk alleen maar een beetje stoeien met uit de lucht vallende wiskundige formules en niet veel meer doen dan het vervangen van variabelen door getallen en het uitrekenen van een antwoord op een gestelde vraag met behulp van een grafische rekenmachine, versterken de opinie dat contexten er in schoolwiskunde eigenlijk niet toe doen en de wiskunde alleen maar verhullen of, nog erger, contraproductief zijn, leerlingen demotiveren en een onwaarachtig beeld van het gebruik van wiskunde in de beroepspraktijk geven. De Resonansgroep wiskunde [1] pleitte in haar reactie op de conceptexamenprogramma’s van 2007 voor een ingrijpende heroverweging van de rol van contexten in wiskundeonderwijs. Met name sprak deze groep haar voorkeur uit voor contextloze ontwikkeling en oefening van reken- en formulevaardigheid en zag zij liever contextloze eindexamenopgaven dan opgaven waarin de context niet bestand is tegen een kritische analyse ten aanzien van modelvorming, realiteitswaarde en functioneel gebruik van het wiskundig instrumentarium (zie ook [2]). Wim Kleijne [3] pleitte er voor om contexten buiten het centrale examen wiskunde B te laten omdat ze heel snel óf triviaal zijn óf op schoolniveau veel te complex zijn voor het korte tijdsbestek van een opgave van het centraal examen. Ook de Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs [4] vond een herbezinning op de rol van contexten in het centraal examen gewenst en pleitte er bijvoorbeeld voor om bij het CE wiskunde B buitenwiskundige contexten alleen te gebruiken wanneer de aard van de opgave daar specifiek om vraagt.

Waar zich consensus lijkt te ontwikkelen wat betreft de rol van contexten in de toetsing op het centrale eindexamen, blijven er verschillende opvattingen over de rol van contexten in het leerproces bestaan. Op dit punt heeft de Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs [4] aansluiting gezocht bij de zogeheten context-concept benadering, die in de huidige vernieuwing van de exacte vakken als uitgangspunt dient, en bij de theorie van realistisch wiskundeonderwijs. De kwaliteit van een context wordt in deze onderwijsvisie bepaald door de mate waarin de context betekenisvol voor leerlingen is, aansluit bij hun eerdere ervaringen binnen of buiten het onderwijs en aanleiding geeft tot conceptvorming. Een goede context bereidt voor op ontwikkeling en begrip van een concept of methode en draagt op deze manier bij aan de totstandkoming van een rijk netwerk van begrippen, methoden en situaties. Centraal in dat netwerk staat het onderliggende concept dat geleidelijk uit verschillende, begrijpelijke maar niet noodzakelijk realistische voorbeelden is geabstraheerd. Dankzij verworven inzicht en verdere oefening is een

leerling in staat om in analoge of nieuwe situaties de toepasbaarheid van het concept te herkennen en te benutten. De kracht van een concept kan dan blijken uit de toepassing in diverse contexten. De Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs vatte haar visie over contexten in wiskundeonderwijs als volgt samen [4, standpunt 7]: “In de didactische vormgeving van de curricula staat een intern-wiskundig samenhangend netwerk van concepten centraal. Wiskundige of toegepaste contexten kunnen daaraan een bijdrage leveren. Niet-authentieke contexten kunnen als metafoor fungeren, maar dienen in het algemeen te worden vermeden, evenals ‘verhaaltjessommen’.” De commissie constateerde evenwel een zekere spanning tussen het gebruik van contexten en abstractie. Tijdens het aanleren van wiskundige vaardigheden en het verwerven van intrinsiek wiskundig inzicht kunnen steeds wisselende, buitenwiskundige contexten de aandacht afleiden van de eigenlijke wiskundige inhoud. Met andere woorden, te veel aandacht voor het horizontaal mathematiseren, het gebruik van wiskundige middelen om de wereld om ons heen te organiseren, kan ten koste gaan van het verticale aspect, de aandacht voor wiskunde als bouwwerk van abstracties. Het gebruik van contexten schiet zijn doel voorbij als abstractie niet wordt toegekomen.

Dit laatste aspect is voor anderen die betrokken zijn of zich betrokken voelen bij wiskundeonderwijs een reden om te hameren op het belang van een solide wiskundige fundering en adequate beheersing van abstracte vaardigheden alvorens diepgaand op toepassingen ingegaan kan worden. Openlijk wordt getwijfeld aan de doeltreffendheid van het aanleren van wiskundige begrippen en methoden vanuit contexten. De Resonansgroep wiskunde [1] verwoordde dit standpunt in haar reactie op de conceptexamenprogramma’s van 2007 als volgt: “Contexten kunnen een nuttige rol spelen in het wiskundeonderwijs, bijvoorbeeld bij het introduceren van nieuwe begrippen en onderwerpen. Ze vormen echter een middel en geen doel. Het doel van het wiskundeonderwijs is het leren beheersen van de taal van de wiskunde en het zinvol leren inzetten van de instrumenten van de wiskunde. De kracht van de wiskunde ligt namelijk juist in de abstractie, in de inzetbaarheid van dezelfde instrumenten in de meest uiteenlopende toepassingsgebieden.” Als voorbeelden van zinvolle, inspirerende en motiverende contexten bij de introductie van nieuwe wiskundige begrippen mogen dienen de context van geluid of periodieke bewegingen voor de invoering van goniometrische functies en de contexten van populatiedynamica, afkoelingsprocessen, radioactief verval of de ontlading van een condensator als voorbeelden van exponentiële modellen als inleiding op e-machten en hun wiskundige eigenschappen. Ook kunnen contexten inspirerend en motiverend werken in speciale projecten, zoals praktische opdrachten en profielwerkstukken, waarin geleerde wiskunde toegepast en verdiept wordt. Zoals Jan

van de Craats [5] en vele anderen, waaronder de auteur [6], hebben opgemerkt kan in zulke gevallen uitgebreid aandacht worden besteed aan kritische modelvorming, dat wil zeggen aan de vertaling van de context naar een wiskundig model en een discussie van de validiteit van de modelkeuze. Een vak als wiskunde D leent zich hiervoor bij uitstek. Ook kan dit er voor zorgen dat leerlingen zicht krijgen op actuele toepassingen van wiskunde en op de wiskunde in vervolgonderwijs en beroep.

