

Stochastische wandelingen met Coach

We beschrijven hoe een simulatie van een stochastische wandeling, ook wel bekend onder de naam dronkemannswandeling (random walk), in de grafische modelleromgeving van Coach 6 gemaakt kan worden. Het is een onderwerp dat zich bij uitstek leent om het gebruik van een 'event' (voorval, gebeurtenis) in een Coach model toe te lichten. Ook bespreken we kort hoe de tekstuele modellermodus gebruikt kan worden om een stochastische wandeling te analyseren.

Bernoulli-wandeling

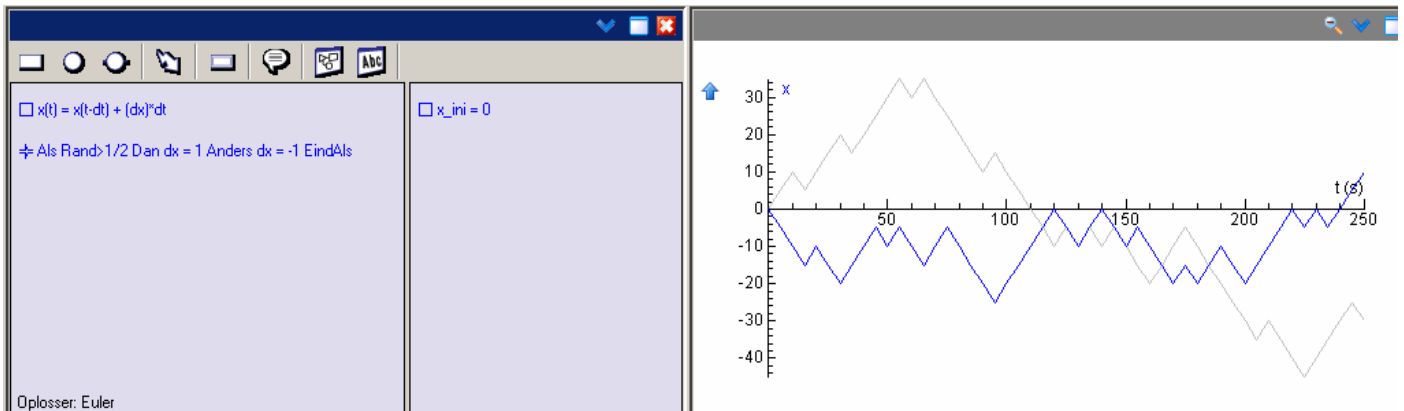
Een voorbeeld van een eenvoudige stochastische wandeling is de Bernoulli-wandeling oftewel de dronkemansloop in 1 dimensie op een rooster. Stel je voor een dronken persoon die op regelmatige tijden, zeg elke 5 seconden, willekeurig een stap naar links of rechts doet. We veronderstellen dat elke stap even groot is en niet stochastisch afhangt van de vorige stap. We spreken van een symmetrische wandeling als de kans op een stap naar links even groot is als een stap naar rechts. Een stap naar rechts laten we corresponderen met de waarde 1 en een stap naar links laten we corresponderen met de waarde -1.

Willekeurige trekkingen van getallen -1 en 1 kunnen op meerdere manieren tot stand komen. In Coach gebruik je hiervoor de rand functie: rand

levert een willekeurig getal tussen 0 en 1 op volgens een uniforme verdeling. Als de uitkomst van rand kleiner dan 1/2 is kiezen we het getal -1, anders 1. De getallen -1 en 1 worden op deze manier met even grote kans getrokken. Een tweede manier om willekeurige trekkingen van -1 en 1 met even grote kans tot stand te brengen in Coach is de functie $2 * \text{entier}(2 * \text{rand}) - 1$.

Visualisatie van de Bernoulli-wandeling

Een visualisatie van de Bernoulli-wandeling is nu eenvoudig te realiseren: de positie van de wandelaar wordt uitgezet tegen het aantal stappen dat gezet is sinds de start van de wandeling. Onderstaande schermafdruk toont een Coach 6 model en de grafieken van een tweetal simulaties.



