

Wat schuift het?

Andre Heck Ron Vonk (AMSTEL Instituut, UvA)



figuur 1. drie afbeeldingen van de bewegende muntjes

Het experiment

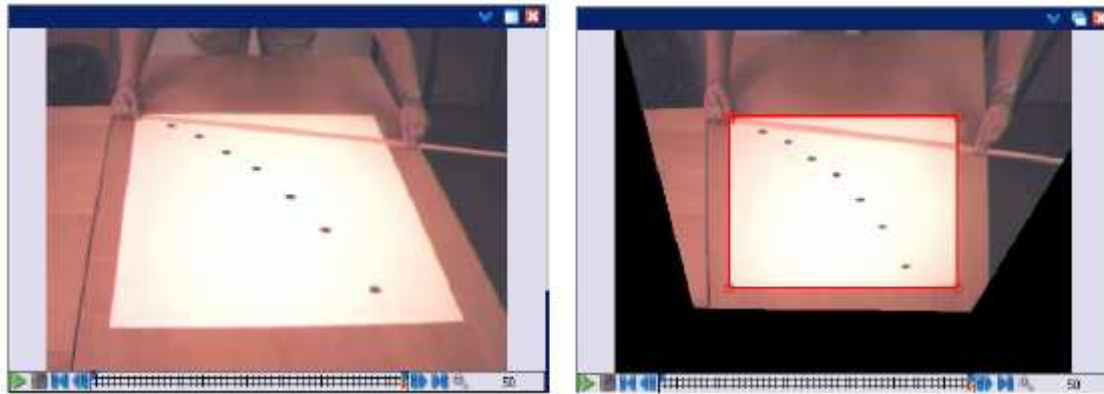
Het gaat in dit artikel om een eenvoudig uit te voeren experiment: zeven muntjes liggen op onderling gelijke afstanden van elkaar op een glad papier op tafel. Met een liniaal, die een cirkelvormige beweging maakt, geeft de onderzoeker de muntjes een tik. Het middelpunt van de beweging die de liniaal maakt, valt samen met het begin van de rij muntjes (in dit geval de linkerbovenhoek van het papier in de bovenstaande afbeeldingen). De beweging van de liniaal stopt abrupt en de muntjes verlaten de liniaal, met een snelheid loodrecht op de liniaal. Vanaf dit moment komt de wrijvingskracht in beeld. De wrijving is constant, omdat alle muntjes identiek zijn en de wrijving hangt niet af van de snelheid. De arbeid die de wrijving verricht is te berekenen met $W = F \cdot s$, waarbij F de wrijvingskracht en s de afstand is die het muntje aflegt na het verlaten van de liniaal. Dit betekent dat de afstand die een muntje aflegt, evenredig is met de kinetische energie die het muntje heeft bij het verlaten van de liniaal. Omdat de liniaal een cirkelvormige beweging maakt, is de snelheid v van een muntje evenredig met de oorspronkelijke afstand d van het muntje tot het draaipunt. Omdat de kinetische energie gelijk is aan $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ verkrijgen we $F \cdot s = \frac{1}{2} m v^2$. Omdat F en m constanten zijn, is s evenredig met v^2 . Dit betekent dat de afstand die een muntje aflegt na het verlaten van de liniaal, evenredig is met het kwadraat van de afstand tot het draaipunt in de beginsituatie. Met andere woorden, als de muntjes na beweging tot stilstand zijn gekomen, vormen zij een parabool. De eindpositie van de muntjes in de afbeelding bewijst ons gelijk (zie figuur 1, rechter foto).

Is het wel zo eenvoudig en hoe onderzoeken we dat?

De eenvoudigste manier om de beweging en eindpositie van de muntjes te analyseren, is met behulp van video meten. Hierbij hebben we te kampen met twee problemen.

1. De beweging is zo snel dat een opname met een gewone camera niet afdoende is.
2. In de praktijk valt het niet mee om de opname zonder perspectivische vertekening te maken.

Het eerste probleem is opgelost door een hogesnelheidscamera te gebruiken (framerate variërend van 40 fps tot 400 fps), Het tweede probleem is opgelost met behulp van de perspectiefcorrectie, een standaardvoorziening binnen Coach 6 (zie figuur 2).

