

# Een computerwerkplaats voor wiskunde

André Heck  
Universiteit van Amsterdam

## 1. ICT IN DE EXACTE VAKKEN

In onderwijs op VWO/HAVO wordt een steeds actievere rol aan de leerling toegekend. Belangrijk argument is dat leerlingen meer leren door zelf actief bezig te zijn. Het in de eind jaren tachtig opgekomen constructivisme bepleit een onderwijsaanpak waarin leerlingen op basis van reeds aanwezige kennis hun eigen ideeën vormen, deze uitwerken en toetsen, en door na te denken over eigen handelen nieuwe kennis vergaren. In deze visie past het uitvoeren van praktische opdrachten en het doen van eigen onderzoeken. Om leerlingen beter voor te bereiden op een vervolgopleiding en latere beroepspraktijk worden nog voorwaarden gesteld zoals het zelfstandig en in teamverband planmatig kunnen werken en het functioneel gebruiken van informatie- en communicatietechnologie (ICT). De moderne leerkracht houdt zich bij dit alles meer bezig met het ontwerpen, voorbereiden en begeleiden van leeractiviteiten dan met de traditionele doceertaak. Op zichzelf allemaal mooie ideeën, maar het onderwijs moet dit dan wel mogelijk maken!

Een effectieve en efficiënte omgeving is nodig die leerlingen aanzet tot actief leren en ze in staat stelt om taken — in het bijzonder praktische opdrachten en het profielwerkstuk — goed uit te voeren. Zo'n omgeving moet erg leerling-gestuurd zijn, maar ook de docent de mogelijkheid bieden om het leerproces te volgen, waar nodig bij te sturen en tenslotte het werk te beoordelen. ICT is hier één van de hulpmiddelen voor. Wat het er echter niet gemakkelijker op maakt is dat elk schoolvak een eigen accent op de ICT-gereedschappen legt. Bij de natuurwetenschappelijke vakken zijn dit middelen om metingen te doen, gegevens te verwerken, en om deze dan te vergelijken met resultaten uit computersimulaties. Bij techniek gaat het om het combineren van meten van gegevens en aansturen van apparaten. Wiskunde heeft behoefte aan rekenfaciliteiten — exact, numeriek en grafisch — om gemakkelijk berekeningen uit te kunnen voeren en om gegevens te verwerken. Ook is er behoefte aan het kunnen werken met wiskundige modellen op de computer, in het bijzonder daar waar exacte oplossingen niet mogelijk zijn of de nodige wiskundekennis bij leerlingen ontbreekt. In alle vakken wordt van leerlingen verwacht dat zij kennis en vaardigheden kunnen toepassen in situaties van het dagelijkse leven. Manieren om deze situaties in de klas te brengen zijn het door leerlingen zelf laten uitvoeren van experimenten, hen laten werken met reële data uit statistisch onderzoek en met informatie gevonden op Internet. Daarnaast bieden digitale videobronnen waaraan gemeten kan worden een goede mogelijkheid om met echte, zelf gekozen data te werken.

Hoe divers het ICT-gebruik in exacte vakken ook is, toch is er is een gemeenschappelijke rol van ICT in exacte vakken te herkennen. Deze rol hangt samen met een didactische en onderwijskundige vernieuwing die de laatste jaren in gang is gezet. In het verleden stond de leerstof centraal en was de activiteit van leerlingen bij exacte vakken vooral gericht op het oplossen van standaardvraagstukken. Impliciet werd verondersteld dat het begrip dan wel vanzelf zou volgen. Een doorgaande hervorming van het onderwijs in bètavakken is om de concepten voldoende aandacht te geven en het leerproces van de leerlingen een belangrijke plaats toe te bedelen. De natuurwetenschappelijke vakken lopen hiermee voorop, maar ook bij wiskunde maakt probleem-oplossen meer en meer plaats voor wiskundig modelleren, redeneren en presenteren. De rol van ICT is om deze nieuwe activiteiten te accommoderen: toepassen van ICT in exacte vakken is dan ook vooral omgaan met ICT-gereedschappen. Computeralgebra-systemen nemen het vervelende wiskundige handwerk over en bieden toegang tot het brede spectrum van wiskundige methoden en technieken. Modellerprogramma's maken het mogelijk om de concepten achter een onderwerp te bestuderen zonder dat hierbij de nadruk gelegd hoeft te worden op oplossingsmethoden. Simulatiepakketten maken het mogelijk om parameters in een model te variëren en het effect hiervan in eindresultaten te onderzoeken. Softwarepakketten voor tekstverwerking en vormgeving motiveren leerlingen om op professionele wijze werkzaamheden af te sluiten en niet eerder te rusten voor een goede versie van de verslaglegging af is.

Welke ICT-gereedschappen worden er momenteel op Nederlandse scholen in de exacte vakken ingezet? Bij alle practica in natuurkunde, scheikunde, biologie, ANW en techniek wordt vrijwel overal de aan de Universiteit van Amsterdam ontwikkelde software- en hardwareomgeving Coach gebruikt [6, 14]. Deze leeromgeving biedt ook diverse wiskundige faciliteiten, om de simpele reden dat experiment en waarneming meestal gepaard gaan met wiskundige presentatie en analyse van gegevens. Maar hiaten in faciliteiten voor wiskunde moeten nog opgevuld worden voordat er van een bètabreed inzetbare omgeving gesproken kan worden. Voor wiskundeonderwijs is de situatie compleet anders en bestaat er niet een met Coach te vergelijken softwarematige werkomgeving, die bij alle wiskundige activiteiten en op diverse leerlingenniveaus inzetbaar is. Integendeel, er is een versnipperd gebruik van ICT-gereedschappen: naast de landelijk ingevoerde grafische rekenmachine wemelt het van domeinspecifieke computerprogramma's. We noemen er een paar: Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad en Cinderella voor meetkunde, VU-dynamo, Dynasis en Stella voor dynamische systemen, VU-stat voor statistiek, symbolische rekenmachines en Derive voor het werken met formules, StudyWorks en TI-InterActive voor wiskundige werkbladen en Excel voor werken met spreadsheets. Hoe prachtig en weldoordacht al deze programma's ook zijn, ze vormen in feite een grabbelton van onderling slecht samenwerkende pakketten.

Wat echter het meest vervelend is: er worden momenteel bij wiskunde heel andere ICT-gereedschappen gebruikt dan bij de overige exacte vakken. Dit probleem komt meer naar de oppervlakte nu met de invoering van de profielen, met name van de profielen Natuur & Gezondheid en Natuur & Techniek,

aan de wenselijkheid om bètavakken inhoudelijk beter op elkaar af te stemmen en de systeemscheiding tussen de vakken op te heffen gevolg gegeven kan worden. Deze samenhang zou je dan ook graag terug zien bij de hulpmiddelen voor leerlingen en docenten. De behoefte aan een gemeenschappelijke ICT-leeromgeving voor alle bètavakken neemt toe. Tijdsbesparing en grotere effectiviteit mag verwacht worden wanneer leerlingen en docenten met slechts één omgeving werken, maar ook aspecten als kostenbesparing spelen een rol.

Op basis van groeiende inzichten in ICT-gebruik bij wiskunde en van ervaringen opgedaan met Coach bij de andere exacte vakken, wordt in de komende jaren aan het AMSTEL Instituut van de UvA een bètabreed inzetbare leeromgeving gemaakt, kortweg met  $\beta$ -tool aangeduid. Maar waarom wachten op de eerste versie van de  $\beta$ -tool? Misschien is de huidige versie van Coach, die op veel scholen aanwezig is, al inzetbaar. In [11] kunt u een overzicht vinden van de huidige faciliteiten van Coach en lezen hoe dit pakket met al zijn beperkingen en mogelijkheden inderdaad binnen wiskundeonderwijs bruikbaar is.

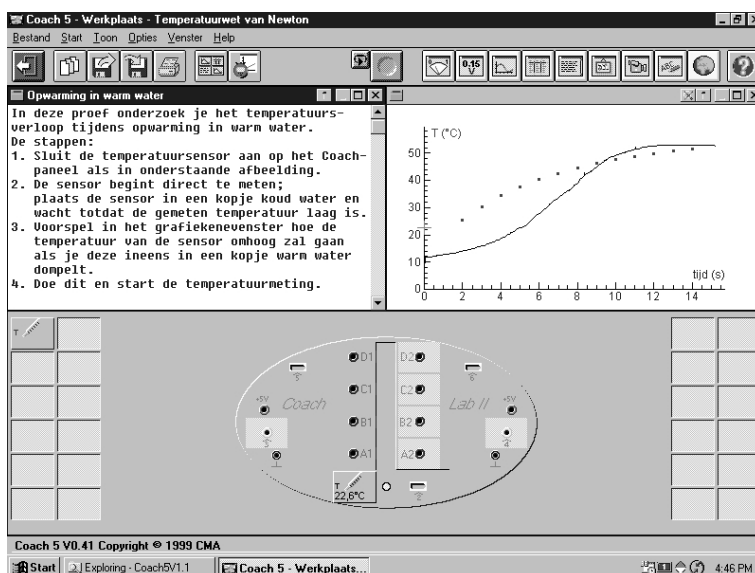
In dit artikel zullen we dieper ingaan op de mogelijkheden van Coach bij praktische opdrachten en het profielwerkstuk. Onderwerpen zijn: temperatuursverandering, vrije worp bij basketbal, kettinglijn, tumorgroei en lengtegroei bij mensen. Hiermee hopen we u enig zicht te geven op enkele ingrediënten van de  $\beta$ -tool in spe en op de eisen die wiskunde aan dit pakket stelt.