In de discussie over de rol van contexten in wiskundeonderwijs ligt het accent vooral op het nut hiervan in het leerproces en op het geboden perspectief van toepassing van wiskunde in vervolgopleiding en beroepspraktijk. Hierdoor wordt mijns inziens het risico gelopen dat het plezier in wiskunde doen zonder direct praktisch oogmerk uit het oog verloren raakt. Dit is jammer want ik ben van mening dat toepassingen van wiskunde tot op zekere mate ook gewoon voor de lol of louter en alleen uit bevrediging van nieuwsgierigheid bestudeerd mogen worden. In dit artikel wil ik dit illustreren aan de hand van wiskundig modelleren van het neerslaan van een bierkraag. Deze activiteiten vormen een onderdeel van de e-klas Continue Dynamische Systemen voor wiskunde D, ontwikkeld aan de its academy [7], en zijn bedoeld om leerlingen door middel van (thuis) experimenteren en zelf modellen opstellen met continue dynamische systemen in de weer te laten zijn. We zullen zien dat deze context gebruikt kan worden om allerlei wiskundige methoden en technieken te introduceren en te oefenen. In deze zin is het gebruik van de context een verrijking voor onderwijs in veranderingsprocessen. Maar misschien is het plezier dat leerlingen aan de onderzoeksactiviteiten in deze context kunnen beleven nog wel belangrijker dan het oefenen van wiskunde of het belang van onderzoek naar de stabiliteit van een bierkraag voor een bierbrouwerij.

### Wiskundig plezier met bier

Elke bierdrinker kent het fenomeen: bij het inschenken van bier in een glas vormt zich een schuimkraag die na verloop van tijd, wanneer het glas onaangeroerd blijft, verdwijnt. De perceptie van wat een goede bierkraag is verschilt van persoon tot persoon en van regio tot regio [8,9] en leidt tot veel discussies onder bierdrinkers. Genoeg redenen voor bierbrouwers om te onderzoeken hoe zij hun klanten tevreden kunnen stellen met een fraaie, niet overmatige, stabiele bierkraag en hoe zij tegelijkertijd rekening kunnen houden met regionale of landelijke verschillen. Leerlingen kunnen in praktische opdrachten ook de invloed van diverse fysische factoren op de vorming en stabiliteit van een bierkraag onderzoeken. Mogelijke factoren zijn onder meer de temperatuur van het bier, de temperatuur van het bierglas, de vorm van het bierglas, de properheid van het bierglas, de wijze van inschenken, het alcoholpercentage en de samenstelling van het bier. In dit artikel beperken we ons tot het meten en modelleren van het proces van een inzakkende bierkraag bij een onaangeroerd cilindervormig glas gevuld met alcoholvrij bier. Hiervoor wordt het computerprogramma Coach [10] gebruikt. Een video-opname via Coach legt het veranderingsproces vast en de hoogtes van bierkraag en biervloeistof kunnen in de film opgemeten en geanalyseerd worden. De modelleeromgeving

van Coach stelt de leerling in staat om wiskundige modellen op te stellen en meetresultaten met resultaten uit modelberekeningen te vergelijken. Zoals we zullen zien biedt het veranderingsproces onder meer gelegenheid tot het bestuderen van exponentieel verval, exponentieel geremd groei, en een twee-compartimentenmodel.

### Videoanalyse van een bierkraag

De proef is simpel en lijkt op het experiment beschreven door Leike [11] en Hackbarth [12]: we schenken bier in een cilindervormig glas en meten de hoogte van de biervloeistof en de hoogte van de bierkraag in de loop van de tijd. Figuur 1 toont een schermafdruk van een Coach activiteit waarin met een webcam elke 4 seconden een beeldje van het veranderingsproces van het bier in een glas vastgelegd is en vervolgens de video clip verder wiskundig geanalyseerd is.

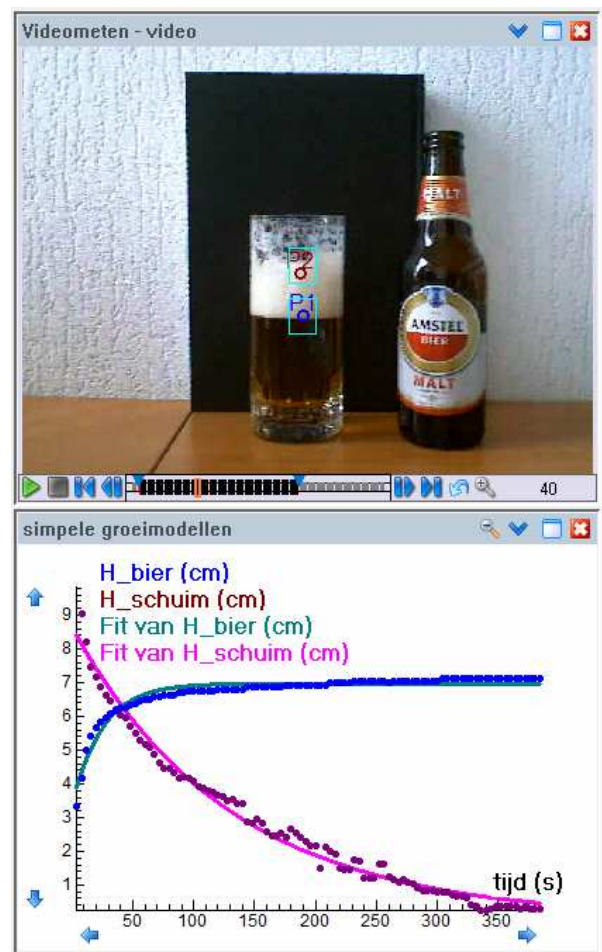


fig. 1 Schermafdruk van een videoanalyse van het veranderingsproces van bier in een glas

De videoanalyse houdt het volgende in: eerst wordt de hoogte van de biervloeistof ( $H_{\text{bier}}$ , gedefinieerd als de hoogte gemeten vanaf de binnenwand aan de onderkant van het glas tot aan het scheidingsvlak tussen vloeistof en bierschuim) en de hoogte van de bierkraag van het alcoholvrije bier ( $H_{\text{schuim}}$ , gedefinieerd als de hoogte gemeten vanaf het scheidingsvlak tussen vloeistof en bier-

schuim tot aan de bovenkant van de bierkraag) in de video clip opgemeten. Hier komt al de nodige wiskunde om de hoek kijken via vragen als “Wat is een geschikt assenstelsel?” “Hoe ijk je? Welke punten in de video clip ga je meten en hoe bereken je hieruit de gewenste grootheden? Hoe geef je de meetresultaten grafisch weer?”, enzovoort. De videometing, geautomatiseerd door middel van ‘point tracking’, wordt bemoeilijkt doordat er bierschuim op de wand van het glas achterblijft. Dit levert ruis in de gegevensverzameling op, maar naar zal blijken staat dit een vruchtbare wiskundige analyse van het veranderingsproces niet in de weg.