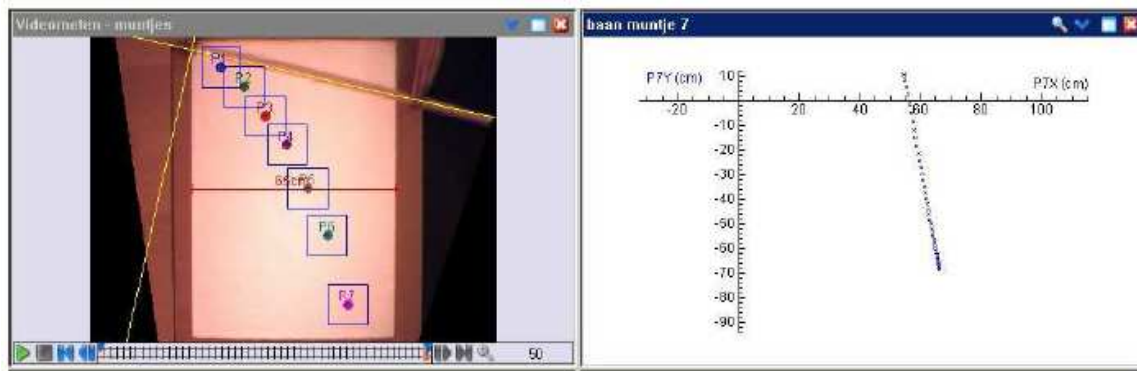


figuur 2: Een filmbeeldje voor (links) en na (rechts) correctie van het perspectief.

De afbeelding an figuur 2 hebben we daarna nog herschaald naar het formaat zoals dat in figuur 1 is gebruikt. Hierbij wordt de werkelijkheid het best benaderd en zijn de onderlinge verhoudingen van het papier op de film gelijk aan die in de realiteit. Het handmatig invoeren van meetwaarden voor zeven muntjes kost veel tijd, is vervelend en bovendien erg gevoelig voor fouten. Daarom is het prettig om gebruik te kunnen maken van *tracking* binnen video meten. In het eerste frame klikt de gebruiker een object aan en voor elk volgend frame wordt dit object op film gevolgd. Op deze manier verkrijgen we voor elk van de zeven muntjes een plaats-tijdmeting. Met behulp van deze meting gaan we een tweetal van de uitspraken uit het begin van dit artikel nader bekijken.

Uitspraak 1: De beweging van de liniaal stopt abrupt en de muntjes verlaten de liniaal, met een snelheid loodrecht op de liniaal.

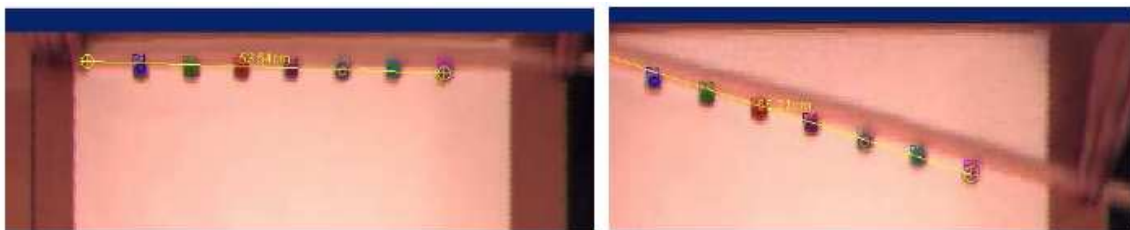
Omdat er behalve wrijving geen andere krachten optreden, zal de beweging van elk muntje na het verlaten van de liniaal een rechte lijn zijn. Hierbij lijkt het logisch om het draaipunt van de liniaal als de oorsprong van het assenstelsel te nemen. De x-as van dit stelsel valt samen met de liniaal in de eindpositie, op het moment waar de muntjes de liniaal verlaten. Als we dit assenstelsel gebruiken, verkrijgen we in Coach 6 de volgende schermafbeeldingen.



Figuur 3: Plaats-tijdgrafiek van de muntjes, bepaald met behulp van de optie tracking.

In de linkerafbeelding zien we het assenstelsel ingetekend, samenvallend met de linaal in de eindpositie. In de rechtergrafiek de baan die het muntje aflegt dat het verst van de oorsprong lag. Het is duidelijk dat in dit assenstelsel de x-component van de snelheid niet nul is. Dit betekent dat de snelheid van het muntje, bij het verlaten van de linaal niet loodrecht op deze linaal was. Er is dus een snelheidscomponent (ongelijk aan nul) parallel aan de linaal.