Figuur 1. Model van Bernoulli-wandeling en grafieken van twee simulaties..

Het model in Figuur 1 is weergegeven in de vergelijkingen-modus: we lezen af dat we te maken hebben met een toestandsgrootheid x (positie als functie van tijd t) en dat deze grootheid in elke tijdstap verandert met een waarde dx , die door het toeval bepaald wordt. Het bijpassende grafisch model ziet er simpelweg uit als

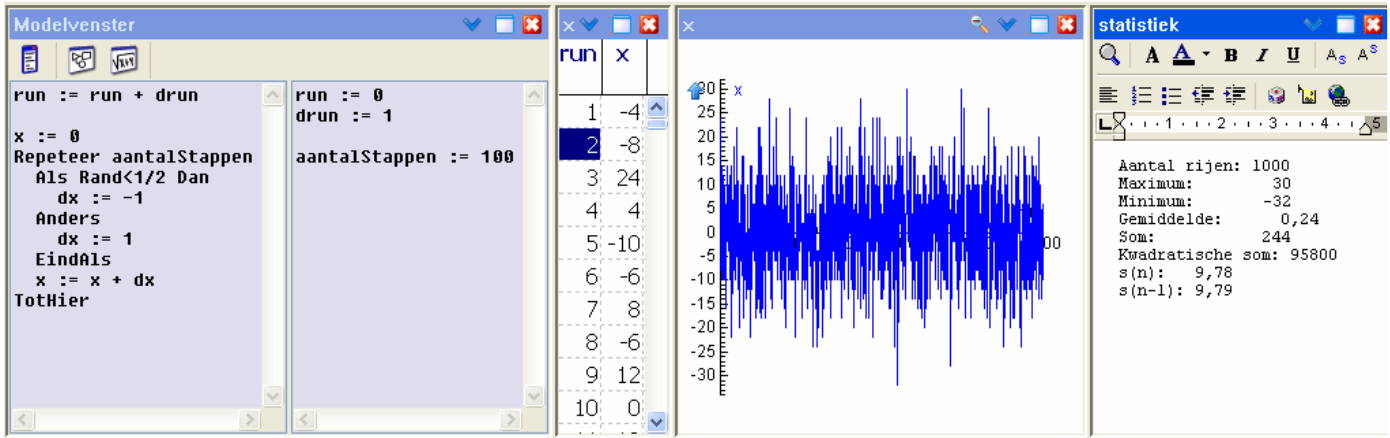


Analyse van de Bernoulli-wandeling

Voor een analyse van stochastische wandelingen via simulaties is het van belang dat je resultaten van talloze runs met elkaar kunt vergelijken. Je ontkomt dan niet aan het gebruiken van de tekstuele modellermodus om zelf een computerprogramma te schrijven, want in Coach 6 is (nog) geen grafische representatie voor een herhalingslus beschikbaar. Wie de modelleromgeving wil

blijven gebruiken, met de onafhankelijke variabele als nummer van de simulatie, komt uit op een programma als in onderstaande schermafdruck. Figuur 2 toont van links naar rechts het simulatieprogramma, de tabel met eindposities van elke run, een grafiek van de resultaten van alle runs en statistische gegevens hierover. Uit de statistiek blijkt dat de simulatie met 1000 runs en 100 stappen per run een gemiddelde eindpositie van 0,2

oplevert (dicht bij de theoretische waarde 0) met een standaarddeviatie van 10,3 (dicht bij de theoretische waarde 10). De gemiddelde afstand tussen vertrek- en eindpunt is overigens bij deze simulatie gelijk aan 7,8 (theoretische waarde $\sqrt{200/\pi} \approx 8,0$). Kortom, met enige moeite kun je ook een fraaie computeranalyse van de Bernoulli-wandeling maken.



Figuur2. Computeranalyse van de Bernoulli-wandeling (1000 runs met 100 stappen).