## 2. HERONTDEK DE TEMPERATUURWET VAN NEWTON

In elk schoolboek voor wiskunde komt wel het voorbeeld van afkoeling van een kopje koffie voor. Op basis van een paar gegevens vragen de auteurs om de afkoelingswet van Newton te verifiëren. Deze wet zegt dat het temperatuursverschil tussen een object en zijn omgeving exponentieel afneemt. Een aardige illustratie van het gebruik van de exponentiële functie, daar niet van. Maar wat irriteert is dat in menig lesboek de gegevens eerder verzonnen dan echt gemeten lijken te zijn. Bovendien is het gebruik van slechts een paar meetgegevens in een gemakkelijk uitvoerbaar experiment niet de gewone gang van zaken bij experimenteel onderzoek. Voor onderwijs is daarnaast van belang dat zo'n opdracht veel spannender en overtuigender is wanneer je als leerling zelf zo'n experiment mag uitvoeren. Je kunt dan gelijk veel meer vragen over temperatuursverandering onderzoeken: hoe hangt het temperatuursverloop af van begin- en eindtemperatuur? Maakt het verschil of je een object laat afkoelen in water of lucht? Speelt de vorm of het materiaal van het object een rol? Verloopt opwarmen van een object net zo? Bij de beantwoording van deze vragen gaan natuurkunde en wiskunde hand in hand.

Om een indruk te geven van hoe je met Coach in het echt gegevens verzamelt zullen we een eenvoudig experiment beschrijven om de opwarming van een object te onderzoeken. De proef is als volgt: koel een temperatuursensor eerst in een kopje koud water af, dompel deze dan ineens in een bakje warm water en laat de computer elke seconde de temperatuur van de sensor registreren. De beschrijving van de proef en de meetopstelling kan in begeleidend lesmateriaal staan, maar kan ook binnen het computerpakket getoond worden, zoals in onderstaande schermafbeelding (figuur 1) van Coach in werking te zien is.

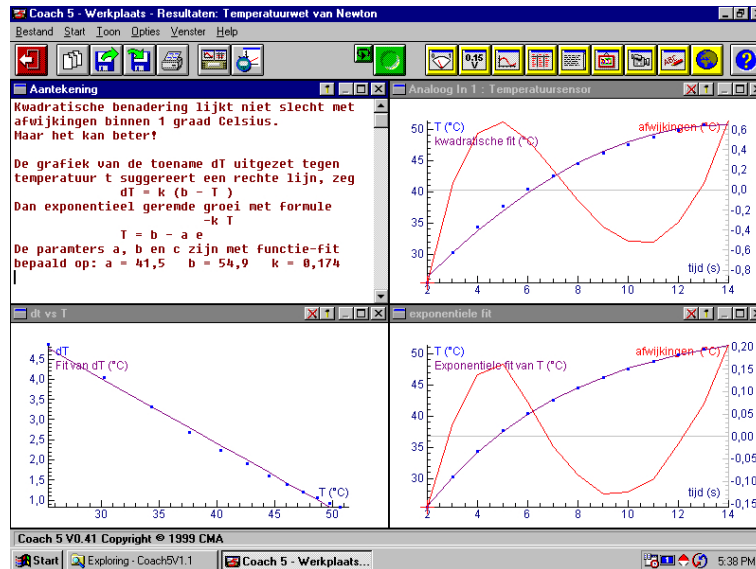
Onderaan in figuur 1 staat de afbeelding van het Coachlab-paneel waarop de temperatuursensor is aangesloten. Linksboven staan de opdrachten en rechtsboven is een diagram waarin punten getekend zijn die de gemeten temperatuur op zeker moment aangeven. Desgewenst kan de docent deze schermopbouw vooraf instellen: zo kan de software zelf herkennen welke sensor op welke plaats op het meetpaneel wordt aangesloten; de meetinstellingen kunnen van tevoren vastgelegd worden; de grootheden temperatuur  $T$  en *tijd* kunnen al in een diagramvenster klaargezet zijn. Voorafgaand aan de meting kan gevraagd worden over mogelijke uitkomsten na te denken en in het diagramvenster te voorspellen hoe de opwarming verloopt. De vorm van de getekende grafiek doet vermoeden dat hier aan een logistische kromme gedacht is.



FIGUUR 1. Temperatuurmeting met Coach.

Zodra de meting klaar is kan met de verwerking van de meetgegevens en met de speurtocht naar een wiskundig model van opwarming begonnen worden. De voorspelde grafiek was fout en wordt snel gewist. Met de menu-optie **functie-fit** kun je eenvoudig nagaan of een bekend regressiemodel goed past bij de gemeten grafiek. Het venster rechtsboven in figuur 2 laat zien dat de kleinste kwadratenmethode met een bergparabool al een regressiekromme oplevert die maximaal  $1^{\circ}\text{C}$  afwijkt. Merk op dat de afwijkingen in het diagramvenster uitgezet zijn met een eigen verticale coördinaat-as om de grafiek beter in beeld te krijgen.

Rest de vraag hoe goed deze regressiekromme is. Op de eerste plaats is de som van de kwadraten van de afwijkingen een aanwijzing voor de nauwkeurigheid: hoe kleiner deze som, hoe beter. Ook is het verstandig om het voorspellende karakter van de kromme onder de loop nemen. Dan voldoet de



FIGUUR 2. Wiskundige analyse van opwarming.

bergparabool al veel minder: na 30 seconden wordt een temperatuur van  $8^{\circ}\text{C}$  voorspeld, wat minder is dan de berekende begintemperatuur van  $17,6^{\circ}\text{C}$ . Het diagramvenster rechtsonder in figuur 2 illustreert dat een exponentieel regressiemodel een geschiktere formule oplevert, met afwijkingen binnen  $0,2^{\circ}\text{C}$ . Voor dit ene experiment is deze formule een mooi resultaat, maar als wiskundig model van opwarming is het weinig bevredigend. Dan wil je ook weten wat de wiskundige en fysische grondslag voor de formule is, zodat je niet alleen iets weet over de opwarming van deze ene sensor, maar over de temperatuursverandering in een algemener geval.

In dit experiment ligt het voor de hand om, behalve naar de temperatuur, ook naar de temperatuuroptimaal tijdens de proef te kijken. In het venster linksonder in figuur 2 is de grootte  $dT$  voor de toename in temperatuur per seconde ingevoerd en is de grafiek getekend van  $dT$  als functie van temperatuur  $T$ : een rechte lijn verschijnt op het scherm. Kennelijk is er een lineair verband, zeg van de vorm  $dT = k(b - T)$ . Door aflezen in de grafiek of door het uitvoeren van een lineair regressiemodel via de menu-optie **functie-fit** kunnen de waarden van de parameters  $k$  en  $b$  bepaald worden. Deze waarden komen later goed van pas wanneer je met de modelleromgeving van Coach een simulatie van het opwarmingsproces wilt uitvoeren.

Een docent mag van een leerling verlangen dat hij of zij over de betekenis van parameters in een model nadenkt: het moet bijvoorbeeld duidelijk zijn dat  $b$  de maximale temperatuur bij opwarming voorstelt. Verder is er natuurlijk de hoop en verwachting dat een leerling door naar het verband tussen temperatuuroptimaal en temperatuur te kijken zelf op een idee komt voor een

geschikt wiskundig model van het natuurkundige verschijnsel. Het werken met zelf gemeten data vergroot het gevoel zelf een ontdekking gedaan te hebben. Daarnaast zal menig scholier het doen van experimenten een aantrekkelijke werkvorm vinden. Een heleboel pluspunten van werken met reële data.

In deze ene leerlingactiviteit passeren al veel onderdelen uit de wiskunde de revue: toenamendiagram, differentiequotiënt, lineair en exponentieel verband, exponentiële functie, kleinste kwadraten methode, etc. Maar het belangrijkste is misschien wel dat een leerling hier ervaart dat dit geen gekunstelde, maar concrete wiskundige begrippen zijn die hun diensten bewijzen in een wiskundig model van een natuurkundig verschijnsel. Bovendien kan dit model toegepast worden op verschijnselen van verschillende aard: laat leerlingen maar experimenteren met de ontlading van een condensator of de concentratie van een reagens in een eerste-orde chemische reactie volgen. Later in dit artikel zullen we zien hoe dit model ook onderdeel vormt van een wiskundig model voor lengtegroei van jongens en meisjes.