We bekijken deze snelheidscomponent, parallel aan de linaal nog eens nader. We draaien het filmpje nog eens beeldje-voor-beeldje af. Terwijl de linaal roteert en contact heeft met de muntjes, blijkt het dat de muntjes bewegen langs deze linaal. We bepalen de afstand van het zevende muntje tot de oorsprong. Als we ons richten op de beeldjes 6, 8, 10 en 11 verkrijgen we elke keer een iets afwijkende waarde voor de afstand van muntje tot oorsprong. We vinden achtereenvolgens de waarden 53,54 cm, 53,7 cm, 54,55 cm en 55,21 cm.

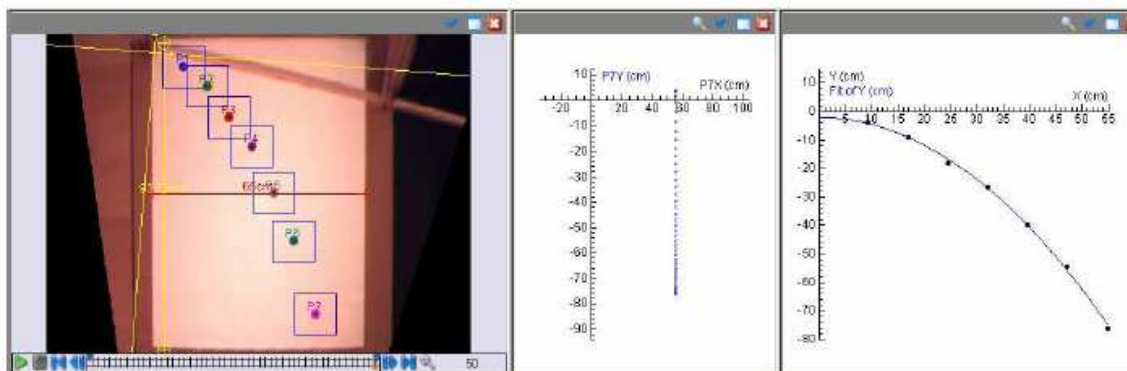


Figuur 4: de afstand van muntje zeven tot de oorsprong, in verschillende beeldjes.

Dit betekent dat de muntjes inderdaad een snelheidscomponent hebben die parallel aan de linaal loopt. Met andere woorden, de snelheid bij het verlaten van de linaal is niet loodrecht op de linaal.

Uitspraak 2: Als de muntjes na beweging tot stilstand zijn gekomen, vormen zij een parabool. De eindpositie van de muntjes in de afbeelding bewijst ons gelijk (zie figuur 1, rechter foto)

Om dit goed te onderzoeken, moeten we eerst het coördinatensysteem zo kiezen, dat het 7^e muntje langs een rechte, verticale lijn beweegt. In figuur 5 is duidelijk te zien dat de x-as van dit assenstelsel niet samenvalt met de eindpositie van de linaal.



Figuur 5 Een aangepaste keuze van het assenstelsel.

Het rechts weergegeven diagram toont de eindposities van elk van de zeven muntjes. Het lijkt dat de muntjes een mooie parabool vormen, dit kunnen we controleren door functiefit toe te passen. De kromme in de figuur geeft de beste tweedegraadsfit die de computer ons voorlegt:

$$(-0.023976370735911 * X - 0.012360878869639) * X - 1.999994733605468$$

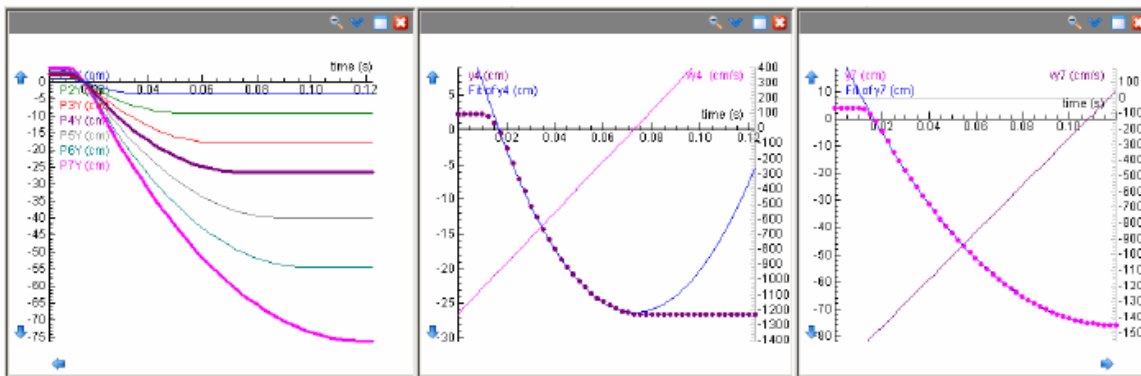
In een licht vereenvoudigde schrijfwijze levert dit:

$$Y = -0.02398 X^2 - 0.01236 X - 1.99999$$

of

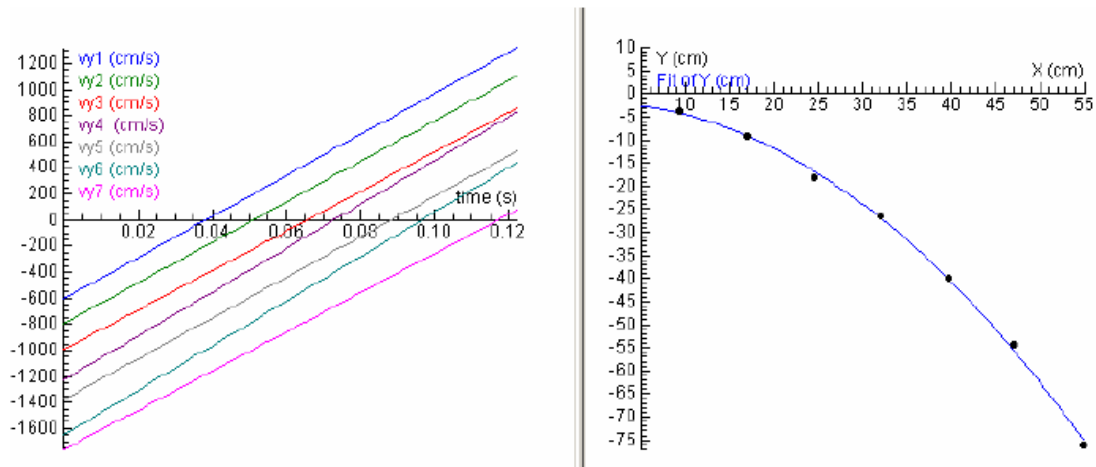
$$Y = -0.02398 (X + 0.25777)^2 - 1.99840$$

Wanneer we de oorsprong van ons assenstelsel verschuiven over de vector $(-0.25777, 1.99840)$ verkrijgen we de eenvoudige vergelijking: $Y = -c X^2$. Het zou een toevalstreffer zijn geweest als we de oorsprong van ons assenstelsel direct hier gekozen hadden.



Figuur 6: Y-t grafieken van de verschillende muntjes en de kwadratische functiefit van deze bewegingen (voor muntjes 4 en 7).

De Y-t grafieken van de muntjes vormen ook een parabool, zolang de muntjes in beweging zijn. Dit is te zien in figuur 6 voor de muntjes 4 en 7. In de diagrammen is ook de fit van de snelheidsgrafiek van deze muntjes weergegeven. Het snijpunt met de horizontale as geeft het tijdstip aan waarop het muntje stopte met bewegen.



Figuur 7 v-t grafieken van de vrij bewegende muntjes en de kwadratische fit van de eindpositie.

In het linkerdeel van figuur 7 zien we in een figuur de snelheids-tijdgrafieken van de zeven muntjes. We zien dat het 1^e, 2^e, 3^e, 5^e en 7^e parallel lopende snelheidskrommes geeft op onderling gelijke afstanden, precies zoals de theorie voorspelt. Muntjes 4 en 6 hebben ten opzichte van elkaar ook gelijke krommes voor de snelheid maar de richtingscoëfficiënt van deze twee grafieken is groter dan die van de andere vier muntjes. Dit zien we ook terug in het rechter deel van figuur 7, de kwadratische fit van de eindpositie: de muntjes 4 en 6 liggen iets boven de curve. Kennelijk was de wrijvingskracht voor deze twee muntjes niet gelijk aan die van de andere vier muntjes. Zou dit te maken kunnen hebben met kop of munt? Bij het uitvoeren van het experiment hebben we hier geen aandacht aan besteed. De werkelijkheid blijkt een stuk ingewikkelder dan voorzien op basis van de theorie. Het is een leerzame ervaring voor studenten (en docenten) om dit soort subtiele verschillen tussen theorie en werkelijkheid met elkaar in overeenstemming te brengen.