Een gewichtig model

In de CWI vakantiecursus ‘Wiskunde en Gezondheid’ wordt in het artikel ‘Gewichtige wiskunde in de klas’ uitgebreid ingegaan op modellen voor gemiddelde lengtegroei van Nederlandse jongens en meisjes. In veel gevallen is het groeimodel opgebouwd uit verschillende componenten, waarbij de groeispurt in de puberteit het meest spectaculaire onderdeel is. Hiervoor wordt meestal een logistisch groeimodel gebruikt. Kijk je alleen naar de lengte tijdens de tienerperiode dan wordt de gemiddelde lengtegroei wiskundig goed beschreven door een gegeneraliseerde logistische kromme, ook wel sigmoïde of S-kromme genoemd, gegeven door de formule

$$L = \frac{a}{1+e^{c-bt}} + d\,,$$

waarbij L de lengte op leeftijd t is en a, b, c, d groeiparameters zijn met de volgende interpretaties: a is de lengtetoename en $a+d$ is de eindlengte in de gegeven periode, c/b is de leeftijd waarop de groeisnelheid het grootst is en dan is de lengtetoename halverwege en de groeisnelheid gelijk aan $ab/4$. Aan de hand van de lengte-naar-leeftijd grafiek zijn redelijke schattingen voor de groeiparameters te vinden. Maar je kunt ze ook bepalen op de systematische wijze zoals in dit artikel beschreven wordt. De resultaten zijn dan:

$$L_{\text{jongens}} = \frac{50{,}9}{1+e^{7{,}162-0{,}565t}} + 134{,}0 \text{ en } L_{\text{meisjes}} = \frac{48{,}3}{1+e^{5{,}503-0{,}524t}} + 122{,}6\,.$$

De afwijkingen tussen de lengte berekend in het model en de groeigegevens zijn minder dan een centimeter in de tienerperiode.

In dit artikel leggen we uit hoe je de analyse met Coach kunt doen en we kijken voor de verandering eens naar het gewicht van Nederlandse jongens en meisjes in de tienerleeftijd. In de bijgevoegde schermafdruk zie je linksboven het gewicht van Nederlandse jongens tegen de leeftijd uitgezet. In hetzelfde kwadrant is ook de grafiek van de groeisnelheid en die van het wiskundige model getekend. Je ziet heel duidelijk dat de groeisnelheid in de eerst levensjaren snel afneemt, tijdens de kinderperiode tot de puberteit lineair toeneemt en dat er tijdens de puberteit een groeispurt plaatsvindt met pieksnelheid rondom het 14e levensjaar. Het model lijkt op het zicht heel goed te kloppen voor wat de tienerperiode betreft.
We bekijken voor jongens de periode van 10 tot 19 jaar. We passen weer de formule van de S-kromme voor gewicht G toe. Deze is gelijk aan

$$G = \frac{p}{1+e^{r-qt}} + s\,,$$

waarbij L de lengte op leeftijd t is en p, q, r, s groeiparameters zijn met de volgende interpretaties: p is de lengtetoename en $p+s$ is de eindlengte in de gegeven periode, r/q is de leeftijd waarop de groeisnelheid het grootst is en dan is de lengtetoename halverwege en de groeisnelheid gelijk aan $pr/4$. Deze formule hoort bij de volgende differentiaalvergelijking

$$G' = \frac{q}{r}(G-s)(p+s-G).$$

Dit betekent dat als je de verandering in gewicht, d.w.z. de groeisnelheid, uitzet tegen het gewicht zelf, dat dan de punten op een parabool moeten liggen. Rechtsboven is de best bijpassende parabool te zien met als formule (bij benadering en in ontbonden vorm opgeschreven m.b.v. de abc-formule)

