

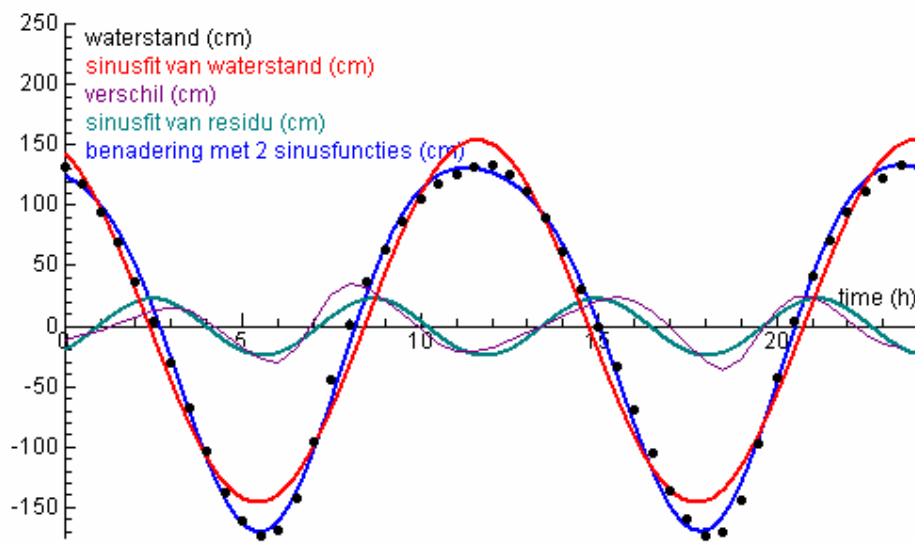
Een verdiepingsoopdracht over de getijdenbeweging

Inleiding

Door de geografische ligging van Nederland is iedere bewoner bekend met het begrip eb en vloed. Hoog en laag water wisselen elkaar regelmatig af en de grafiek van een getijdenbeweging, gemeten of berekend voor een kustplaats of olieplatform, is dan ook periodiek. Een periodieke functie kun je beschrijven met sinusfuncties. In wiskunde schoolboeken worden de getijdengrafieken altijd benaderd met één sinusfunctie. Leerlingen zoeken op Internet de eb- en vloedbeweging van een kustplaats op een bepaalde dag of het jaargemiddelde op en proberen vervolgens m.b.v VU-grafiek of de grafische rekenmachine een passende sinusfunctie te modelleren bij de gevonden gegevens. Weliswaar wordt kort ingegaan op de beperkingen van dit model en wordt met name gewezen op de asymmetrie tussen eb en vloed, maar verder dan een verwijzing naar harmonische analyse en naar achtergrondinformatie op een website zoals www.getij.nl gaan de auteurs van de schoolboeken niet. Ze suggereren leerlingen om dit in een praktische opdracht of profielwerkstuk verder uit te zoeken, maar geven niet aan hoe dit dan wel met enig zicht op succes kan gedaan worden.¹ Een citaat uit een artikel van Jan de Lange uit 2000ⁱⁱ is ook niet bemoedigend: “The students don’t have the tools to find a better way of coping with the lack of symmetry of the real graph”. We zullen in de artikel laten zien dat een leerling met het signaalanalyse-gereedschap in Coach 6 wel tot een meer realistische benadering van getijdenbewegingen kan komen en de methode van harmonische analyse als voorspellingsmethode voor de getijdenbeweging kan onderzoeken.

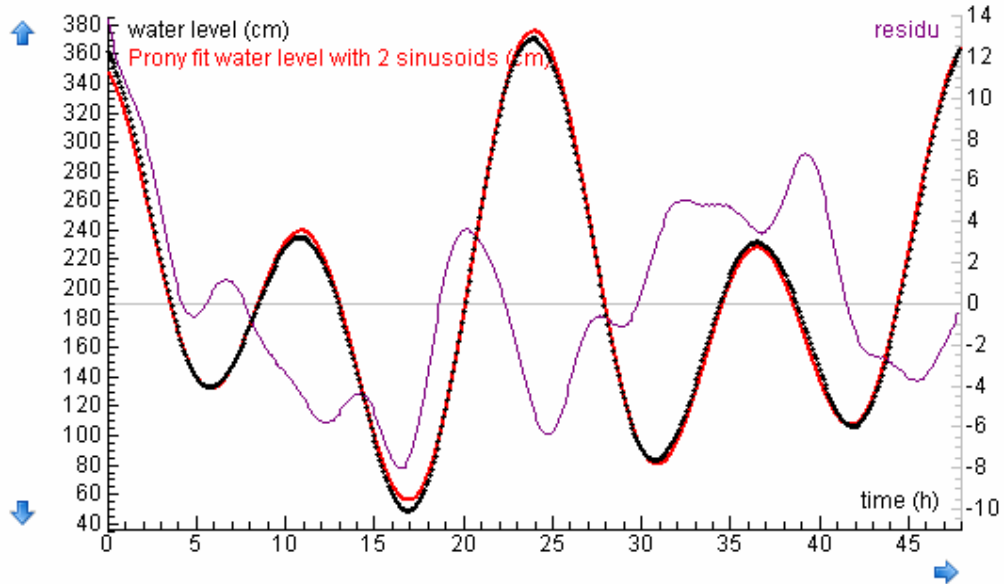
Harmonische analyse als voorspellingsmethode voor het getij