Een tweedimensionale stochastische wandeling

Een stochastische wandeling in hogere dimensies is moeilijker dan de Bernoulli-wandeling. We beperken ons tot wandelingen op een tweedimensionaal vierkantig rooster waarin elke stap bestaat uit een beweging van een roosterpunt naar een naaste buur. Welke bewegingen toegestaan zijn hangt af van de definitie van ‘naaste omgeving’. Twee veel gebruikte omgevingen zijn:

1. *von Neumann omgeving*: Er zijn nu vier richtingen: noord, zuid, oost en west. Ze corresponderen met de stappen (0,1), (0,-1), (1,0) en (-1,0). In een symmetrische stochastische wandeling treden alle richtingen met gelijke kans 1/4 op.
2. *Moore omgeving*: Diagonale buren worden aan de von Neumann omgeving toegevoegd. Er zijn nu dus acht richtingen: noord, zuid, oost, west, noordoost, zuidoost, zuidwest en noordwest. Ze corresponderen met de stappen (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), (1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1). In een symmetrische stochastische wandeling treden alle richtingen met gelijke kans 1/8 op.

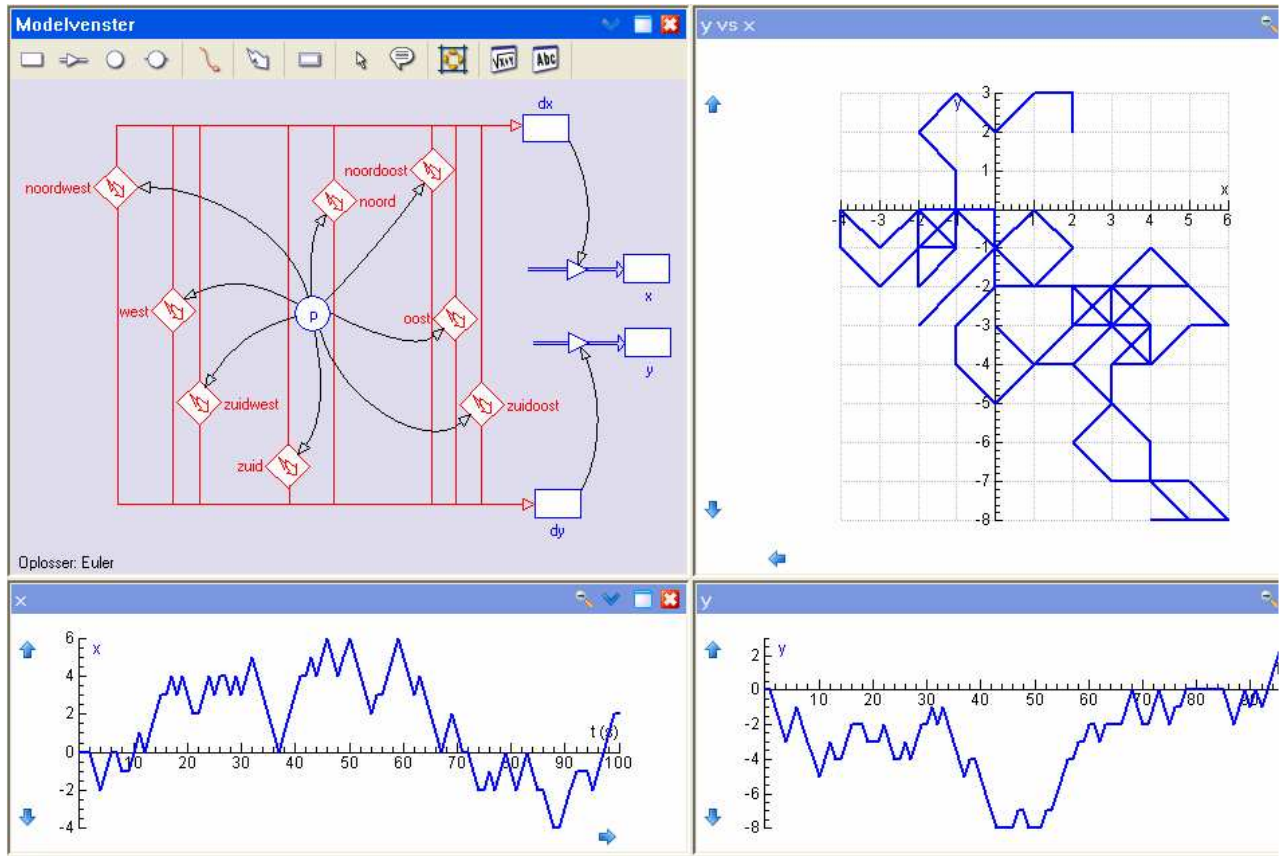
Visualisatie van een 2D-wandeling

Een visualisatie van de tweedimensionale stochastische wandeling op een vierkantig rooster is in een grafische modelleromgeving weliswaar conceptueel niet zo moeilijk, maar een goed werkende en eenvoudige implementatie maken kan al best moeilijk en tijdrovend zijn. Als de grafische modelleromgeving geen grafische component voor een keuzestructuur aanbiedt, dan moet de verandering