De processen die een rol spelen bij de vorming en stabiliteit van bierschuim zijn niet eenvoudig en vormen het kneepje van het vak van bierbrouwer. De belangrijkste fysische verschijnselen zijn volgens Lewis en Bamforth [13]: (1) bellenvorming; (2) schuimvorming; (3) drainage (4) disproportioneering (5) boordselforming. Bier is bij een temperatuur van 4 °C of hoger een oververzadigde oplossing van kooldioxide en dit gas komt vrij vanaf het moment van inschenken. Bellenvorming treedt niet spontaan op: hiervoor zijn wel groei-kernen nodig in de vorm van stofdeeltjes in de vloeistof, krassen of imperfecties in het bierglas (soms met opzet in de bodem van een speciaal bierglas gemaakt) en microgasbellen. Schuimvorming gaat enige tijd door wat een aantrekkelijk beeld oplevert van stijgende gasbellen in het bierglas en er voor zorgt dat de bierkraag enige tijd in stand gehouden wordt. Temperatuur, de vorm van het bierglas, de wijze van inschenken en de oppervlaktespanning en viscositeit van het bier, die afhangen van de samenstelling van het bier, zijn de meest bepalende factoren voor bellen- en schuimvorming. Drainage, d.w.z. de neerwaartse stroom van vloeistof door de schuimkraag onder invloed van zwaartekracht, begint zodra met inschenken gestopt wordt. Dale e.a. [14] hebben aangetoond dat de eerste fase van inzakking van de bierkraag, die tot pakweg 300 seconden aan kan houden, aardig wiskundig beschreven kan worden via een model van exponentieel verval. Tijdens dit proces verandert de structuur van het bierschuim van bolvormige naar polyacederachtige blaasjes en dikt in tot een soort van gelij. De concentratie van proteïnen neemt in het schuim toe en de bierkraag wordt ruwer door disproportioneering, d.w.z. doordat gas diffundeert van een klein naar een naburig groter blaasje. Ronteltap [15] heeft aangetoond dat coalescentie, d.w.z. samensmelting van blaasjes door scherping van de scheidingswand, veel minder bijdraagt aan het neerslaan van het bierschuim. Volgens Dale e.a. [14] kan dit consolidatieproces ook goed gemodelleerd worden met een model van exponentieel verval. Dit houdt in dat volgens de vakliteratuur het neerslaan van bierschuim goed gemodelleerd kan worden met een bi-exponentieel model waarin snel verval en langzaam verval gecombineerd zijn. Hierbij wordt boordselforming, d.w.z. vastkleefing van bierschuim aan de wand van het bierglas verwaarloosd. Van een bierkraag mag in het algemeen verwacht worden dat deze pakweg vijf minuten in stand blijft.

Ik heb zoveel aandacht besteed aan de fysische processen die plaatsvinden in bier dat in een glas geschonken is en met rust gelaten wordt om duidelijk te maken dat een tamelijk eenvoudig wiskundig model als dat van exponen-

tieel verval al gebruikt kan worden om vat te krijgen op een complex, fysisch verschijnsel. Verfijning van het wiskundige model is alleen nodig als de puntjes op de *i* gezet moeten worden en steeds meer aspecten in het wiskundige model ingebouwd worden om de realiteit getrouwer te beschrijven en eerdere vereenvoudigingen ongedaan te maken. Dit progressieve karakter van wiskundig modelleren komt telkens weer in beeld (zie bijvoorbeeld [16-18]) en geeft ook richting aan een geschikte manier om leerlingen met modellen en modelleren om te laten gaan. Het lijkt me om didactische redenen verstandig om niet gelijk een ingewikkeld wiskundig model voor een fysisch verschijnsel uit de lucht te laten vallen, maar om leerlingen eerst met een eenvoudig model te laten werken en dit vervolgens in kleine stapjes te laten verbeteren. Hierbij is essentieel dat leerlingen gemakkelijk met een (computer)model berekende resultaten kunnen vergelijken met experimentele, bij voorkeur zelf verzamelde of gemeten data. Ik ben van mening dat een kritische, onderzoekende houding van leerlingen bevorderd wordt door hen met verschillende modellen van een en hetzelfde verschijnsel bezig te laten zijn. Dit principe zal ook bij de opbouw van wiskundige modellen voor een neerslaande bierkraag in dit artikel gehanteerd worden.

## Een exponentieel model van de bierkraag

Zoals eerder opgemerkt, hebben Dale e.a. [14] aangetoond dat de eerste fase van inzakking van de bierkraag, die tot pakweg 300 seconden aan kan houden, aardig wiskundig beschreven kan worden via een model van exponentieel verval en dit deze fase goed is voor 85 to 90 % van het verlies van schuimmassa. In het diagram aan de onderzijde van Figuur 1 is de beste exponentiele regressiekromme voor de gemeten hoogte van de bierkraag te zien. De bijpassende formule is:

$$H_{\text{schuim}}(t) = H_{\text{schuim}}(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Hierbij is  $H_{\text{schuim}}(0)$  de beginhoogte van de bierkraag op een zelf ingesteld tijdstip  $t=0$ , wanneer met inschenken gestopt is, en is  $\tau$  de tijdconstante is, beter bekend als de vervaltijd. De grafiek past redelijk goed bij de meetgegevens, behalve tijdens de eerste 20 seconden, voor een vervaltijd van 131 seconden en een beginhoogte van de bierkraag van 8,7 cm. Het verschil aan het begin betekent dat de bierkraag aanvankelijk sneller inzakt dan het theoretische model van de werkelijkheid voorspelt: drainage verloopt dan sneller dan theoretisch verwacht. Dit is te verklaren doordat in deze beginfase de pakkingdichtheid van de blaasjes in het bierschuim veel lager is dan later in het experiment, met als effect dat vloeistof sneller door de bierkraag naar beneden sijpelt gedurende de eerste 20 seconden na het inschenken van het bier. Een bi-exponentieel vervalmodel biedt hier uitkomst, maar we zullen later op dergelijke groei modellen ingaan.

## Een model voor de vloeistoffase

In direct verband met het model van exponentieel verval voor de hoogte van de bierkraag staat het model van exponentieel geremde groei voor de hoogte van de biervloeistof in het bierglas. Het gaat dan om een functie van de vorm

$$H_{\text{bier}}(t) = c - a \cdot e^{-bt},$$

waarbij de via regressie best bij de gemeten hoogte passende waarden voor de parameters zijn:

$$a = 3,7 \text{ (cm)}, b = 0,04 \text{ (1/s)}, \text{ en } c = 7 \text{ (cm)}.$$

In het diagram aan de onderzijde van Figuur 1 is te zien in welke mate deze regressiekromme de gemeten hoogte benadert. Ook nu zal weer blijken dat er kritiek mogelijk is op de toepasbaarheid van dit model in de eerste fase kort na het inschenken van het bier in het glas en dat een bi-exponentieel geremd groei-model beter functioneert. Laten we daarom maar eens ingaan op de manier hoe leerlingen hier zelf achter kunnen komen.