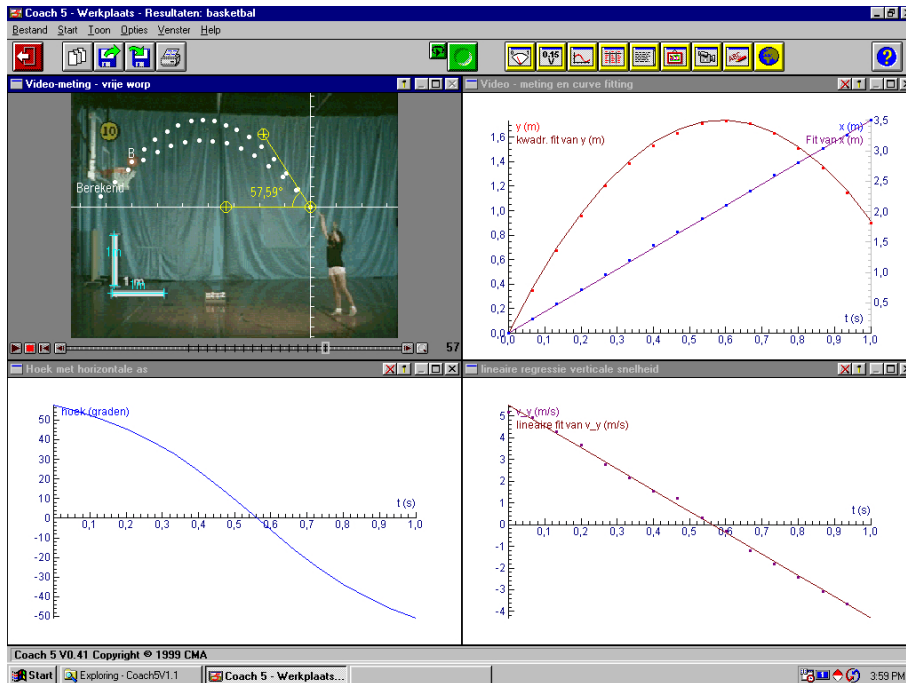
### 3. ANALYSEER EEN VRIJE WORP BIJ BASKETBAL

Een onderwerp dat dicht bij het gewone schoolleven staat is basketbal in de gymnastiekles. Een interessante onderzoeksvraag hierover is hoe je het beste een vrije worp kunt nemen: bovenhands of onderhands? hoog of laag? Om deze vraag te kunnen beantwoorden heb je wel gegevens nodig en deze kunnen jammer genoeg niet of slechts met veel moeite via sensoren gemeten worden. Wat veel beter werkt is het opnemen van een aantal vrije worpen met een digitale videocamera om daarna gegevens uit de videoclips te halen. In videometing klik je met de muis in de videoclip op punten waarvan je de coördinaten wilt weten en meet je afstanden en hoeken. Deze gegevens kun je vervolgens met dezelfde middelen als bij een echt experiment verwerken en analyseren. Voordelen van videometing zijn:

- Je hoeft zelf geen proefopstelling op te bouwen.
- Processen die zich minder goed lenen voor directe metingen kun je toch bestuderen.
- Je hoeft niet van tevoren tot in elk detail te bedenken wat precies gemeten gaat worden.
- Je kunt metingen gemakkelijk en snel doen, achteraf nog eens verifiëren en indien nodig corrigeren.

Figuur 3 is een schermafbeelding van een videometing en analyse van een bovenhandse vrije worp van een scholiere in de sportzaal. Hierin gaat de aandacht uit naar de baan die de bal volgt, maar deze video is even goed te gebruiken om de beweging van de scholiere tijdens het gooien van de bal te analyseren.

Hoe voer je bovenstaande videometing en analyse uit? Als kant en klare films niet voorhanden zijn moet je eerst zelf opnamen maken en deze in geschikte digitale videoclips omzetten. Heb je eenmaal een videoclip in een



FIGUUR 3. Meting en analyse van een vrije worp bij basketbal.

Coach-activiteit geladen, dan kun je eerst nog eens het filmpje afspelen om een idee te krijgen van wat er gebeurt. Zo kun je ook beter beslissen wat te gaan onderzoeken en hoe.

Stel dat je de baan van de geworpen bal wilt bepalen, dan moet je de posities van de bal op verschillende tijdstippen meten. Hiervoor is nodig dat je horizontale en verticale lengtematen instelt en een coördinatenstelsel kiest. Op het getoonde filmpje zijn horizontale en verticale maatstokken aangebracht, maar anders had je de lengtematen nog uit de voorgeschreven hoogte van de basketring en de voorgeschreven afstand van de vrijeworp-lijn kunnen halen. Om de wiskunde gemakkelijker te maken kun je de oorsprong van het coördinatenstelsel het beste neerzetten op het punt waar het meisje de bal los laat. Wanneer je de positieve  $x$ - en  $y$ -as respectievelijk van rechts naar links en van onder naar boven laat open, komen deze variabelen overeen met de grootheden 'horizontale afstand' en 'hoogte', gezien vanuit de werpster.

Je beëindigt het voorwerk met het kiezen van de individuele beeldjes (frames) waarin je metingen wilt doen. In dit voorbeeld ligt voor de hand om alleen frames te kiezen in de periode tussen het weggooiën van de bal en het belanden van de bal in het netje. Ook kun je met regelmaat frames overslaan zodat het aantal metingen niet onnodig groot wordt.

Hierna kun je aan de slag met het meten. Per frame wijs je met de muis de positie van de bal aan en Coach registreert de  $(x, y)$  coördinaten samen met het bijpassende tijdstip in de videoclip. Je kunt de gemeten punten ook in het videovenster tonen: in bovenstaande schermafbeelding markeren de bovenste punten in de videoclip de gemeten positie van de geworpen bal. Behalve posities kun je in Coach ook afstanden en hoeken meten: in bovenstaande schermafbeelding (figuur 3) is met de gradenboog een hoek van  $57,6^\circ$  gemeten waaronder de bal wordt weggegooid.

Tijdens of na het meten kun je de gegevens in een tabel of diagram op het scherm zetten: zie de punten in het diagramvenster rechtsboven in figuur 3. Deze grafiek brengt je op het idee van een bergparabool voor de hoogte van de bal. Met lineaire regressie vind je onmiddellijk de beste formule. En dit klopt heel goed: niet alleen wiskundig gezien, maar ook als je de mechanica wetten van Newton toepast. Als luchtweerstand namelijk verwaarloosd mag worden, dan werkt er in horizontale richting geen kracht op de bal en heeft de bal in deze richting een eenparige, rechtlijnige beweging. In verticale richting werkt alleen de zwaartekracht op de bal, met als gevolg een eenparig versnelde, rechtlijnige beweging. In formuletaal: de horizontale afstand  $x$  en hoogte  $y$  van een bal, die op tijdstip  $t = 0$  met beginsnelheid  $v$  onder een hoek  $\alpha$  geworpen wordt, zijn bepaald door de vergelijkingen

$$\begin{aligned}x &= (v \cos \alpha) t, \\y &= (v \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}$$

Hierin is  $g$  de valversnelling. De natuurkunde verklaart dus waarom je een rechte lijn voor de horizontale positie van de bal uitgezet tegen de tijd krijgt en waarom de verticale positie een bergparabool is. Uit de tweede vergelijking volgt eenvoudig de verticale component  $v_y$  van de snelheid van de bal:

$$v_y = v \sin \alpha - gt.$$

Rechtsonder in figuur 3 zijn de resultaten van numeriek differentiëren van  $y$  in een diagramvenster getekend: de berekende punten liggen inderdaad op een bijna rechte lijn. Door lineaire regressie, maar nog eenvoudiger door de helling van de lijn met het hiervoor bestemde gereedschap in Coach te bepalen, vind je een waarde voor de valversnelling  $g$  en beginsnelheid  $v$ . De waarden  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  en  $v = 6,5 \text{ m/s}$  stemmen mooi overeen met literatuurgegevens.

Door eliminatie van  $t$  in de vergelijkingen van  $x$  en  $y$  krijg je het volgende kwadratische verband tussen horizontale afstand en hoogte:

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Differentiëren levert de helling in elk punt van de baan op:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{g}{v^2 \cos^2 \alpha} x.$$



Voor de hoek van inval  $\alpha_i$  bij de basketring op afstand  $L$  geldt dus:

$$\tan \alpha_i = \tan \alpha - \frac{gL}{v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Meet  $L$  op in de video en je kunt de hoek van inval bij de basketring berekenen: deze blijkt in deze worp gelijk te zijn aan  $-53^\circ$ . Dit kun je weer onmiddellijk controleren in de videoclip of in de grafiek van de hoek die de snelheidsvector van de bal tijdens de vlucht maakt met de horizontale richting.

Met de formules kun je ook de baan van de bal uitrekenen als de scholiere de bal met dezelfde snelheid als in het filmpje weggooit, maar met een beginhoek van  $50^\circ$  i.p.v.  $57,6^\circ$ . Berekende punten van deze baan van de bal kun je in de videoclip laten tonen: de onderste gemarkeerde punten in het videovenster van figuur 3 geven de berekende baan weer. Ook in dit geval lijkt de bal door de basketring te gaan. Met andere woorden, bij de gegeven startsnellheid is er best wel een ruime marge voor de hoek waaronder de bal weggegooid kan worden om toch nog een punt op te leveren. Omgekeerd zou je ook kunnen onderzoeken of bij gegeven hoek van weggooien van de bal de snelheid voldoende mag variëren om toch nog een punt voor je team te scoren. Met de wiskundige formules kun je ook de starthoek bepalen waarvoor de benodigde snelheid van weggooien van de bal minimaal is en de controle over de worp dientengevolge maximaal is.