in horizontale en verticale richting toch op een of andere manier gedestilleerd worden uit een willekeurige trekking uit acht getallen.. Door elke trekking als een ‘event’ (voorval, gebeurtenis) te implementeren in Coach 6, kun je op eenvoudige manier de gevalsonderscheiding implementeren. De schermafdruck in Figuur 3 toont het grafische model voor de Moore omgeving en de grafiek van een simulatie.

Eigenlijk fungeren in dit model de ‘voorvallen’ als keuzes van verschillende richtingen: in elke tijdstap wordt een integer tussen 0 en 7 willekeurig gegenereerd volgens uniforme distributie en deze trekking wordt als een voorval beschouwd. In het model is expliciet aangegeven

wat er moet gebeuren wanneer een voorval optreedt. De schermafdruk van het bijpassende

Coach programma in Figuur 4 laat dit overduidelijk zien.



Figuur 3. Grafisch model en simulatie van een 2D stochastische wandeling in Moore omgeving.

```

Modelvenster
x := x + Flow_1 * dt
y := y + Flow_2 * dt

t := t + dt

Zodra (p=0) Doe
dx := 0
dy := 1
EindDoe

Zodra (p=1) Doe
dx := 0
dy := -1
EindDoe

Zodra (p=2) Doe
dx := 1
dy := 0
EindDoe

t := 0
dt := 1

x := 0
y := 0
p := Entier(8*Rand)
dx := 0
dy := 0
Flow_1 := dx
Flow_2 := dy
    
```

Figuur 4. Coach programma met 'voorvallen'.

Randvoorwaarden: deeltje in een doos

M.b.v. 'voorvallen' kun je in Coach ook heel gemakkelijk randvoorwaarden voor de stochastische wandeling introduceren. Het eerdere grafische model van een stochastische wandeling in een Moore omgeving (Figuur 3) kunnen we op