Op de eerste plaats moeten leerlingen in staat zijn de parameters  $a$ ,  $b$ ,  $c$  uit het model van exponentieel geremde groei te relateren aan het groeiverschijnsel in de werkelijkheid. In dit geval is  $c$  gelijk aan de hoogte van het bier nadat de bierkraag verdwenen is of verwaarloosbaar klein is geworden, onder de veronderstelling dat verdamping geen rol speelt en er niet te veel bierschuim aan het glas blijft kleven. Deze parameterwaarde is eenvoudig uit de hoogtemeting vast te stellen: in ons geval van alcoholvrij bier zou dan  $c$  gelijk zijn aan 7,1 cm. Voor de grootheid  $H_{\text{nat}}$ , gedefinieerd als het verschil tussen de eindhoogte  $c$  van het bier in het glas en de momentane hoogte  $H_{\text{bier}}$  zou dan een eenvoudig model van exponentieel verval goed moeten functioneren. We noemen deze grootheid  $H_{\text{nat}}$ , in navolging van Hackbarth [12], omdat het de hoeveelheid bier in het bierschuim is dat nog door kan sijpelen naar de vloeistoffase. De kwaliteit van het exponentiële vervalmodel voor het 'natte deel' van de bierkraag is goed te beoordelen door gebruik te maken van een logaritmische schaal bij het tekenen van de grafiek van  $H_{\text{nat}}$ . Dan moet immers een rechte lijn tevoorschijn komen:  $\ln(H_{\text{nat}}) = \ln(a) - b \cdot t$ . In Figuur 2 is de logaritmische grafiek te zien voor het verval van de hoogte van de bierkraag tijdens de eerste 200 seconden. Het diagram laat zien dat je ófwel de eerste fase ófwel de tweede fase van de hoogte van het bier in het glas goed met een exponentieel model kunt benaderen, maar dat een rechte lijn benadering over het hele tijdsdomein niet bijster goed is. Dit suggereert een bi-exponentieel model voor  $H_{\text{nat}}$ , d.w.z. een model gegeven door de volgende formule:

$$H_{\text{nat}}(t) = \alpha_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 \cdot e^{-\lambda_2 t}.$$

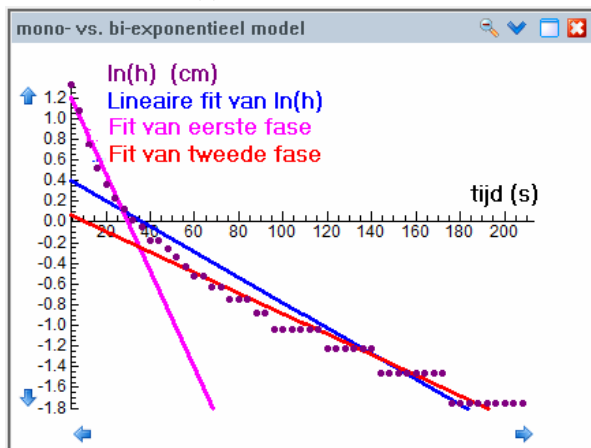


fig. 2 Mono- versus bi-exponentieel verval

Dit levert een lastig te verwerken regressiemodel op met niet-lineaire parameters  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ . Er bestaan diverse geavanceerde wiskundige technieken, zoals bijvoorbeeld Prony's methode [19] of de Poisson-gewogen vierpuntsfit [20] om geschikte parameterwaarden in een bi-exponentieel model bij gegeven data te vinden. Maar een voor leerlingen begrijpelijke, goed uit te voeren, en nuttige regressietechniek is de methode van functies afpellen (Engelse benaming: 'curve stripping', 'function peeling', of 'peeling'). Deze afpeltechniek wordt ook wel gebruikt bij sinusoidale regressie, met bijvoorbeeld als toepassing de wiskundige benadering van de kniehoek als functie van tijd bij lopen en rennen [21]. Het bi-exponentiële groei-model wordt vooral toegepast in kwantitatieve farmacokinetiek [22], en in het bijzonder bij de wiskundige beschrijving van het verloop van de plasmaconcentratie van een oraal toegediend farmacon waarvoor eerste-orde kinetiek van absorptie en eliminatie toepasbaar is.

De afpeltechniek is vooral effectief wanneer het groei of vervalproces uit twee delen bestaat die erg verschillende groeisnelheden hebben. Dat is in ons voorbeeld van het verval van het natte deel van de bierkraag het geval: een snel verval aan het begin en een veel langzamer verval hierna. Het afpellen van de eerste exponentiële functie begint met de tweede fase van langzaam exponentieel verval, waarvan we veronderstellen dat deze na pakweg 50 seconden wel is ingetreden. We beginnen dus met het bepalen van een exponentiële regressiekromme van de vorm  $\alpha_2 \cdot e^{-\lambda_2 t}$  die goed past bij metingen van  $H_{\text{nat}}$  na pakweg 50 seconden. Het resultaat is als fit van  $H_{\text{nat}}$  te zien in Figuur 3. Vervolgens maken we de verschilfunctie van het gemeten natte deel van de bierkraag en de zojuist berekende functiefit hiervan. De verschilfunctie kan op zijn beurt weer als exponentieel verval gemodelleerd worden (zie Figuur 3). Tenslotte is de som van de twee regressiekromme een goede benadering van het natte deel van de bierkraag volgens een bi-exponentieel model; Figuur 3 illustreert dit. De gevonden regressieformule is:

$$H_{\text{nat}}(t) \approx 4,1 \cdot e^{-0,1t} + 1,1 \cdot e^{-0,01t}.$$

De eerste term aan de rechterkant beschrijft snelle drainage aan het begin van het veranderingsproces (vervaltijd = 10 seconden) en de tweede term beschrijft de latere langzame drainage (vervaltijd = 100 seconden)