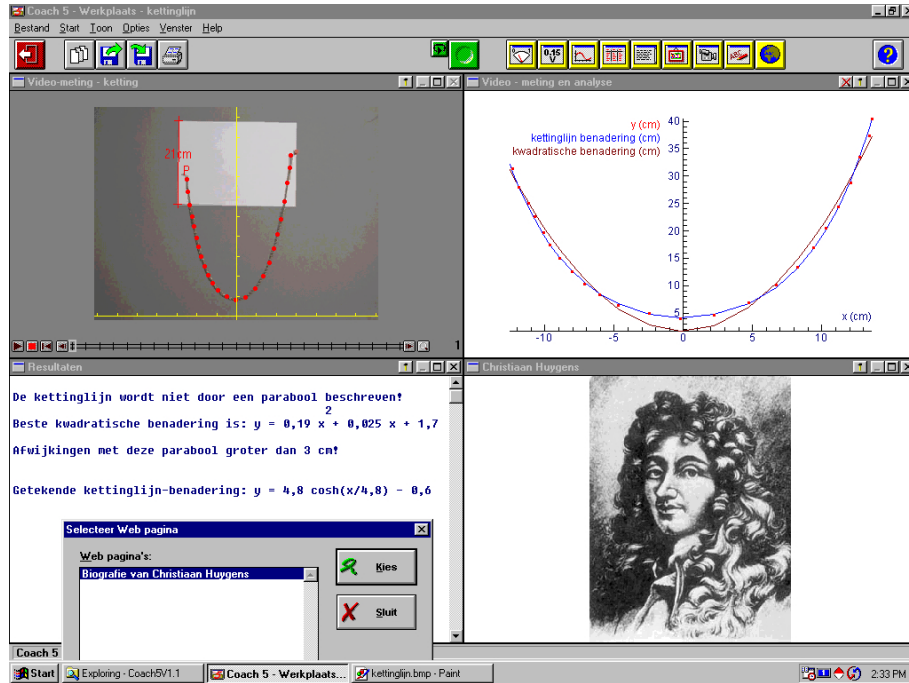
Wat in het tweede voorbeeld opnieuw opvalt is dat de wiskundige formules, functies en grafieken geen abstracte noties zijn, maar juist concrete en direct inzetbare begrippen zijn. Je kunt formules en grafieken direct op hun waarde schatten door terugkoppeling naar de echte situatie. De wiskunde gaat ergens over en is vormgegeven in uitdagende opdrachten.

Wie geïnteresseerd is in de combinatie van sport, wiskunde en natuurkunde en wie inspiratie op wil doen voor praktische opdrachten of profielwerkstuk in deze richting raden we de boeken “Mathematics in Sport” [15] en “The Physics of Sports” [1] aan.

#### 4. VIND DE FORMULE VAN DE KETTINGLIJN

Bij videometing denk je in eerste instantie aan bewegende beelden. Maar ook aan stilstaande beelden kun je meten en zinvolle wiskunde doen. Hang bijvoorbeeld een halsketting aan de uiteinden op, maak er een digitale foto van en laad deze in een Coach-activiteit als ware het een videoclip. Nu kun je posities van punten op de ketting meten. In onderstaande schermafbeelding (figuur 4) wordt de vorm van een hangende halsketting opgemeten (met dank aan Olga Zika).

Als je in Coach handmatig een parabool als benadering voor de kettinglijn uitprobeert, dan kom je er snel achter dat de gemeten punten niet goed op zo’n kromme passen. In het diagramvenster rechtsboven in figuur 4 is de beste parabool met automatische regressie bepaald: een afwijking van meer dan 3 cm! De kettinglijn is dus geen parabool; iets wat Christiaan Huygens al in 1646 op ingenieuze wijze aantoonde. Uit eerbetoon hebben we een portret van Internet opgehaald en in ons werkstuk geplaatst. De hyperlink naar de website waar het plaatje vandaan komt en waar de biografie van Huygens te lezen is kan een



FIGUUR 4. Meten en rekenen aan de kettinglijn.

docent van tevoren klaarzetten, zodat leerlingen snel aan de slag kunnen gaan en hun werk niet hoeft te verzenden in speurtochten op Internet. Tussen twee haakjes, het maken van lesmateriaal of het verslag doen van een experiment met Coach is technisch gezien zo eenvoudig, dat men zich volledig op de inhoud kan concentreren. Tekstuitleg, een videoclip, een grafiek en elk ander onderdeel is in een venster te plaatsen door eerst een bijpassend icoon in de taakbalk aan te klikken, dan een dialoogvenster in te vullen (bijvoorbeeld door de naam van een hyperlink of een bestand aan te klikken), om tenslotte het icoon naar een venster te slepen en los te laten.

We keren terug naar de wiskunde van de kettinglijn. Jan van de Craats heeft in [5] uitvoerig beschreven hoe de ketting wel hangt en hoe dit met leerlingen uit te zoeken is. Laat  $y(x)$  een functie zijn waarvan de grafiek een ‘idealisatie’ van de hangende ketting is. Deze functie voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{k} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

voor zekere  $k > 0$ . De algemene oplossing is:

$$y(x) = k \cosh(x/k + b) + c,$$

voor zekere constanten  $b$  en  $c$ . Als het coördinatenstelsel zodanig gekozen wordt dat het laagste punt van de ketting bij  $x = 0$  past, dan is  $b = 0$  en is de oplossing in termen van de exponentiële functie te schrijven als

$$y(x) = k \frac{e^{x/k} + e^{-x/k}}{2} + c.$$

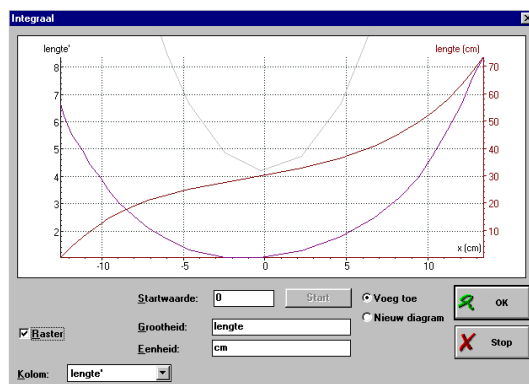
Met een trial-and-error methode kun je geschikte waarden voor  $k$  en  $c$  vinden. In het diagramvenster rechtsboven in figuur 4 zijn de gemeten punten te zien, samen met de grafiek van een geschikte ‘wiskundige’ kettinglijn. Een mooi resultaat, niet waar?

Deze wiskundige benadering van de kettinglijn kan weer gebruikt worden om vragen als “Wat is de lengte van de ketting tussen twee punten?” te beantwoorden. Laat  $s$  de functie zijn waarvoor  $s(x)$  de lengte van de ‘wiskundige’ ketting tussen het ophangpunt aan de linkerkant en het punt  $(x, y(x))$  is. Dan geldt:

$$s(x) = \int_{x_l}^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi,$$

waarbij  $x_l$  de  $x$ -positie van het ophangpunt aan de linkerkant is.

Coach kan numerieke differentiëren en integreren: in figuur 5 staat de grafiek van  $s(x)$  die het gereedschap voor integratie oplevert. De totale lengte van de ketting zou volgens deze grafiek 73,5 cm zijn en dit blijkt bij meting van de echte ketting aardig te kloppen. In Coach kun je ook de oppervlakte onder een grafiek op een willekeurig gekozen segment bepalen. Hiermee kun je gemakkelijk Coach de lengte van de kettinglijn tussen elk tweetal punten laten uitrekenen.



FIGUUR 5. Lengte van kettinglijn tussen twee punten.

Aangespoord door dit succes kun je andere situaties met kettingen gaan onderzoeken: Hoe hangt een ketting waar in het midden een hangertje aan hangt? Hoe is de vorm van een ketting die gedeeltelijk in het water hangt? Als je op een hangende ketting weer twee ophangpunten kiest waaraan een tweede

ketting gehangen wordt, wat kun je dan zeggen over de vorm van de twee kettingen? Allemaal onderzoeksvragen waar meting aan digitaal beeldmateriaal en het beschikbaar hebben van een groot arsenaal van wiskundige faciliteiten helpen om antwoorden te vinden.

## 5. MAAK EEN WISKUNDIG MODEL VOOR TUMORGROEI

Wiskundige modellen bieden een uitkomst als metingen om praktische, technische of ethische redenen niet uitvoerbaar zijn. Het lukt niet altijd om een model te onderbouwen: onderstaand model van Gompertz wordt gebruikt om de groei van sommige tumoren wiskundig te beschrijven, maar een afdoende biologische of medische verklaring waarom en onder welke voorwaarden het wiskundig model werkt is er nog niet (zie [10]).

Er bestaan grofweg twee manieren waarop wiskundig modellen tot stand komen: empirische afleiding via statistische analyse, bijvoorbeeld regressie, en een meer theoretische benadering, gevolgd door een computersimulatie. We concentreren ons hier op de tweede manier van werken. Het proces van modeleren kent dan vier fasen:

1. Analyse van het systeem en bepaling van de basiscomponenten nodig voor het model.
2. Definitie van de belangrijkste variabelen om het systeem te beschrijven.
3. Afleiding van de wiskundige vergelijkingen.
4. Computerimplementatie, schatting van parameterwaarden en simulatie.

We kijken hier alleen naar de laatste fase. Vooraf noemen we nog enkele voordelen van een wiskundig model en van een computersimulatie:

- Een conceptueel model van een verschijnsel wordt op deze manier gekwantificeerd, hetgeen weer kan leiden tot een dieper inzicht in het gemodelleerde fenomeen.
- Hypothesen kunnen op wetenschappelijke wijze onderzocht worden zonder daarvoor tijdrovende metingen te doen.
- Simulaties nodigen als het ware uit tot het stellen van ‘wat als’-vragen.
- Eenzelfde wiskundig model kan in bijna identieke vorm in meerdere toepassingsgebieden toegepast worden.

Om het laatste voordeel kracht bij te zetten merken we op dat het groeimodel van Gompertz ook toegepast wordt bij bestudering van bladgroei van planten [4] en bij studies naar gewichtstoename van varkens [9].

