

Videometing en modellering van een val met versnelling groter dan g

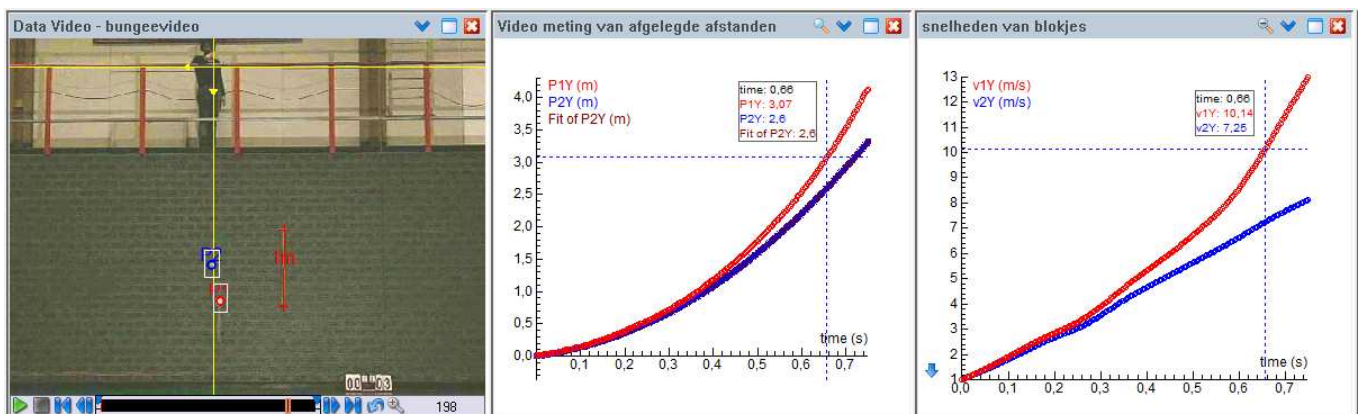
Al weer twee jaar geleden schreven we in het septembernummer van Signaal over het probleem van vallen met een versnelling groter dan g aan de hand van bungeejumpen [1]. Het gebruik van videometen en modelleren is indertijd geopperd. In dit artikel beschrijven we de uitvoering m.b.v. videobeelden van een hogesnelheidscamera en we vergelijken de resultaten van een meting en een model.

Videometing

De proef is simpel van opzet: twee houten blokjes worden vanaf een hoogte van een paar meter tegelijkertijd losgelaten. Het ene blokje maakt een vrije val, terwijl het andere blokje aan een ketting vastzit. Het blokje aan de ketting komt eerder op de grond terecht, hetgeen impliceert dat de versnelling van dit blokje groter is dan de valversnelling. Dit opmerkelijke verschijnsel druist in tegen natuurkundige intuïtie, maar is uiteindelijk wel goed te begrijpen.



Je kunt de versnelling meten met een sensor [2,3] of via videoanalyse. In het laatste geval heb je wel een goede camera nodig. Om voldoende meetpunten te verkrijgen hebben we opnamen gemaakt met de Casio Exilim-F1 camera met een beeldsnelheid van 300 beeldjes per seconden. De twee blokjes worden gevolgd m.b.v. point-tracking want handmatige meting is te bewerkelijk. In Figuur 1 zijn de grafieken van de gemeten afgelegde afstanden van de blokjes (t.o.v. het punt van loslaten; m.a.w. we kiezen een assenstelsel met een positieve verticale as naar beneden gericht) te zien, alsmede de grafieken van de snelheden van de blokjes (bepaald m.b.v. spline-smoothing). De snelheidsgrafiek, die nagenoeg een rechte lijn is, hoort bij het vrij vallende blokje. De grafiek waar het dradenkruis van de uitleesmodus staat hoort bij het blokje aan de ketting en dit heeft op het gekozen moment al een grotere afstand afgelegd dan het vrij vallende blokje.



Figuur 1. Videometing van de vallende blokjes.

Computermodel

Om het grafische model van de vallende blokjes en de simulatie in Figuur 2 te kunnen begrijpen moeten we eerst de gebruikte symbolen definiëren:

- M = massa van een blokje (0,125kg)
- m = massa van ketting (0,68kg)
- L = lengte van de ketting (4,15m)
- g = valversnelling ($9,81\text{m/s}^2$)

a = versnelling van geketend blokje

y_1 = afgelegde afstand van geketend blokje

v_1 = snelheid van geketend blokje

y_2 = afgelegde afstand van los blokje

v_2 = snelheid van los blokje

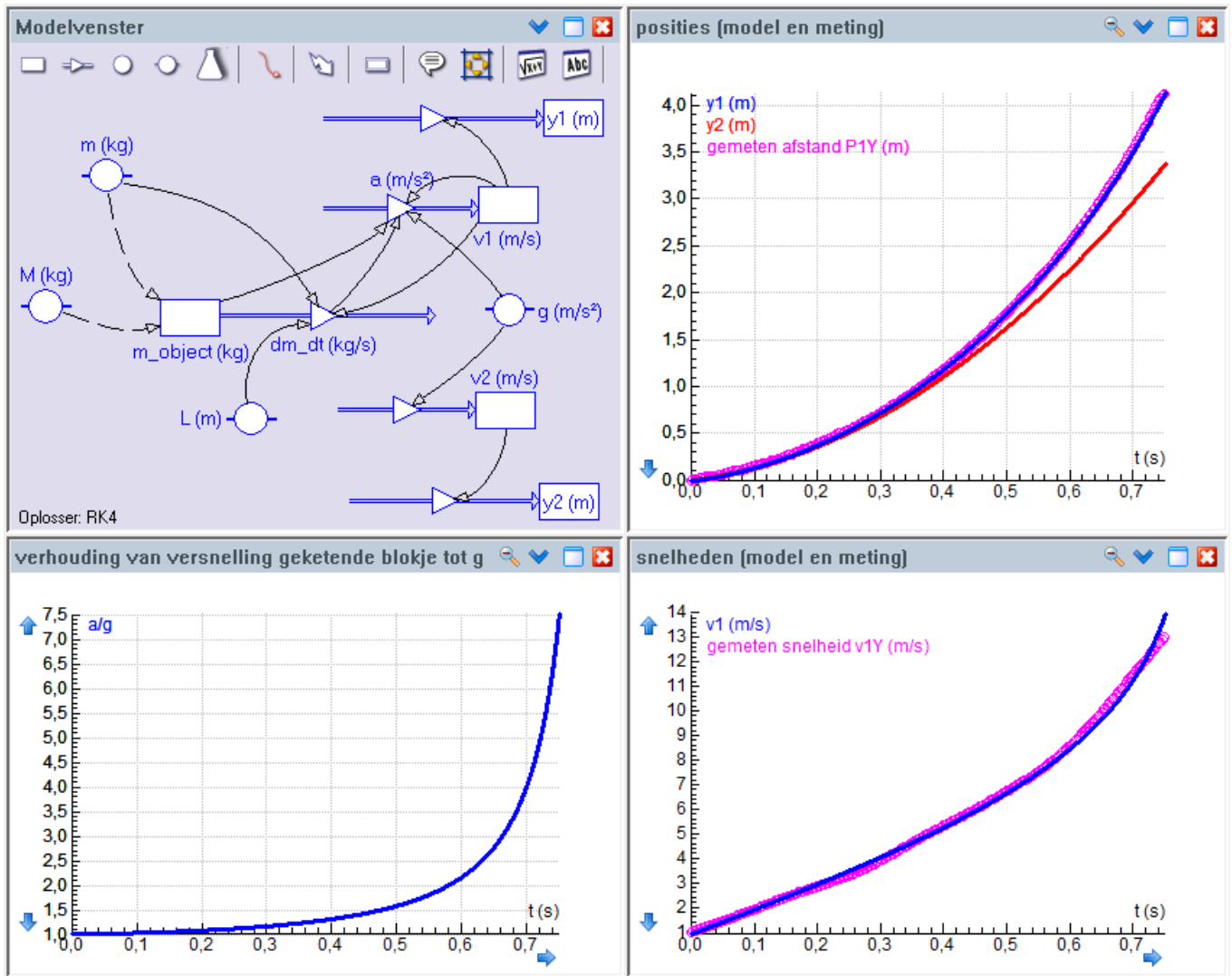
In het geval van het geketende blokje is er geen sprake van een star lichaam, maar van een vallend object waarvan de massa in de loop van de tijd

verandert. Dan moet je niet de op school ingehamerde formule $F = ma$ toepassen, maar de volgende algemenere formulering van de 2^e wet van

$$\text{Newton: } \sum F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm_{\text{obj}}}{dt} v + m_{\text{obj}} a, \text{ waarbij } m_{\text{obj}}$$

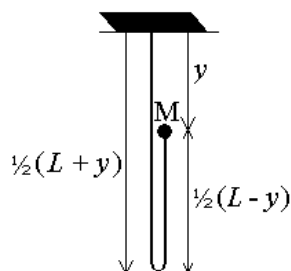
de veranderde massa van het object is en de symbolen v resp. a de snelheid resp. versnelling van het object representeren. We gaan uit van een

model waarin aerodynamische effecten verwaarloosd worden. Later hebben we geverifieerd dat rekening houden met luchtweerstand geen verbetering van de kwaliteit van het model, in de zin van beschrijvende waarde, oplevert. De grafieken in Figuur 2 tonen een prima overeenkomst tussen modelresultaten en metingen.