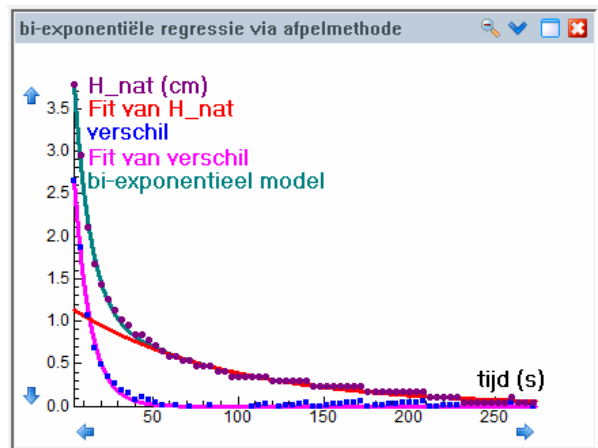


fig. 3 Bi-exponentiële regressie via de afpelmethode

## Een nat en droog deel van bierschuim

De introductie van het natte deel van de bierkraag, in navolging van Hackbarth [12], heeft een bijkomend voordeel dat de hoogte van het droge deel van de bierkraag,  $H_{\text{droog}}$ , gedefinieerd als het verschil tussen de hoogte van het bierschuim ( $H_{\text{schuim}}$ ) en de hoogte van het natte deel ( $H_{\text{nat}}$ ) goed gemodelleerd blijkt te worden door mono-exponentieel verval over het hele tijdsdomein. Figuur 4 illustreert dit. De vervaltijd van het droge deel van de bierkraag is in ons experiment gelijk aan 153 seconden en de beginhoogte van het droge deel van het bierschuim is 6,7 cm. Dit impliceert dat het volgende tri-exponentiële model een geschikte regressiekromme voor de hoogte van de bierkraag oplevert:

$$H_{\text{schuim}}(t) \approx 4,1 \cdot e^{-0,1t} + 1,1 \cdot e^{-0,01t} + 6,6 \cdot e^{-0,0065t}$$

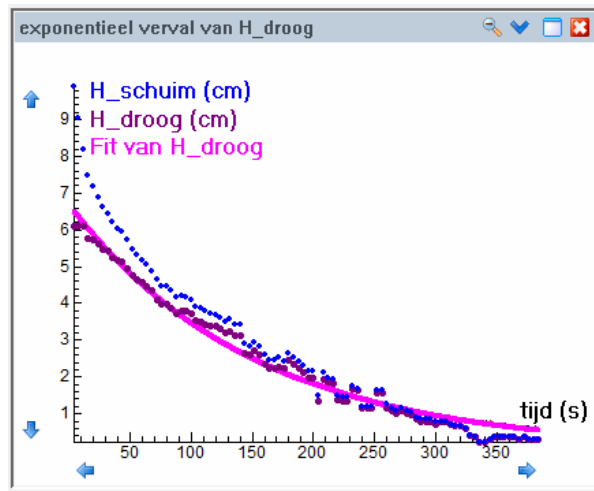


fig. 4 Exponentieel verval van  $H_{\text{droog}}$

## Groei-model als differentiaalvergelijking

Behalve experimentele modellering van de hoogte van de bierkraag en de biervloeistof in het glas door middel van regressie kunnen deze veranderingsprocessen ook beschreven worden met behulp van differentiaalvergelijkingen. Behalve dat dit bekende prototypes van differentiaalvergelijkingen oplevert die een leerling geacht wordt algebraïsch te kunnen oplossen, biedt dit ook de gelegenheid om numerieke oplossingsmethoden te introduceren en computermodellering m.b.v. Coach 6 te gebruiken voor meer ingewikkelde dynamische systemen. De meeste computermodellen zijn overigens ook met Powersim en vergelijkbare modelleringspakketten te maken, maar dan mis je wel de mogelijkheid om resultaten van een modelberekening gemakkelijk met meetresultaten te vergelijken. Mijns inziens kan aan een dergelijke validatie van een computermodel niet zomaar voorbijgegaan worden zonder het risico te lopen dat modelleren niet veel meer wordt dan snappen hoe een model in elkaar zit en werkt. We laten een paar differentiaalvergelijkingen en computermodellen de revue passeren.

### Exponentieel verval van de hoogte van het bierschuim

Het aanvankelijk gekozen exponentiële vervalmodel voor de hoogte van de bierkraag correspondeert met de volgende gewone differentiaalvergelijking:

$$\frac{d}{dt} H_{\text{schuim}}(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot H_{\text{schuim}}(t),$$

waarbij  $\tau$  de vervaltijd is. In de grafische modelleringsomgeving van Coach 6 wordt deze differentiaalvergelijking gerepresenteerd door het schema aan de bovenkant van Figuur 5. Hierin symboliseert de rechthoek de toestandsgrootheid  $H_{\text{schuim}}(t)$  en de uitgaande stroompijl de momentane afname per tijdseenheid van deze grootheid. De andere onderdelen representeren de parameters in het model en de relatiepijlen duiden de connecties tussen variabelen in het model aan. Maar in feite representeert het grafische model tegelijkertijd een algoritme om de vergelijking op te lossen. De oplossingskromme, die volgens het algoritme van Euler berekend is met optimale keuzes voor beginhoogte en vervaltijd, is zichtbaar aan de onderkant van Figuur 5. De code van dit algoritme is in Coach overigens met een druk op een knop te inspecteren en dit maakt de modelleringsomgeving van Coach in tegenstelling tot veel modelleringssoftware geen zwarte doos.

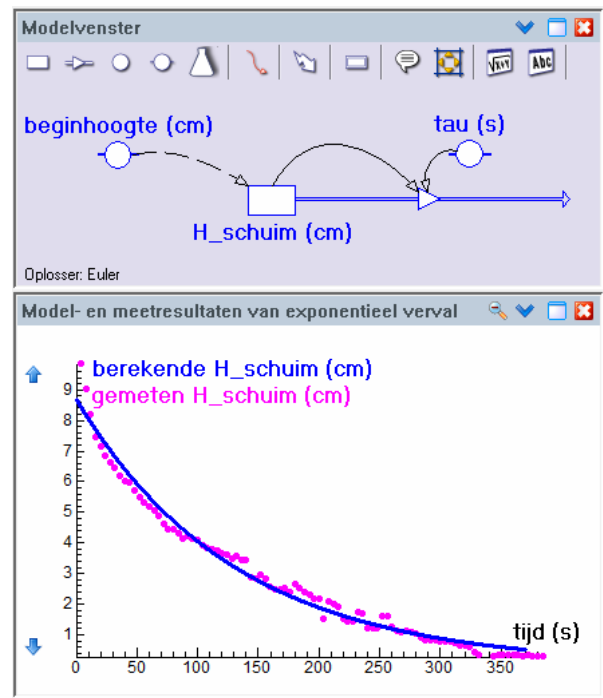


Fig. 5 Grafisch computermodel van exponentieel verval van bierschuim

### Exponentieel geremde groei van de vloeistofhoogte

Het model van exponentieel geremde groei voor de hoogte van de biervloeistof in het bierglas correspondeert met de volgende gewone differentiaalvergelijking:

$$\frac{d}{dt} H_{\text{bier}}(t) = b \cdot (c - H_{\text{bier}}(t))$$

Figuur 6 toont het corresponderende grafische model, dat dit keer via een 4<sup>de</sup>-orde Runge-Kutta algoritme wordt opgelost. Zoals eerder al is opgemerkt is de overeenstemming tussen modelresultaten en meetresultaten voor verbetering vatbaar waar het de eerste fase na het inschenken van het bier in het glas betreft.