Laten we beginnen met het groeimodel van Gompertz wiskundig te beschrijven. Exponentiële groei komt in elk wiskunde-schoolboek voor: een grootte, zeg  $g$ , groeit of neemt exponentieel af als de snelheid waarmee de waarde van de grootte verandert evenredig is met de waarde op dat moment. Anders

geformuleerd: de relatieve groeisnelheid is constant. In de taal van differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dg}{dt} = c g(t),$$

voor zekere constante  $c$ . De algemene oplossing is:

$$g(t) = g(0)e^{ct}$$

Voegen we aan het rechterlid een kwadratische term toe, dan krijgen we het Verhulst model voor een proces van geremde groei:

$$\frac{dg}{dt} = c g(t) (k - g(t)),$$

voor zekere positieve constanten  $c$  en  $k$ . De algemene oplossing van wat ook als logistische groei bekend staat is

$$g(t) = \frac{kg(0)}{g(0) + (k - g(0))e^{-ckt}},$$

ofwel

$$g(t) = \frac{k}{1 + e^{d-ckt}},$$

voor zekere positieve constante  $d$ . In dit model nadert  $g$  tot  $k$  als  $t \rightarrow \infty$ .

Er bestaat een andere aanpassing van de differentiaalvergelijking voor exponentiële groei die geremde groei oplevert: neem geen constante relatieve groeisnelheid, maar laat deze volgens een exponentieel proces in de tijd afnemen. In formuletaal:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= -a c(t), \\ \frac{dg}{dt} &= c(t) g(t), \end{aligned}$$

voor zekere positieve constante  $a$ . Dit heet het groeimodel van Gompertz. Het stelsel van differentiaalvergelijkingen voor  $g$  en  $c$  is te herschrijven tot één vergelijking:

$$\frac{dg}{dt} = a g(t) (b - \ln(g(t))),$$

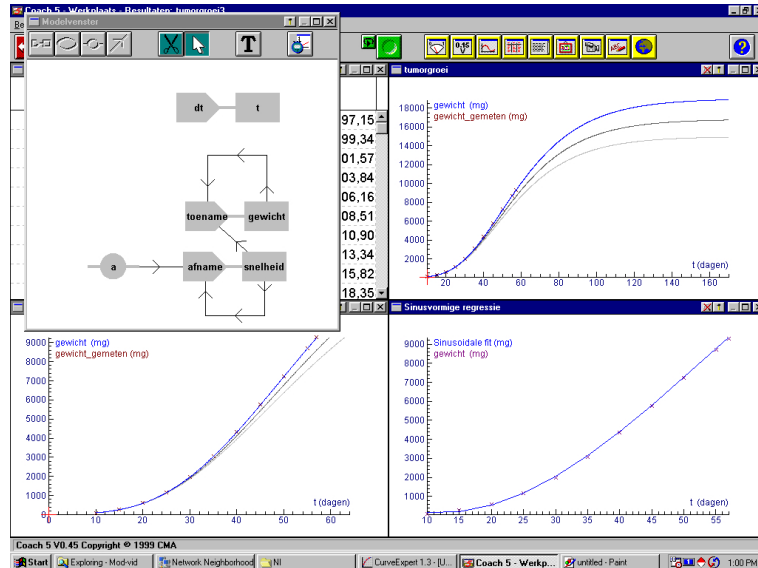
voor zekere positieve constante  $b$ . In deze vorm komen gelijkheid en verschil met het Verhulst model goed tot uitdrukking. Ook het model van Gompertz voor geremde groei kan exact opgelost worden:

$$g(t) = \exp(b - e^{k-at}),$$

voor zekere positieve constante  $k$ . Voor groei volgens het Gompertz model geldt dat  $g$  nadert tot  $e^b$  als  $t \rightarrow \infty$ .

Een leerling hoeft dan wel niet zelf de exacte oplossingen van bovenstaande differentiaalvergelijkingen te kunnen bepalen, controle op correctheid van de gegeven oplossingen en interpretatie van de parameters hoor wel tot de eisen die te stellen zijn. En laten we ook eerlijk zijn: de meeste differentiaalvergelijkingen die je in praktijk tegen komt zijn niet analytisch oplosbaar, maar kunnen slechts numeriek aangepakt worden. Als zo'n numerieke aanpak in de wiskundige software beschikbaar is, dan breidt dit de mogelijkheden voor wiskundig onderzoek door scholieren enorm uit. De techniek van het oplossen van differentiaalvergelijkingen hoeven ze niet eerst meester te zijn voordat ze met interessante toepassingen kunnen beginnen.

We passen het model van Gompertz toe op de groei van de C3H tumor. De groeigegevens ontleen we aan [2] en referenties hierin. Maar voor we dit gaan doen, gebruiken we de gegevens om het verschil tussen empirisch en theoretisch modelleren toe te lichten. In het diagramvenster rechtsonder in figuur 6 is de grafiek van de beste sinusvormige benadering (bepaald met de **functie-fit** faciliteit van Coach). Het resultaat is mooi, maar elke kankerpatiënt zou wensen dat het in overeenstemming met de werkelijkheid is. Wat ontbreekt aan deze regressiekromme is de motivatie voor de keuze van formule. We hadden net zo goed een 4e-graads veelterm kunnen nemen en een nog mooiere overeenstemming gekregen hebben. Bij regressie geven alleen de som van kwadraten van afwijkingen, de correlatiecoëfficiënt en de spreiding van residuen een aanwijzing voor toepasbaarheid van een gekozen model. Bij theoretisch modelleren is juist de onderbouwing van een gekozen model startpunt van het verdere werk.



FIGUUR 6. Modelleromgeving ingezet bij het Gompertz model.

Het modelleren op de computer kent twee fasen in de implementatie van het wiskundig model: het specificeren van het wiskundige model en het onderzoeken van het model. Om met het eerste te beginnen: er bestaat een grafisch interface om het model kwalitatief te beschrijven (linksboven in figuur 6). Hierin geef je op welke grootheden in het wiskundige model een rol spelen (met onderscheid tussen parameters en toestandsvariabelen), hoe ze van elkaar afhangen, welke formules voor grootheden precies gebruikt worden en welke waarden de constanten hebben.

Het grafische model wordt automatisch vertaald naar een stel vergelijkingen die gebruikt worden in een computersimulatie van het model. Ook kun je vergelijkingen, startwaarden van toestandsgrootheden en waarden van constanten via een vergelijkingsgeoriënteerd interface intoetsen. Het ingevoerde model kan vervolgens worden doorgerekend. Resultaten kun je in een tabel of diagram weergeven en direct vergelijken met de echte data. In bovenstaande schermafbeelding zijn grafieken getekend voor verschillende waarden van  $a$  in het model van Gompertz, toegepast op de tumorgroei. Op deze manier kan het effect van wijzigen van een parameterwaarde eenvoudig onderzocht worden en zijn geschikte waarden van parameters proefondervindelijk op te sporen.

Wiskundige modellen maak je ook om de invloed van wijzigingen in condities op het verloop van een proces te bestuderen. Een voorbeeld: stel dat met chemotherapie begonnen wordt of een deel van het gezwel verwijderd wordt, wat is dan het effect op de groei van de tumor? Zo'n verandering van condities kan ook een verandering of uitbreiding van het model tot gevolg hebben. Bijvoorbeeld, chemotherapie leidt tot de volgende verandering van het rechterlid van de differentiaalvergelijking van Gompertz:

$$\frac{dg}{dt} = a g(t) \left( b - \ln(g(t)) \right) - r g(t) C(t),$$

waarbij  $r$  een positieve constante is en  $C(t)$  de concentratie van het chemotherapeutikum op tijdstip  $t$  is (zie [2]). Ook een dergelijke verandering in het wiskundige model is in Coach gemakkelijk aan te brengen en uit te werken.

## 6. MAAK EEN FORMULE VOOR DE GEMIDDELDE LENGTE VAN JONGENS

Lengtegroei van jongens en meisjes kom je op verschillende plaatsen in een wiskundeboek tegen. Bij de behandeling van

- veranderingsbegrippen zoals toenamendiagram, differentiequotient en helling.
- statistische begrippen als normale verdeling, gemiddelde, mediaan en percentielen.
- discrete en dynamische modellen van groei.

Bij nadere beschouwing van de vragen en opdrachten krom je echter regelmatig je tenen. Zo kun je een vraagstuk tegenkomen waarin een 15-jarige jongen

van 175 cm lengte klein van stuk genoemd wordt, terwijl dit volgens de jongste Nederlandse groeicijfers boven het landelijke gemiddelde ligt. Een andere tekst voert een jongen ten tonele die op twaalfjarige leeftijd 115 cm lang is en een eindlengte van 191 cm bereikt. Kennelijk heeft deze jongen stiekem een behandeling met groeihormonen ondergaan! Immers, op jonge leeftijd was zijn lengte extreem klein (ruim 40 cm onder de gemiddelde lengte van leeftijdgenoten) en ver onder indicatie voor verwijzing naar een kinderarts, maar zijn eindlengte komt ruim boven het landelijke gemiddelde van 184 cm uit. Een schoolvoorbeeld van wat je vaker tegenkomt in wiskundeteksten: een verzonnen context, voorgeschoteld als reële context, maar alleen bedoeld als omlijsting of als ‘ideale’ illustratie van een wiskundig begrip.

Het veel gehoorde argument dat echte gegevens te weerbarstig zijn om succesvol mee te kunnen werken gaat kennelijk niet meer op in een praktische opdracht om de lengtegroei van jongens en meisjes te onderzoeken. Deze opdracht staat ook letterlijk in hedendaagse tekstboeken. Verwachten de opstellers van zo’n opdracht dat leerlingen dan ineens wel met weerbarstigheid van echte data overweg kunnen? Of gaan ze op voorhand uit van weinig wiskundige diepgang bij onderzoek door leerlingen? Dit laatste is amper voor te stellen.