In Nederland kennen we een getijdenbeweging waarbij eb en vloed elk tweemaal per dag optreedt en voor elk getij de verschillen tussen de twee waterstanden maar een beetje van elkaar verschillen. Zie onderstaande schermafdruk (Figuur 1) van een Coach venster met hierin de op www.getij.nl voorspelde waterstanden voor Delfzijl op 23 juni 2006. Tevens zijn twee benaderingen van de getijdengrafiek getekend: een sinusfit (rood) en een betere benadering met een som van twee sinusfuncties (blauw). Deze benadering is gevonden door de verschilgrafiek van de waterstanden en de sinusbenadering opnieuw via een sinusfit te beschrijven. Via de in Coach ingebouwd Prony methode voor spectraalanalyse vindt je trouwens nagenoeg dezelfde benadering met twee sinusfuncties.



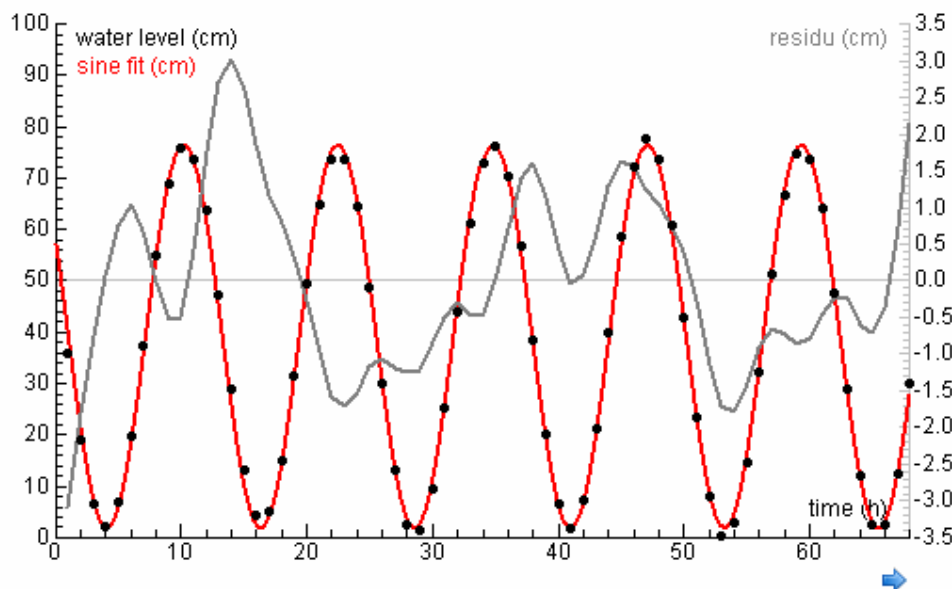
Figuur 1. Voorspeld getij voor Delfzijl van 23 juni 2006.

De getijdenbeweging is niet overal op de wereld hetzelfde: er zijn ook kustgebieden met maar eenmaal per dag eb en vloed en er bestaan locaties waar het weliswaar tweemaal per dag eb en vloed is, maar de laagwaterstanden en/of hoogwaterstanden op één dag veel verschillen. Als voorbeeld geven we de op www.tidesandcurrents.noaa.gov voorspelde waterstanden in Seattle (Washington) op 18 en 19 juni 2006 (Figuur 2): er is een duidelijk verschil tussen de twee laagwaterstanden tussen de twee hoogwaterstanden op één dag. Maar ook deze getijdenvoorspelling laat zich goed benaderen met twee sinusfuncties (via de Prony methode).