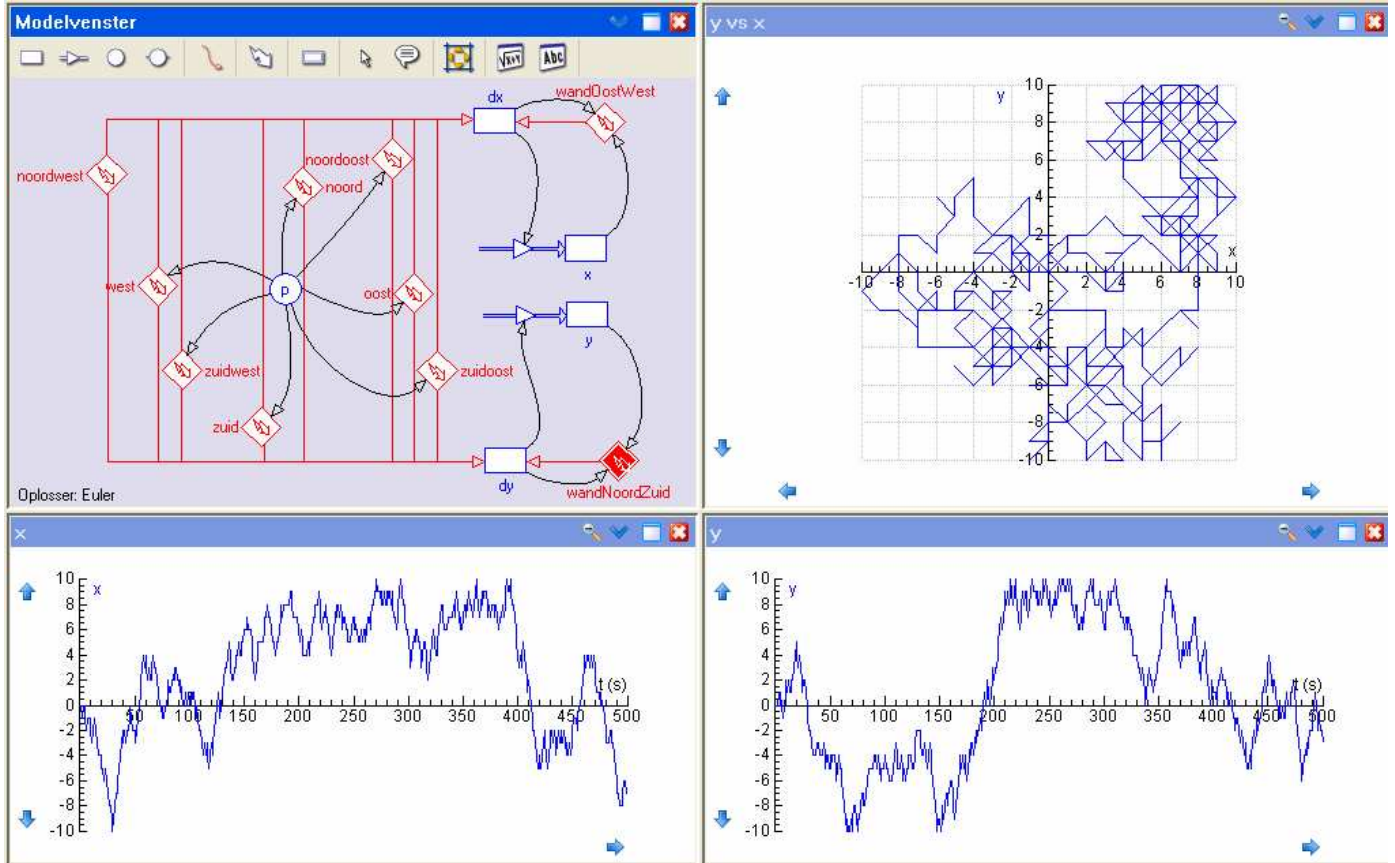
simpele wijze uitbreiden tot een model waarin de positie van de wandelaar in zowel in oost-west richting als in noord-zuidrichting binnen grenzen blijft. Figuur 5 toont een model en simulatie onder dergelijke randvoorwaarden. We hebben hiertoe twee 'voorvallen' voor dreigende overschrij-

dingen geïntroduceerd (Nota bene: in de vergelijkingen-modus kun je de volgorde van de voorvallen instellen). In Tabel 1 staat de gebruikte

code voor weerkatsende wanden op afstand 10 van de oorsprong.

wandOostWest	wandNoordZuid
Zodra ((x+dx)<-10) of (x+dx)>10) Doe dx := -dx	Zodra ((y+dy)<-10) of (y+dy)>10) Doe dy := -dy
EindDoe	EindDoe

Tabel 1. Code voor horizontale en verticale voorvallen om reflecterende wanden te specificeren.



Figuur 5. Grafisch model en simulatie van een 2D stochastische wandeling in begrend gebied.

André Heck, AMSTEL Instituut, A.J.P.Heck@uva.nl