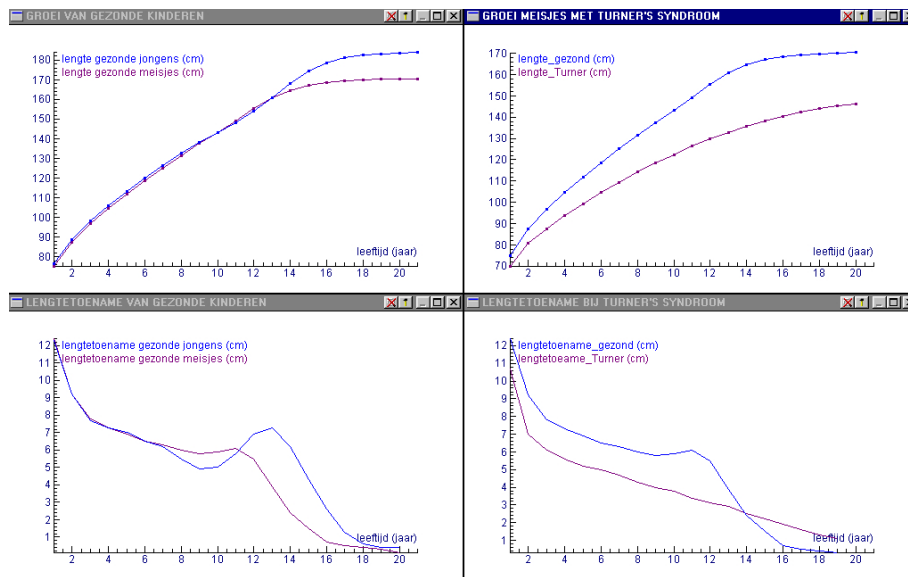
In onderstaand voorbeeld hopen we aan te tonen dat een doordachte aanpak, waarin de docent de leerling tijdens de onderzoeksopdracht begeleidt, en voldoende inzet van ICT-hulpmiddelen het werken met echte gegevens heel goed mogelijk maakt en tot interessante resultaten kan leiden. Met name aan de rol van ICT in het doen van wiskunde zullen we aandacht besteden in onze studie van lengtegroei van Nederlandse jongens.

ICT wordt om te beginnen gezien als hulp bij het verkrijgen van informatie, bijvoorbeeld op Internet en CD-rom. Klopt, maar als het gaat om het vinden van recente Nederlandse groeicijfers, dan kom je van de koude kermis thuis. Deze cijfers zijn uit commerciële motieven niet on-line beschikbaar. Je komt dus als leerling niet eens toe aan de vraag of gevonden gegevens wel geschikt zijn voor je onderzoek. En dit is nu juist de enige wiskundige waarde van zoeken naar informatie op Internet. Amerikaanse groeicijfers zijn daarentegen wel snel te vinden op Internet, maar deze zochten we hoogstens ter vergelijking met de Nederlandse situatie. De Nederlandse overheid zal het beschikbaar stellen van cijfermateriaal moeten stimuleren wil Internet de rol van informatiebron in Tweede Fase-onderwijs goed kunnen waarmaken.

Wat je overigens wel op Internet kunt vinden is een uitgebreid artikel uit de wetenschapsbijlage van NRC Handelsblad van 4 maart 2000 dat gaat over de meest recente landelijke groeistudie. Het is een mooie tekst als introductie op het onderwerp. Deze tekst en het wetenschappelijke artikel [8] dat de aanleiding tot het kranteartikel vormde en waarin precieze groeicijfers staan kunnen eigenlijk net zo goed in papiervorm aan de leerling gegeven worden. U kijkt er misschien van op, maar het is helemaal niet zo raar om het wetenschappelijke artikel in handen van scholieren te geven. Bij lezing blijkt het qua wiskunde helemaal niet zo ver weg te staan van wat er op school aan theorie behandeld wordt. Op deze manier krijgt een leerling ook een beeld van hedendaags onderzoek en verslaglegging.



Een tweede rol van ICT in exacte vakken, nl. verwerking van meetgegevens, komt in de volgende fase van het project aan bod: als je de groeicijfers eenmaal in handen hebt, dan moet je deze gemakkelijk in een computerprogramma kunnen invoeren voor grafische presentatie en verdere wiskundige behandeling. Importeren van gegevens in database- of spreadsheet-formaat is nuttig voor snelle verzameling van bestaande gegevens. Om verschillen in gemiddelde lengtegroei tussen jongens en meisjes te kunnen ontdekken moet je beide grafieken in een voldoende groot beeldscherm in beeld kunnen brengen samen met toenamendiagrammen.



FIGUUR 7. Gemiddelde lengte en lengtetoename van jongens en meisjes.

De grafieken aan de linkerkant in figuur 7 hebben betrekking op de lengtegroei bij doorsnee-kinderen. Wat in de toenamendiagrammen onmiddellijk opvalt is de groeispurt in de pubertijd en dat deze bij jongens later optreedt dan bij meisjes. Maar het is ook leerzaam te kijken naar groeidiagrammen van kinderen met groeistoornissen. In figuur 7 staan aan de rechterkant de groeidiagrammen en toenamendiagrammen getekend van gezonde meisjes en van meisjes met het syndroom van Turner. Twee symptomen van Turner's syndroom zijn in de grafieken terug te vinden: trage groei en het ontbreken van de pubertaire groeispurt. Niet-wiskundige informatie over het syndroom van Turner en andere groeistoornissen kun je vinden op de website van de Belangenvereniging Van Kleine Mensen ([www.bvkm.nl](http://www.bvkm.nl)). Bij meisjes met het syndroom van Turner neemt na het vierde levensjaar de lengtetoename nagenoeg lineair in de tijd af. Anders gezegd, vanaf deze leeftijd kun je de gemiddelde lengte wiskundig beschrijven met een parabool. Hier merk je dat enige kennis van

de relatie tussen de vorm van de afgeleide en de vorm van de oorspronkelijke functie van nut is. Bij lineaire regressie met een parabool krijg je afwijkingen van minder dan 1 mm tussen de regressiekromme en de echte gegevens voor meisjes met het syndroom van Turner. Wie durft nog te zeggen dat het werken met echte gegevens zo lastig is binnen wiskunde? Het lijkt meer een kwestie van geschikte toepassingen zoeken.

In het vervolg kijken we alleen nog maar naar de gemiddelde lengtegroei van Nederlandse jongens. Het zelf bedenken van een wiskundig model gaat veel te ver en is waarschijnlijk tot mislukken gedoemd. Maar het uitproberen van een algemeen aanvaard en veelgebruikt model in de kindergeneeskunde hoort wel tot de mogelijkheden. We behandelen hier het zogenaamde KKP-model (zie [13]). In dit wiskundige model worden drie componenten gebruikt die elk met een groeifase geassocieerd zijn:

1. *Kleutertijd* (0-3 jaar): geremde groei, waarbij lengtetoeename vanaf de geboorte exponentieel afneemt. De bijpassende formule is:

$$L_1 = a_1 - b_1 e^{-c_1 t}.$$

2. *Kindertijd*: lengtetoeename neemt lineair af (denk terug aan de groei van meisjes met Turner's syndroom) en leidt tot de volgende formule:

$$L_2 = a_2 t^2 + b_2 t + c_2.$$

3. *Pubertijd*: logistische groei voor de bijdrage van de pubertijdspurt aan de lengte, met als formule:

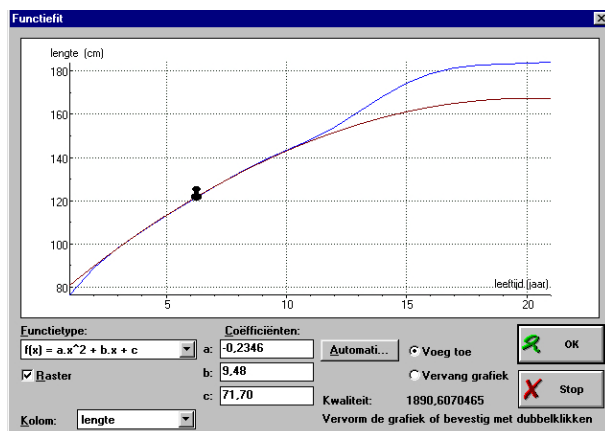
$$L_3 = \frac{a_3}{1 + e^{c_3 - b_3 t}}.$$

Hierbij zijn  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$  en  $c_3$  parameters met positieve waarden, die op basis van de groeicijfers bepaald worden. De gemiddelde lengte  $L$  wordt op elke leeftijd gegeven door de som  $L_1 + L_2 + L_3$ .

Hoe gaan we met dit model aan de slag? Omdat de component voor de kindertijd het enige onderdeel met niet-geremde groei is en we toch een realistische formule willen vinden voor lengtegroei van 0 tot 21 jaar is het verstandig hiermee te beginnen. We zoeken een bergparabool die enerzijds de groei tussen het 3e en 10e levensjaar aardig beschrijft en anderzijds zijn maximum bereikt rondom de leeftijd van 20 jaar. De kleinste kwadratenmethode werkt in dit geval niet; we selecteren dan maar handmatig en op het oog een geschikte bergparabool. In onderstaande schermafdruck (figuur 8) zie je onze keuze van

$$lengte = -0,235 \text{ leeftijd}^2 + 9,5 \text{ leeftijd} + 71,7.$$

De punaise in de schermafdruck geeft aan dat we op die plaats de benadering vastgepind hebben. Door een ander punt op de parabool met de muis te verslepen is een andere tweedegraads kromme te maken. Als je de punaise door dubbelklikken losmaakt, kun je de parabool transleren. Op deze manier kun



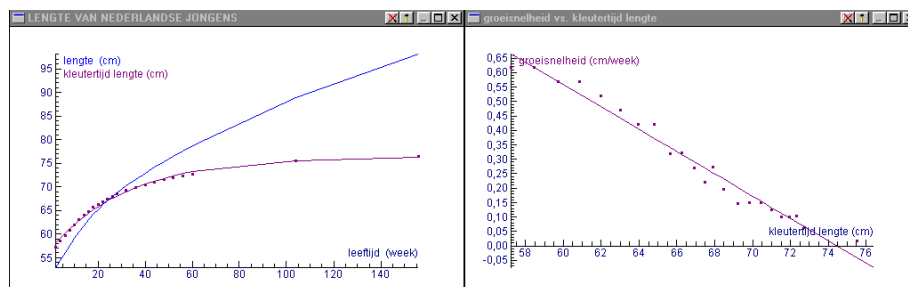
FIGUUR 8. Handmatige bepaling van de kromme voor groei in kinderperiode

je in Coach op eenvoudige wijze met de muis in de hand een kromme van een voorgeschreven vorm construeren.