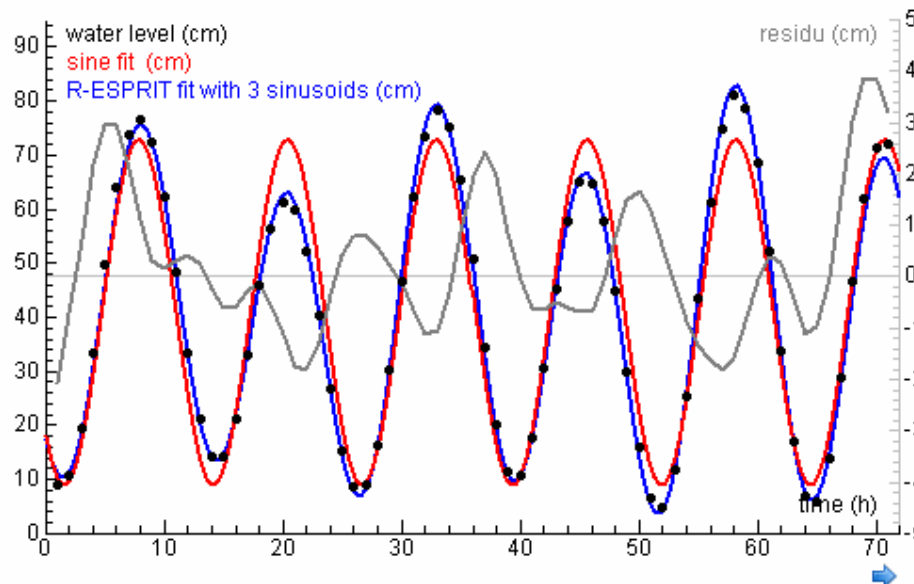
Figuur 2. Voorspeld getij voor Seattle op 18 en 19 juni 2006.

Officiële getijdentafels zijn voor bijna alle locaties ter wereld op Internet te vinden. Dit maakt het mogelijk om plaatsen en tijdsperioden te vinden waarop een model met een enkele sinus wel goed werkt. Bijvoorbeeld, op de website www.tidesandcurrents.noaa.gov van de National Oceanic & Atmospheric Administration in de Verenigde Staten van Amerika is de gegevensverzameling voor Sewells Point in Virginia op 13 t/m 15 maart 2006 te vinden. In onderstaande schermafdruk (Figuur 3) van een Coach venster zijn de voorspelde waterstanden gemodelleerd met een sinusfit (rood). De verschilgrafiek van voorspelde en gemodelleerde waterstanden (residu in grijskleur) geeft aan dat het sinusmodel tot op 3 cm nauwkeurig is.



Figuur 3. Het getij voor Sewells Point (Virginia) van 13 maart t/m 15 maart 2006.

Trek niet de conclusie dat het getij van Sewells Point altijd met een enkele sinusgrafiek adequaat beschreven kan worden. Figuur 4 toont de getijdengrafiek voor 23 t/m 25 maart 2006, een benadering met een enkele sinusfunctie (rood) en een betere benadering met drie sinusfuncties (blauw), die bepaald is via de in Coach ingebouwde R-ESPRIT methode voor spectraalanalyse.



Figuur 4. Het getij voor Sewells Point (Virginia) van 23 maart t/m 25 maart 2006.

Om over een lange periode het getij adequaat wiskundig te modelleren met sinusfuncties moeten er meer componenten aan het model toegevoegd worden. In Coach kan dit het beste gedaan worden via de R-ESPRIT methode. In deze methode zijn twee parameters in te stellen: de snapshot dimensie, die vastlegt hoe lang de reeksen van opeenvolgende data zijn die in de R-ESPRIT methode van spectraalanalyse gebruikt worden, en het aantal sinusfuncties in het model. Als we de voorspelde waterstanden van Sewells Point in 2005 modelleren met 8 sinusfuncties vinden we, met de automatisch bepaalde snapshot dimensie van 84, als benadering de formule

$$\begin{aligned}
 &41.11 + 35.12 \sin(28.982 t - 75.637) + 6.38 \sin(30.002 t + 6.794) + \\
 &4.97 \sin(15.052 t - 152.698) + 4.95 \sin(13.946 t + 78.075) + \\
 &0.45 \sin(0.200 t + 106.750) + 0.96 \sin(27.990 t + 92.143) + \\
 &0.02 \sin(31.472 t - 24.033) + 0.02 \sin(33.216 t + 103.765)
 \end{aligned}$$