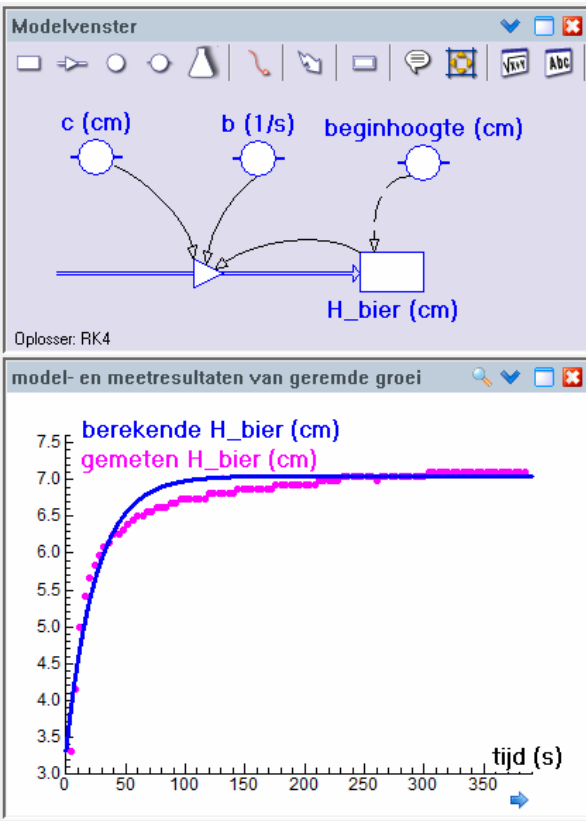


Fig. 6 Grafisch computermodel van geremde groei van biervloeistof

**Een stelsel van lineaire differentiaalvergelijkingen**

Het neerslaan van de bierkraag en de toename van de hoeveelheid vloeistof in het bierglas, wanneer er tenminste niet van het bier gedronken wordt, staan natuurlijk niet los van elkaar. Het is daarom niet gek om beide veranderingen tezamen te beschrijven in een 2-compartimentenmodel en, meer specifiek, via het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{d}{dt} H_{\text{schuim}}(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot H_{\text{schuim}}(t),$$

$$\frac{d}{dt} H_{\text{bier}}(t) = f \cdot \frac{d}{dt} H_{\text{schuim}}(t),$$

waarbij  $f$  de omrekeningsfactor is die een hoeveelheid bierschuim relateert met een equivalente hoeveelheid biervloeistof. Figuur 7 is een schermafdruk van het bijpassende Coach 6 model en resultaten van een simulatie. Het Erlenmeyer symbool in het modelschema verbindt de afname van het bierschuim met de toename van de biervloeistof. In feite representeert dit grafische model de volgende schrijfwijze van het dynamische systeem:

$$\frac{d}{dt} H_{\text{schuim}}(t) = -\text{verandering}(t),$$

$$\frac{d}{dt} H_{\text{bier}}(t) = f \cdot \text{verandering}(t),$$

$$\text{verandering}(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot H_{\text{schuim}}(t).$$

Door middel van het Erlenmeyer symbool kan een samenhangend schema getekend worden dat goed past bij de

veelgebruikte voorraad/stroom-metafoor van het systeem-dynamisch modelleren en de stroom in het 2-compartimentenmodel goed weergeeft. Zonder dit symbool kan alleen een onsamenhangend schema als in Figuur 8 gebruikt worden. Een gebruiker van Powersim of vergelijkbare systeem-dynamische modelleersoftware is bijvoorbeeld hiertoe veroordeeld. In het onderhavige model mag dit geen probleem zijn, maar bij meer ingewikkelde modellen en andere toepassingen zoals chemische reactiekinetiek levert dit wel weinig zeggende grafische modellen op. De diagrammen in Figuur 7 zijn trouwens verkregen met de volgende parameterwaarden:

$$\tau = 100(\text{s}), f = 0,15,$$

$$H0_{\text{schuim}} = 10(\text{cm}), \text{ en } H0_{\text{bier}} = 5.65(\text{cm}).$$

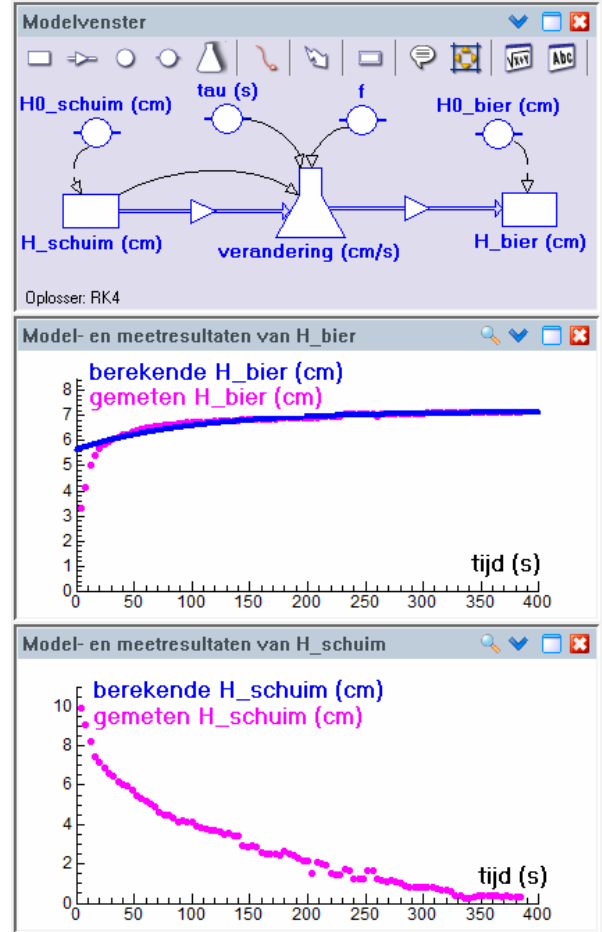


Fig. 7 Grafisch computermodel van een compartimentenmodel voor veranderingen in bierschuim en biervloeistof