We verschuiven deze parabool in verticale richting zodanig dat een positieve bijdrage aan de totale lichaamslengte optreedt vanaf de leeftijd van 6 maanden. Kortom, we nemen als formule:

$$L_2 = -0,235t^2 + 9,5t - 4,7.$$

We trekken vervolgens deze bijdrage af van de groeicijfers voor lengtegroei in de eerste drie levensjaren. We krijgen zo aangepaste cijfers voor de lengte in de kleuterperiode. We veronderstellen geremde groei met een lineair afnemende groeisnelheid. Hoe goed of slecht dit model is merk je als je de groeisnelheid uitzet tegen de lengte. In het diagramvenster rechts in figuur 9 is de beste rechte lijn volgens de kleinste kwadratenmethode bij de punten getekend.



FIGUUR 9. Lengtegroei in de kleuterperiode

Links staan de grafieken van de oorspronkelijke groeicijfers in de kleuterperiode en de aangepaste cijfers, samen met de handmatig bepaalde kromme met formule

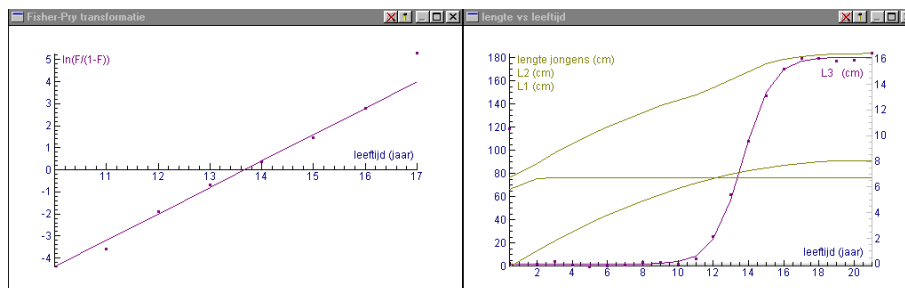
$$L_1 = 76,4 - 19,4e^{-0,03t},$$

waarbij de leeftijd  $t$  in weken gegeven is.

Komen we tenslotte bij de bijdrage van de pubertijdspurt. We trekken eerst de bijdragen  $L_1$  en  $L_2$  af van de gegeven groeicijfers en krijgen zo de bijdrage van de pubertijdspurt aan de lengte, genoteerd met  $L_3$ . Zoals in figuur 10 te zien is, lijkt de grafiek van  $L_3$  inderdaad op een logistische kromme. Met een trial-and-error methode kun je geschikte waarden vinden voor de parameters in de formule van een logistische kromme. Rechts in figuur 10 is de grafiek getekend van

$$L_3 = \frac{16,1}{1 + e^{16,4-1,2t}}.$$

De overeenstemming met de getekende punten, afkomstig van de echte groeicijfers uit 1997, is frappant.



FIGUUR 10. Bijdrage van de pubertijdspurt aan de lengte

Bij een wiskundig model moet je jezelf altijd afvragen hoe goed of slecht het functioneert. Hoe goed het logistisch model voor de derde component van het KKP-model werkt is in het linkerdeel van figuur 10 te zien. Hier is de Fisher-Pry transformatie van de gegevens uitgezet tegen de leeftijd in de periode van 10 tot 17 jaar. De Fisher-Pry transformatie van gegevens die gemodelleerd worden via een logistische model met formule

$$L(t) = \frac{a}{1 + e^{c-bt}}$$

is gedefinieerd als

$$\ln\left(\frac{F}{1-F}\right),$$

met  $F = L/a$ . Er geldt nu een lineair verband:

$$\ln\left(\frac{F}{1-F}\right) = bt - c.$$

Dit is ook de basisgedachte achter de Fisher-Pry transformatie: als het logistische groeimodel goed functioneert, dan moet een lineair verband herkenbaar zijn. De parameters  $b$  en  $c$  zijn dan via lineaire regressie te bepalen. Je ziet het omzetten van gegevens naar een andere vorm, waarin modelparameters zich gemakkelijker laten schatten en waarin de deugdelijkheid van een model beter aan het licht komt, vaak terug bij wiskundig modelleren. In het diagramvenster links in figuur 10 hebben we als waarde voor  $a$  gekozen 16,1 en de gegevens na de Fisher-Pry transformatie getekend samen de rechte lijn horende bij de formule  $16,4 - 1,2t$ . De gevonden parameterwaarden geven aan dat de maximale lengtetoeename tijdens de pubertaire groeispurt van jongens gemiddeld op de leeftijd van 13 jaar en 8 maanden optreedt (16,4/1,2).

We hebben hier een trial-and-error methode gebruikt om de logistische groeiparameters te schatten. De waarden van de parameters hadden ook m.b.v. de modelleromgeving van Coach bepaald kunnen worden. Elk van deze methoden heeft zijn charme; de  $\beta$ -tool moet dan ook beide technieken beschikbaar hebben.

De opdracht wordt natuurlijk interessanter als je ook de gemiddelde lengte van Nederlandse meisjes met het KKP-model bestudeert. Je vindt dan een pubertaire groeispurt met maximale lengtetoeename gemiddeld op de leeftijd van 11 jaar en 4 maanden en een bijdrage aan de volwassen lengte van 8,7 cm (bijna de helft van de 16,1 cm bij jongens). Je vindt zo een getalsmatige onderbouwing van het gegeven dat meisjes eerder in de pubertijd geraken en ook eerder de bijpassende groeispurt doormaken.

Denk niet dat het KKP-model het enige succesvolle wiskundige model voor lengtegroei van jongens en meisjes is. In de literatuur (zie [7]) zijn diverse andere modellen te vinden. Twee gangbare modellen met respectievelijk 9 en 7 parameters zijn:

- Het trilogistische model van Bock en Thissen [3], dat de volgende formule voor lengtegroei  $L$  hanteert:

$$L(t) = \frac{\theta_1}{1 + \exp(\frac{\theta_2 - t}{\theta_3})} + \theta_9 \left( \frac{1 - \theta_8}{1 + \exp(\frac{\theta_4 - t}{\theta_5})} + \frac{\theta_8}{1 + \exp(\frac{\theta_6 - t}{\theta_7})} \right).$$

- Het JPPS-model [12], met als formule:

$$L(t) = \theta_1 \left( 1 - \frac{1}{1 + (t/\theta_2)^{\theta_3} + (t/\theta_4)^{\theta_5} + (t/\theta_6)^{\theta_7}} \right).$$

Wil je deze modellen kunnen toepassen dan moet je wel de beschikking hebben over een rekenprogramma dat niet-lineaire regressie toestaat en kennis of

ervaring hebben in het schatten van beginwaarden van parameters. Het trilogistische model, toegepast op de gemiddelde lengte van Nederlandse jongens, levert als benadering op:

$$L(t) = \frac{48,1}{1 + e^{-2,29(t+0,09)}} + \frac{101,5}{1 + e^{-0,33(t-3,23)}} + \frac{34,9}{1 + e^{-0,71(t-13,32)}}$$

Afwijkingen met de echte groeicijfers zijn tussen 0 en 21 jaar minder dan 1 cm. Belangrijkste oorzaak van de tamelijk grote afwijkingen is dat de groei in het eerste levensjaar er niet zo goed mee beschreven wordt. Laat je deze periode weg en pas je het model toe op de groei tussen 1 en 21 jaar dan benaderen de resultaten de echte groeicijfers tot op een millimeter. Hetzelfde geldt voor het JPPS-model: de beste formule voor lengte tussen 1 en 21 jaar is

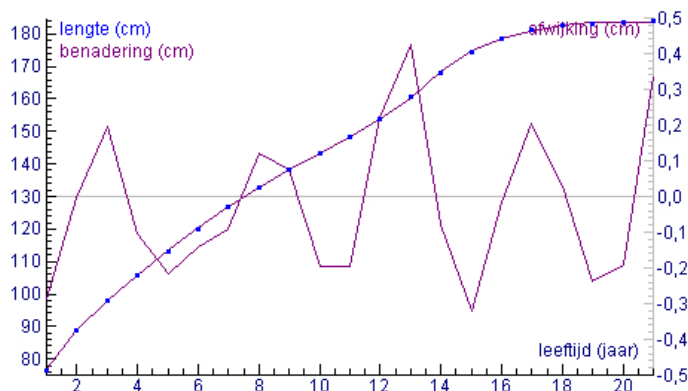
$$L(t) = 184,0 \left( 1 - \frac{1}{1 + (t/12,45)^{13,18} + (t/7,43)^{2,27} + (t/2,91)^{0,33}} \right)$$

en wijkt minder dan 2 mm af van de echte groeigegevens.