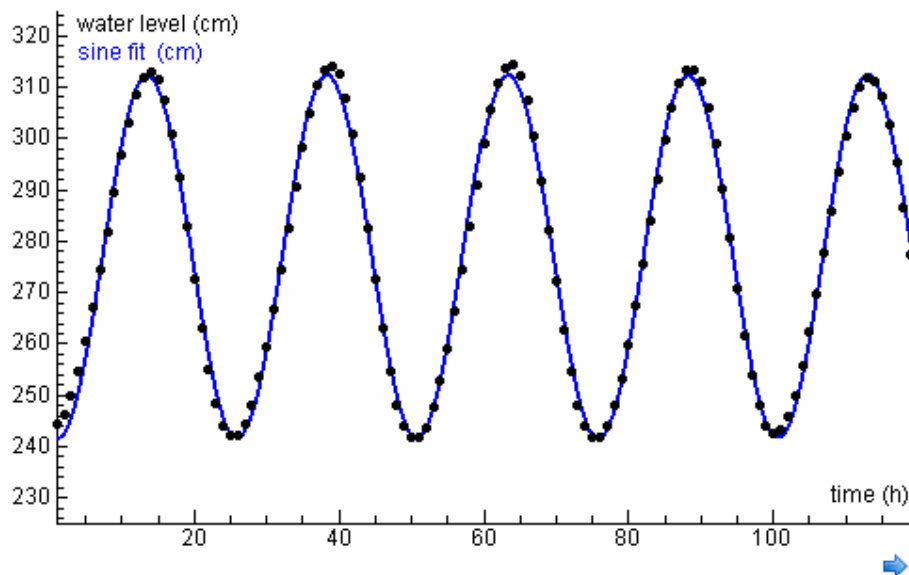
waarbij t de tijd (in uren) is gemeten vanaf het begin van 2005 en de hoeksnelheden (of frequenties van de sinusfuncties zo men wil) zoals gebruikelijk in getijdenanalyse in graden per uur vastgelegd zijn. De standaarddeviatie is nu ongeveer 8 cm. We kunnen dit model uitbreiden tot een model met 18 sinusfunctie door dezelfde analyse toe te passen op het verschil tussen voorspeld getij en de al gevonden benadering. We vinden dan de volgende acht bijdragen:

$$\begin{aligned}
 &0.11 + 7.70 \sin(28.438 t + 60.437) + 4.06 \sin(0.049 t - 177.360) + \\
 &1.30 \sin(15.067 t - 37.467) + 0.38 \sin(57.963 t - 79.633) + \\
 &0.06 \sin(29.475 t - 77.609) + 0.05 \sin(30.721 t + 106.212) + \\
 &0.02 \sin(13.569 t - 164.1467) + 0.01 \sin(43.806 t - 43.641)
 \end{aligned}$$

Het model met 16 sinusfunctie heeft een standaarddeviatie van ongeveer 5 cm. We kunnen de vijf belangrijkste bijdragen in ons model vergelijken met de literatuurwaarden van de Amerikaanse website (de zogenaamde 'harmonic constituents'):

Met Coach gevonden model		literatuurgegevens		
hoeksnelheid (°/h)	amplitude (cm)	hoeksnelheid (°/h)	amplitude (cm)	label
28.982	35.12	28.984	36.6	M2
28.438	7.70	28.440	8.1	N2
30.002	6.38	30.000	6.4	S2
15.052	4.97	15.041	4.9	K1
13.946	4.95	13.943	4.2	O1

De overeenstemming mag gerust verbluffend genoemd worden. De zesde belangrijkste bijdrage in ons Coach model met frequentie 0.049 graden per uur en amplitude 4.06 correspondeert waarschijnlijk met de SA en SSA componenten die de jaarlijkse meteorologische variaties en hun invloed op het zeeniveau beschrijven. De labels M2 en S2 geven aan dat de harmonische componenten te maken hebben met de rotatiebewegingen van de maan en zon en voor een dubbeldaags getij zorgen. De N2 component verdisconteert met het feit dat de baan van de maan om de aarde geen cirkel is maar een ellips. In de componenten K1 en O1 is het effect van de declinatie van de maan meegenomen. Het gaat om harmonische componenten die een hoofdrol spelen bij een enkeldaags getij. Een illustratie hiervan is de voorspelde getijdenbeweging in de Golf van Mexico bij Pensacola (Florida) op 5 achtereenvolgende dagen in juni 2006 (Figuur 5): Het is in vijf dagen tijd maar vijf keer laag- en hoogwater! Een sinusfit is voor deze periode een adequate benadering.