$$G' = -0{,}0965(G-26{,}4)(G-75{,}8)$$

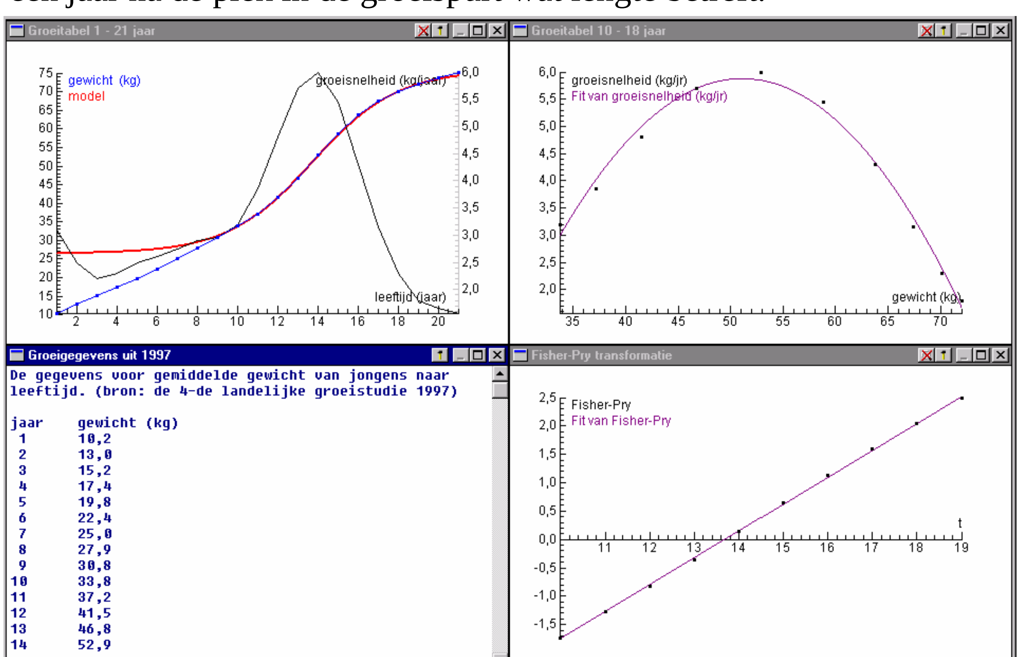
Kortom: $s = 26{,}4$ en $p = 49{,}4$. Maar hoe nu verder met de bepaling van de groeiparameters q en r? De zogenaamde Fisher-Pry transformatie biedt uitkomst. Deze is gedefinieerd als

$$\ln\left(\frac{F}{1-F}\right),$$

met $F = \dfrac{G-s}{p}$. Er geldt nu een lineair verband:

$$\ln\left(\frac{F}{1-F}\right) = qt - r$$

Dit is ook precies de basisgedachte achter de Fisher-Pry transformatie: als het sigmoïdale groeimodel goed functioneert, dan moet er een lineair verband herkenbaar zijn. De parameters q en r zijn met lineaire regressie eenvoudig te bepalen. Rechtsonder in de schermafdruk is het lineaire verband goed zichtbaar. Er geldt $q = 0{,}474$ en $r = 6{,}492$. Dit impliceert een piek in de groeispurt bij de leeftijd van pakweg 13 jaar en 8 maanden. Dit is een jaar na de piek in de groeispurt wat lengte betreft.



Voor meisjes in de leeftijd van 9 tot 18 jaar kun je hetzelfde doen. Je zult dan vinden

$$G_{\text{meisjes}} = \frac{40{,}9}{1 + e^{5{,}584 - 0{,}468t}} + 22{,}7\,.$$

Dit impliceert een piek in de groeispurt bij de leeftijd van pakweg 11 jaar en 11 maanden. Dit is jaar en vijf maanden na de piek in de groeispurt wat lengte betreft. Uit de medische literatuur is bekend dat deze piek later is dan bij lengtegroei, maar het verschil is in werkelijkheid maar een paar maanden. Een bi-logistisch groeimodel voor gewicht naar leeftijd in de periode van 3 tot 18 jaar dat samengesteld is uit twee logistische krommen zou overigens een resultaat opleveren dat meer in overeenstemming is met de werkelijkheid. In ons model treedt de piek in de groeisnelheid eerder op bij meisjes dan bij jongens. Dit heeft te maken met het feit dat meisjes eerder in de puberteit geraken dan jongens.