Wij kunnen tevreden zijn met het resultaat van het KKP-model. In figuur 11 zijn de bijdragen aan de lengte van de drie componenten bij elkaar opgeteld en samen met de echte groeigegevens getekend. De afwijking tussen de echte en berekende lengtes zijn minder dan een halve centimeter over de hele periode van geboorte tot volwassen lengte. En dit met de betrekkelijk eenvoudige formule

$$L(t) = -19,4e^{-1,56t} - 0,235t^2 + 9,5t + 71,7 + \frac{16,1}{1 + e^{16,4-1,2t}},$$

die helemaal opgebouwd is uit drie op school behandelde wiskundige modellen.



FIGUUR 11. KKP-model voor gemiddelde lengte van Nederlandse jongens

We besluiten met nog wat verdere onderzoeksvragen die je in een project over menselijke groei aan de orde kunt stellen:

- Hoe verloopt de toename in gewicht bij jongens en meisjes vanaf de geboorte tot vroegvolwassen leeftijd? Kun je dit met een eenvoudig wiskundig model beschrijven?
- Welke veranderingen in de ontwikkeling van kinderen van de ene generatie naar de andere kun je halen uit de groeicijfers van de landelijke groeistudies van 1980 en 1997? Klopt het dat Nederlanders gemiddeld langer en dikker worden?
- Welke verschillen zijn er in lengte, gewicht en Quetelet index tussen Amerikaanse en Nederlandse kinderen?

Antwoorden op bovenstaande onderzoeksvragen heeft de auteur zelf met Coach achterhaald.

## 7. CRITERIA VOOR DE $\beta$ -TOOL

Mede op basis van ervaringen opgedaan met het gebruik van Coach in zetten we een aantal criteria waaraan de  $\beta$ -tool dient te voldoen op een rijtje. Dit lijstje maakt duidelijk hoe complex het maken van een bètabreed inzetbare leeromgeving is en dat de  $\beta$ -tool niet in één nacht gebouwd kan worden.

*Gebruiksvriendelijkheid* is een voor de hand liggend criterium van hulpmiddelen in en buiten onderwijs, maar omdat een bètabreed pakket heel veel faciliteiten moet bieden, zijn een heldere opzet en goede hulpfaciliteiten nog belangrijker. Het organiseren van werk en veranderen van representaties moet soepel gaan. Naar hartelust moet je met verschillende, al dan niet gekoppelde, representaties kunnen werken en deze tegelijkertijd in beeld kunnen brengen.

Het *instrumentele en activerende karakter* van de  $\beta$ -tool is essentieel. Dit betekent dat het in eerste instantie een toegankelijk, krachtig en ‘neutraal’ stuk gereedschap vormt, dat vrij is van didactische contexten of opvattingen. Dit laatste betekent niet dat de software niet speciaal ontworpen is om binnen een onderwijssituatie dienst te doen of dat het constructivistische principe van actief en zelfstandig leren niet ondersteund wordt.

*Profielbreed gebruik* van de software is uitgangspunt. Dit vereist dat de computer zowel voor vergaren van gegevens (via een echt experiment of video-meting) als voor het wiskundig verwerken van data en modelleren gebruikt wordt. En dit alles binnen één leeromgeving.

*Studiehuis-geschiktheid* van de leeromgeving impliceert dat deze de leerlingen ondersteunt in het maken van grotere opdrachten en werkstukken. Daarnaast biedt de  $\beta$ -tool de docent de mogelijkheid om een lesonderwerp toe te lichten, uit te leggen of van een demonstratieve proef te voorzien en zijn er faciliteiten om leerlingen (op afstand) te begeleiden. Dit pleit ook voor een softwarematige leeromgeving, omdat werken door leerling en docent niet meer gekoppeld is aan een bepaalde werkruimte. Werken en leren kan plaatsvinden in vak- en computerlokaal, laboratorium, bibliotheek of thuis.

Het *open karakter* van de leeromgeving komt nog meer naar voren als er open problemen mee bestudeerd worden. Er is geen voorkeursmethode of strategie op de achtergrond aanwezig. De gebruiker bepaalt in hoge mate zelf wat er gedaan wordt, waarom en hoe.

*Aanpasbaarheid* van de leeromgeving staat ook hoog in het vaandel. Het is mogelijk om met verschillende leerbronnen binnen de omgeving te werken. Deze zijn door docenten en auteurs van leermiddelen van tevoren klaar te zetten en zijn op het niveau van leerlingen aan te passen. Deze bronnen moeten ruim worden opgevat: het kunnen bestaande proeven zijn, teksten, video's, opdrachten en vragen, enzovoort.

De behoefte aan een *gemeenschappelijke werkplaats* voor leraren en leerlingen is met de veranderende visie over de rol van de docent groter geworden. Niet alleen het ontwerpen van leersituaties, maar ook het (op afstand) kunnen volgen en aansturen van het leerproces en het kunnen beoordelen van leerlingewerk dient ondersteund te zijn.

*Koppeling met andere software* is en blijft nodig, al is het maar om resultaten te transporteren naar verslagen, die opgemaakt worden met een favoriete tekstverwerker, om uitwisseling met presentatie-software te hebben of om gegevens uit bestaande databestanden te importeren.

*Aantrekkelijkheid* van de leeromgeving wordt mede bepaald door de mogelijkheden die deze biedt om in exacte vakken leerlingen realistische problemen uit hun eigen leefwereld te laten bestuderen. Wiskundige gereedschappen zoals de regressie-tool en de modelleromgeving zorgen ervoor dat een leerling hiervoor niet eerst de algoritmische vaardigheden hoeft te verwerven. Hierdoor wordt de wiskunde aantrekkelijk, heel concreet, direct verifieerbaar en illustreerbaar: mooie grafieken en krommen, interessante resultaten uit simulaties, enzovoort.

## 8. TOT SLOT

Het AMSTEL instituut wil de opvolger van Coach, de  $\beta$ -tool, net als voorheen ontwikkelen in samenwerking met allen die zich betrokken voelen bij onderwijs in exacte vakken. In het bijzonder wiskundeleraren worden uitdrukkelijk uitgenodigd mee te denken en mee te bouwen aan de nieuwe leeromgeving plus lesmaterialen.

Wat het laatste betreft: hopelijk put u inspiratie uit de voorbeelden in dit artikel en wordt u erdoor aangemoedigd om zelf de mogelijkheden van Coach bij wiskunde te gaan bekijken. Belangrijk hierbij is te weten dat de software reeds op de meeste scholen aanwezig is en dat het pakket op een PC met bescheiden geheugen en schijfruimte gebruikt kan worden. U kunt dus direct aan de slag. Meer informatie over software, hardware, toe- passingen en lesmateriaal kunt u vinden op de website [www.cma.science.uva.nl](http://www.cma.science.uva.nl).



## REFERENTIES

1. Armenti, Jr. A. (red) *The Physics of Sports*. Springer-Verlag, New York, 1992.
2. Aroesty, J. *et al.* Tumor growth and chemotherapy: Mathematical models, computer simulations, and experimental foundations. *Math. Biosciences*, 17: 243-300, 1973.
3. Bock, R.D. & Thissen, D.M. Fitting multicomponent models for growth in stature. In *Proceedings of the Ninth International Biometric Conference, Boston, August 22-27, 1976*, pp. 431-442, The Biometric Society, Raleigh, North Carolina.
4. Causton, D.R. & Venus, J.C. *The Biometry of Plant Growth*. Edward Arnold, London, 1981.
5. Craats van de, J. Hoe hangt een ketting? *Nieuwe Wiskrant* 19(1): 32-36, 1999.
6. Ellermeyer, T. & Mulder, C. IP-Coach: een succesvolle leeromgeving voor de natuurwetenschappelijke vakken en techniek. *TINFON* 7(4): 131-134, 1998.
7. Falkner, F. & Tanner, J.M. (red) *Human growth: a comprehensive treatise. Vol. 3*. Plenum Press, New York, 2nd edition, 1986.
8. Fredriks, A.M., *et al.* Continuing Positive Secular Growth Change in the Netherlands 1955-1997. *Pediatric Research*, 47 (3): 316-323, 2000.
9. Greef de, K.M. *Prediction of production: nutrition induced tissue partitioning in growing pigs*. Proefschrift, Universiteit Wageningen, 1992.
10. Gyllenberg, M. & Webb, G.F. Quiescence as an Explanation of Gompertzian Tumor Growth. *Growth, Development and Aging*, 53: 25-33, 1989.
11. Heck, A. Coach:  $\beta$ -tool in spe en nu al inzetbaar bij wiskunde. *Nieuwe Wiskrant*, 19(4): 36-42, 2000.
12. Jolicoeur, P., Pontier, J., Pernin, M.-O., Sempé, M. A lifetime asymptotic growth curve for human height. *Biometrics*, 44: 995-1003, 1988.
13. Karlberg, J. *et al.* Linear growth retardation in relation to the three phases of growth. In *Causes and Mechanisms of Linear Growth Retardation*. Waterlow, J.C. & Schürch, B. (red), Proceedings I/D/E/G/C Workshop, London, U.K., 1993. Op 14 juni 2000 elektronisch beschikbaar op URL [www.unu.edu/unupress/food2/uid06e/uid06e00.htm](http://www.unu.edu/unupress/food2/uid06e/uid06e00.htm)
14. Mulder, C. *Computer-based Investigation in Physics*. Proefschrift, Universiteit van Amsterdam (in voorbereiding), 2000.
15. Townend, M.S. *Mathematics in Sport*. Ellis Horwood Limited, Chichester, 1984.
16. Wit, J.M (red) *De vierde landelijke groeistudie*, Boerhave Commissie, Leiden, 1998.