Figuur 2. Computermodel en simulatie van vallende blokjes (1: blokje aan ketting, 2: los blokje).

We concentreren ons op het computermodel voor het vallende blokje aan de ketting. Het is gebaseerd op een opsplitsing van de situatie in twee interacterende delen: een linkerkant met een stil hangende, maar steeds langer wordende ketting en een rechterkant met een



vallend blokje en vallend stukje ketting. Tijdens de val worden er als het ware voortdurend schakels van het vallende gedeelte van de ketting getransporteerd naar de stil hangende linkerkant. Dit massatransport vindt plaats in de bocht van de ketting. Met behulp van de situatieschets is eenvoudig af te leiden dat de transportsnelheid gelijk is aan $\frac{1}{2} v$. Deze aan-

pak komt overigens neer op een studie van het blokje-ketting systeem als vallend object met een veranderende massa. Met behulp van de situatieschets is ook af te leiden dat de veranderende massa van dit object gegeven wordt door

$$m_{\text{obj}} = \frac{m(L-y)}{2L}$$

en dat dus

$$\frac{dm_{\text{obj}}}{dt} = -\frac{mv}{2L}.$$

De transportsnelheid $\frac{1}{2} v$ is de snelheid die in de extra term van de veralgemeniseerde 2^{de} wet van Newton gebruikt moet worden. Dit kan ook gezien worden als een gemiddelde nemen van de snelheid v waarmee het blokje-ketting systeem valt en de snelheid 0 m/s voor het stil hangende deel van de ketting. Onder de veronderstelling dat alleen zwaartekracht een rol speelt krijgen we dan de volgende bewegingsvergelijking:

$$m_{\text{obj}} g = m'_{\text{obj}} \cdot \frac{v}{2} + m_{\text{obj}} a.$$

Dus:

$$a = g - \frac{m'_{\text{obj}}}{m_{\text{obj}}} \cdot \frac{v}{2}$$

met

$$m'_{\text{obj}} = -\frac{mv}{2L} \text{ en } m_{\text{obj}} = \frac{m(L-y)}{2L}.$$

Deze formules worden gebruikt in de stroompijlen dm_{dt} en a in het grafische model. Omdat $m'_{\text{obj}} \leq 0$ moet wel gelden dat $a \geq g$ en het verschil tussen de versnelling a en de valversnelling wordt groter

naarmate de snelheid toeneemt. Dit is goed te zien in het diagram linksonder in Figuur 2.

Toegegeven, de wis- en natuurkunde van het vallende blokje aan een ketting is ingewikkelder dan gebruikelijk bij problemen in natuurkunde schoolboeken. Dit komt voornamelijk doordat het niet om een beweging van een star lichaam gaat en de factor $\frac{1}{2}$ bij de transportsnelheid in de extra term in de algemene 2^{de} wet van Newton, die alleen een rol speelt bij veranderende massa, gemakkelijk over het hoofd gezien wordt (zoals in [4]). Pluspunt is wel dat dit een veel uitdagender probleem is en zowel leerlingen als leraren met beide benen op de grond zet waar het gaat op klakkeloos toepassen van de formule $F = ma$. Bovendien vullen theorie en experiment elkaar hier prima aan: modelleren is niet verworden tot louter en alleen het snappen van het (computer)model en hopen dat in de afleiding klopt, maar omvat ook het zo goed mogelijk begrijpen van de onderliggende natuurkundige principes en veronderstellingen die gemaakt worden en de toetsing van theorie aan de hand van echte experimenten. Dit is naar onze mening een essentieel onderdeel in goed natuurkundeonderwijs. De woorden van Nobelprijswinnaar Martinus Veltman (cf. [5]), “Als je de experimenten weghaalt, wordt natuurkunde religie. Op dat moment tellen niet meer de feiten, maar de meningen van iemand die tot paus is benoemd.”, gaan net zo goed op voor natuurkundeonderwijs.

[1] Uylings, P. (2007) *Signaal*, 28, 39-41

[2] Dubelaar, N. & Brantjes, R. (2003) *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*, 96(10), 316-319.

[3] Biezeveld, H. (2003) *The Physics Teacher*, 41(4), 238-241.

[4] Pasveer, F. & de Muynck, W. (2003) *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*, 96(12), 394.

[5] Mols, B. (2003) Een gevoelige snaar: Veltman vs Dijkgraaf. *Natuurwetenschap & Techniek*, 71(9), 18-25, [Online] http://www.nikhef.nl/pub/services/biblio/bib_KR/Natutech200309-018.pdf