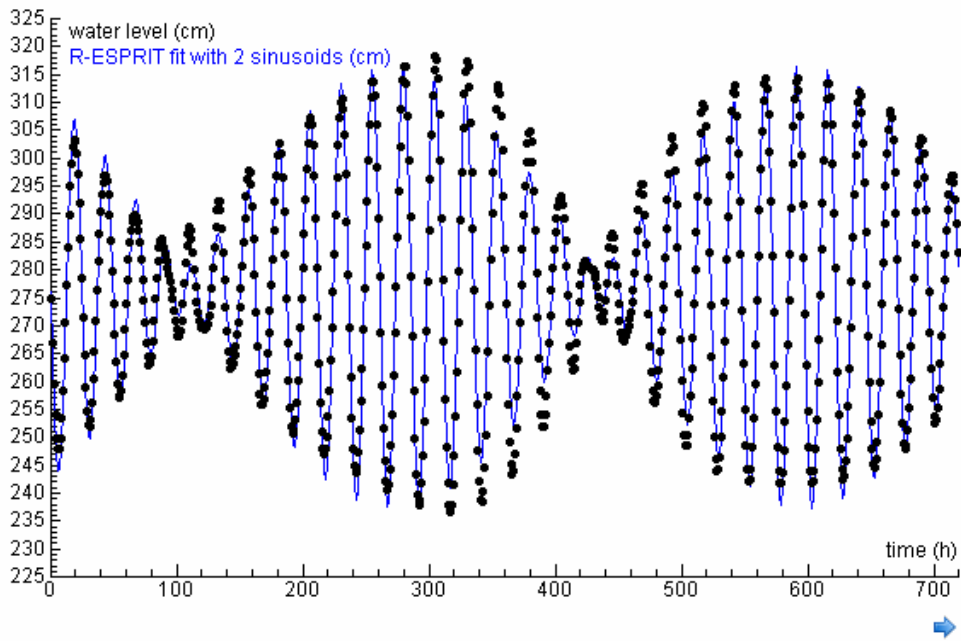


Figuur 5. Enkeldaags getij voor Pensacola (Florida) van 23 juni t/m 27 juni 2006.

De voorspelde getijdenbeweging voor de hele maand juni 2006 wordt redelijk beschreven door een som van twee sinusoïden met dicht bij elkaar liggende hoeksnelheden (zie Figuur 6):

$$276.8 + 21.8\sin(15.019t - 152.482) + 17.8\sin(13.917t + 147.960)$$

Dit model illustreert zweving in de getijdenbeweging. De gevonden hoeksnelheden liggen dicht bij die van K1 component (15.041°/h) en de O1 component (13.943°/h). Deze twee hoofdcomponenten van de getijdenbeweging te Pensacola vind je ook terug bij een analyse over het hele jaar 2006 (15.041°/h en 13.948°/h bij snapshot dimensie gelijk aan 348)



Figuur 6. Voorspeld getij in Pensacola (Florida) voor juni 2006 en een benadering met twee sinusoiden

Getijdenanalyse aan de Noordzeekust

Zo'n getijdenanalyse kun je natuurlijk ook, dichterbij huis, voor kustplaatsen aan de Noordzee doen. Om goede resultaten te krijgen met de R-ESPRIT methode is de keuze van de snapshot dimensie wel belangrijk. Door trial-and-error moet deze parameter gekozen worden als er geen geschikte waarde kleiner of gelijk aan 100 automatisch gevonden kan worden. Bijvoorbeeld hebben we voor de locatie Roompot-Buiten in het Oosterscheldegebied de volgende zes componenten gevonden m.b.v. de getijdengegevens uit 2005 op www.getij.nl:

<i>Met Coach gevonden model</i>		<i>literatuurgegevens</i>		
hoeksnelheid (°/h)	amplitude (cm)	hoeksnelheid (°/h)	amplitude (cm)	label
28.980	131.1	28.984	135	M2
29.996	36.3	30.000	36	S2
28.457	15.3	28.440	22	N2
30.098	10.5	30.082	10	K2
13.956	10.5	13.943	11	O1
27.995	4.9	27.968	11	μ 2

Deze verbluffende overeenkomst tussen het met Coach gevonden model en de voorspellingen van RIKZⁱⁱⁱ is tot stand gekomen door een snapshot dimensie van 521 te kiezen voor een model met acht sinusfuncties. De beste snapshot dimensie kleiner of gelijk aan 100 levert alleen de eerste twee componenten op. Het is dus een beetje puzzelwerk, maar leerlingen leren zo wel kritisch te staan tegenover gepresenteerde modellen en resultaten van berekeningen.