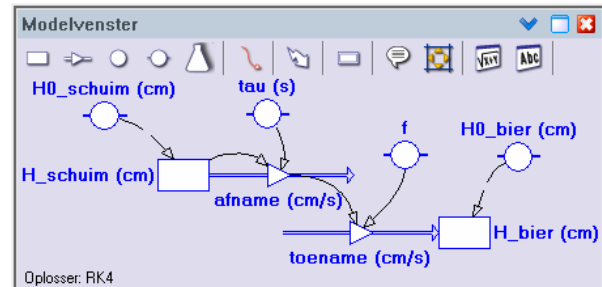


Fig. 8 Onsamenhangend grafisch computermodel

### Een verbeterd compartimentenmodel

Ondertussen zijn we in voldoende mate met het modelleren van de veranderingsprocessen in het bierglas in de weer geweest om een prima functionerend model voor zowel het neerslaan van de bierkraag als het toenemen van de biervloeistof in één dynamisch systeem te kunnen beschrijven. Het grafische model in Figuur 9 representeert het volgende dynamische systeem, waarin de veranderingen van de hoogte van de bierkraag en van de hoogte van de biervloeistof aan elkaar gekoppeld zijn en waarin een onderscheid gemaakt wordt tussen een droog en nat deel van de bierkraag:

$$\begin{aligned} \text{verval}(t) &= \frac{1}{\tau_{\text{droog}}} \cdot H_{\text{droog}}(t), \\ \text{drainage}(t) &= \frac{1}{\tau_{\text{nat}}} \cdot H_{\text{nat}}(t), \\ \frac{d}{dt} H_{\text{droog}}(t) &= -\text{verval}(t), \\ \frac{d}{dt} H_{\text{nat}}(t) &= -\text{drainage}(t), \\ \frac{d}{dt} H_{\text{bier}}(t) &= f \cdot \text{verval}(t) + \text{drainage}(t). \end{aligned}$$

De manier waarop dit stelsel differentiaalvergelijkingen opgeschreven is suggereert dat het model van exponentieel verval voor zowel het droge als natte deel van de bierkraag gehanteerd wordt. We weten echter al dat een bi-exponentieel model met vervaltijden van 10 en 100 seconden voor het natte deel beter functioneert. Om deze reden hebben we in het model een tijdsafhankelijke vervaltijd  $\tau_{\text{nat}}$  gebruikt. Hiervoor hebben we experimenteel de volgende functie opgespoord, die voldoet aan de eisen dat voor kleine waarden van de tijd  $t$  de functiewaarde in de buurt van 10 ligt en bij grote waarden van  $t$  de functiewaarde bijna gelijk aan 100 is:

$$\tau_{\text{nat}} = 0,1 + \frac{99,9}{1 + 1,2e^{(2-0,05t)}}.$$

In het grafisch model is de onafhankelijke variabele expliciet in beeld gebracht en is met een relatiepijl aangegeven dat de vervaltijd  $\tau_{\text{nat}}$  hiervan afhangt. Met deze keuze van een sigmoïdale functie van de tijd kan een goede overeenstemming tussen berekende en gemeten grootheden gevonden worden; de diagrammen aan de rechterkant van Figuur 9 illustreren dit. Dit toont aan dat het de moeite loont om kritisch naar wiskundige modellen te kijken en ze progressief te verbeteren.

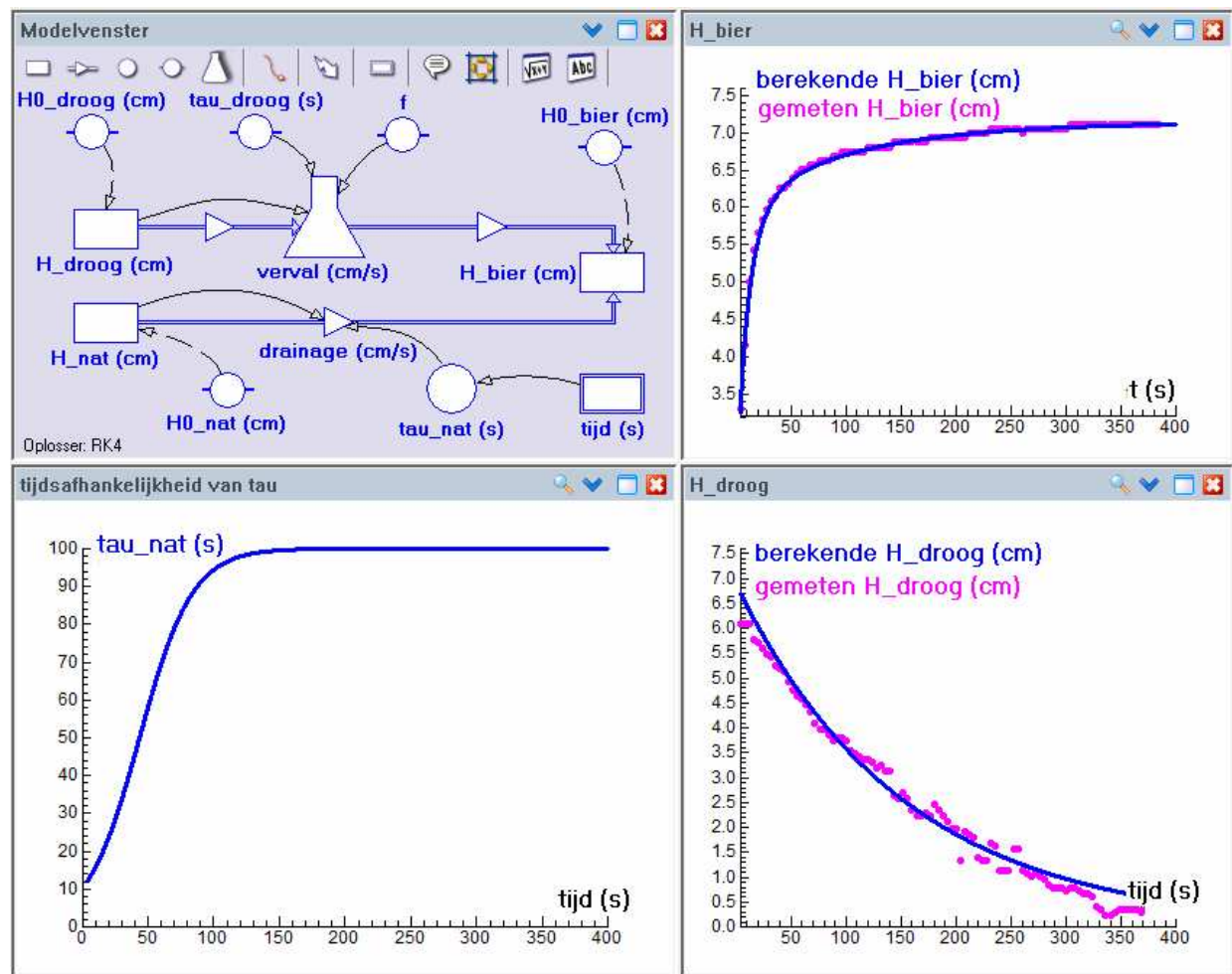


Fig. 9 Schermafdruc van een compartimentenmodel voor de hoogte van de bierkraag en de biervloeistof in een glas, waarbij een droog en nat deel van de bierkraag onderscheiden wordt en drainage een tijdsafhankelijke vervaltijd heeft