In praktijk wordt de methode van harmonische analyse toegepast op gemeten waterstanden van drie opeenvolgende jaren om de belangrijkste hoeksnelheden, amplitudes en fasen op te sporen. Eigenlijk doet men bij RIKZ een lineaire regressie van een model bestaande uit functies $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, voor tientallen vast gekozen hoeksnelheden. In Coach kunnen we alleen de R-ESPRIT methode van spectraalanalyse hanteren voor dit doeleinde. Met snapshot dimensie gelijk aan 520 vinden we weer een verbluffend resultaat voor de op www.waterbase.nl beschikbare waterstanden uit 2005:

<i>Met Coach gevonden model</i>		<i>literatuurgegevens</i>		
hoeksnelheid (°/h)	amplitude (cm)	hoeksnelheid (°/h)	amplitude (cm)	label
28.984	133.1	28.984	135	M2
30.012	34.6	30.000	36	S2
28.446	19.4	28.440	22	N2
13.942	12.7	13.943	11	O1
57.964	11.5	57.968	12	M4
29.517	8.4	29.528	11	2MN2
27.944	7.3	27.968	11	μ2

Relevante harmonische componenten komen tevoorschijn via spectraalanalyse. Het gevonden model heeft een standaarddeviatie van pakweg 34 cm, hetgeen door weersinvloeden op de waterstanden gemakkelijk te verklaren is. Lineaire regressie van de in 2005 gemeten waterstanden met een model dat de belangrijkste harmonische componenten omvat levert trouwens onderstaand resultaat, met standaarddeviatie van bijna 30 cm, op:

<i>Regressiemodel</i>		<i>literatuurgegevens</i>	
hoeksnelheid (°/h)	amplitude (cm)	amplitude (cm)	label
28.984	133.1	135	M2
30.000	37.3	36	S2
28.440	20.5	22	N2
30.082	14.5	10	K2
13.943	12.7	11	O1
57.968	11.7	12	M4
27.968	11.0	11	μ2
29.528	10.3	11	2MN2

Wie de getijdenbeweging aan Engelse kustplaatsen wil bestuderen kan het beste tijdreeksen van waterstanden opvragen via het UK Tide Gauge Network op www.bodc.ac.uk, de website van de British Oceanographic Data Centre. Een voorspelling van de getijdenbeweging voor de komende zeven dagen is voor Engelse havens op te vragen op de website <http://easytide.ukho.gov.uk>. Een uitgebreide lijst met harmonische componenten voor verschillende plaatsen (ook Nederlandse kustplaatsen!), die gebruikt wordt in de getijdensoftware XTide, is beschikbaar op ftp://harmonics.unh.edu/xtide/harmonics_unpacked/.

Tot slot

Dit artikel maakt duidelijk dat de methode van harmonische analyse als voorspellingsmethode voor de getijdenbeweging door leerlingen met Coach 6 daadwerkelijk onderzocht kan worden. De benaderingen die experimenteel gevonden worden stemmen goed overeen met de modellen die professionals gebruiken voor getijdenvoorspellingen. Experimenteel gevonden hoeksnelheden zijn niet zomaar getallen, maar vinden hun oorsprong in een astronomische interpretatie. Vakoverstijging met natuurkunde en aardrijkskunde ligt voor het oprapen. Bijzondere getijdenverschijnselen zoals een agger, ook wel dubbel laagwater genoemd, of een dubbel hoogwater zijn trouwens ook netjes te modelleren via harmonische analyse. Leerlingen kunnen zo zelf ervaren hoe effectief wiskundige modellen van reële fenomenen kunnen wezen.

ⁱ Zie: *Getal en Ruimte, havo B Deel 2* (2004) praktische opdracht 12 Getijbeweging.

ⁱⁱ Jan de Lange (2000). The Tides They Are A-Changing. *The UMAP Journal* **21** (1) 15-34.

ⁱⁱⁱ RIKZ (2006). *Getijtafels in Nederland 2006*.