## Conclusie

Ik hoop de volgende doelen gerealiseerd te hebben:

- Onderzoek naar de stabiliteit van een bierkraag is een rijke context voor bestudering van dynamische systemen, waarin allerlei facetten van wiskundig modelleren met behulp van regressie en differentiaalvergelijkingen aan bod kunnen komen.
- Het voorbeeld van modelleren van veranderingsprocessen in een bierglas illustreert goed dat bij modelleren van realistische problemen verschillende methoden van aanpak en talloze middelen inzetbaar zijn, variërend van al experimenterend aan de slag zijn of met een computermodel in de weer zijn tot algebraïsch formuleren en met pen en papier of via regressietechnieken oplossen.
- Aannemelijk is gemaakt dat ICT inderdaad het arsenaal van mogelijkheden voor een leerling zinvol verruimt met het oog op experimenten uitvoeren, hypothesen onderzoeken en wiskundige modellen bouwen, doorrekenen, en valideren. Het toetsen van een model aan de werkelijkheid hoort volgens mij een vanzelfsprekend onderdeel van de activiteiten door leerlingen te zijn. Coach biedt uitstekende mogelijkheden om experimenteren en modelleren aan elkaar te koppelen in leerlingactiviteiten.
- Het artikel heeft de notie versterkt dat in simpel ogende problemen heel veel interessante wiskunde zit die voor leerlingen met behulp van ICT zowel toegankelijk als uitdagend is. Dergelijke contexten kunnen leerlingen veel plezier bezorgen en hen later hopelijk met genoeg aan wiskunde doen terugdenken.

André Heck, AMSTEL Instituut, Universiteit van Amsterdam, a.j.p.heck@uva.nl

## Noten

- [1] Resonansgroep wiskunde (2007). Standpunt van de Resonansgroep wiskunde t.a.v. de wiskundevoorstellen havo en vwo voor 2007 en later. November, 2007. Online (3/11/09): [www.ctwo.nl](http://www.ctwo.nl)
- [2] Craats, van de J. (2007). Contexten en eindexamens. *Euclides* **82** (7) 261-266.
- [3] Kleijne, W. (2006). Contexten in de examens wiskunde B. *Euclides* **82** (1) 20-22.
- [4] Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, cTWO (2007). Rijk aan betekenis – Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs. Online (3/11/09): [www.ctwo.nl](http://www.ctwo.nl)
- [5] Craats, van de J. (1999). Hoe hangt een ketting. *Nieuwe Wiskrant* **19** (1) 32-36.
- [6] Heck, A. (2007). Modelleren van bruggen en bogen. *Nieuwe Wiskrant* **27** (1) 52-62
- [7] De informatica, techniek en science (its) academy is een samenwerkingsverband van voortgezet en hoger onderwijs in de regio Noord-Holland en Flevoland, waarin onderwijs in de vakken informatica, NLT en wiskunde D ontwikkeld en aangeboden wordt ten behoeve van havo en vwo leerlingen. Voor meer informatie: [www.itsacademy.nl](http://www.itsacademy.nl)
- [8] Bamforth, C.W. (2000). Perceptions of beer foam. *Journal of the Institute of Brewing* **106** (4) 229-238.
- [9] Smythe, J.E., O'Mahony, M.A., & Bamforth, C.W. (2002). The impact of the appearance of beer on its perception. *Journal of the Institute of Brewing* **108** (1) 37-42.
- [10] Heck, A., Kędzierska, E., & Ellermeijer, T. (2009). Design and implementation of an integrated computer working environment. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching* **28** (2) 147-161.
- [11] Leike, A. (2002). Demonstration of the exponential decay using beer froth. *European Journal of Physics* **23** (1) 21-26.
- [12] Hackbarth, J.J. (2006). Multivariate analysis of beer foam stand. *Journal of the Institute of Brewing* **112** (1) 17-24.
- [13] Lewis, M.J., & Bamforth, C.W. (2006). Foam. In M.J. Lewis & C.W. Bamforth (eds.), *Essays in Brewing in Science* (hoofdstuk 4, pp.28-42). New York: Springer Verlag.
- [14] Ronteltap, A.D. (1989). Beer Foam Physics. Proefschrift, Landbouwniversiteit Wageningen.
- [15] Dale, C., West, C., Eade, J., Rito-Palomares, M., & Lyddiatt, A. (1999). Studies on the physical and compositional changes in collapsing beer foam. *Chemical Engineering Journal* **72** (1) 83-89.
- [16] Heck, A. (2007). Modelling Intake and Clearance of Alcohol in Humans. *Electronic Journal of Mathematics and Technology* **1** (3) 232-244.
- [17] Heck, A., Kędzierska, E., & Ellermeijer, T. (2009). Striking results with bouncing balls. In C. Constantinou & N. Papadouris (eds.), *Physics Curriculum Design, Development and Validation: Proceedings of the GIREP 2008 Conference*, Nicosia, Cyprus, 18-22 Augustus 2008.
- [18] Heck, A., & Ellermeijer, T. (2009). Giving students the run of sprinting models. *American Journal of Physics* **77** (11) 1028-1038.
- [19] Osborne, M.R., & Smyth, G.K. (1994). A modified Prony algorithm for exponential function fitting. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* **16** 119-138.
- [20] Sperber, G., Ericsson, A., Fransson, A. & Hemmingson, A. (1990). Fast methods for fitting biexponentials especially applicable to MRI multiecho data. *Physics in Medicine and Biology* **35** (3) 399-411.
- [21] Heck, A. (2002). Stilstaan bij lopen. *Nieuwe Wiskrant* **22** (1) 44 – 50.
- [22] Thijssen, H., & de Wildt, D. (2006). Kwantitatieve farmacokinetiek. In: Ree, van J., & Breimer, D. (red). *Algemene farmacologie* (2de druk). Elsevier Gezondheidszorg: Maarssen.