Modelleren van een wachtrij

We gebruiken eerst de grafische modelomgeving van Coach 6 voor het modelleren en simuleren van een wachtrij als Markovketen. Daarna converteren we het grafische model naar een tekstgebaseerd model om het uit te breiden tot een programma waarmee een groot aantal simulaties uitgevoerd kan worden. In de analyse van de resultaten is een grafische weergave met behulp van een histogram nuttig. Dit wiskundige voorbeeld illustreert mooi de reikwijdte van de geïntegreerde leer- en werkomgeving Coach.

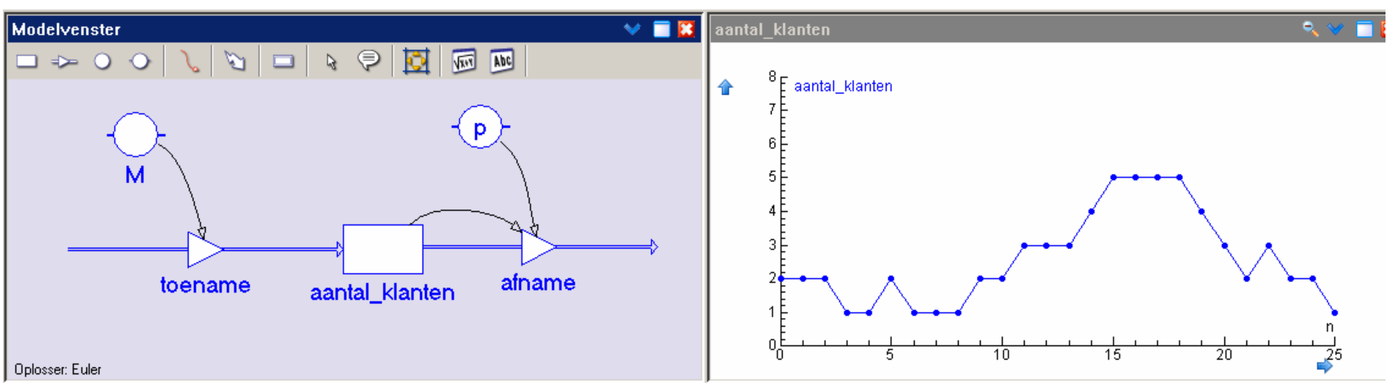
Wachtrij: voorbeeld van een Markovketen

We bekijken een eenvoudige wachttijdketen, ook wel wachtrij genoemd. Dit is een Markovketen (X) met waardenverzameling {0,1,2,3,…}, waarin X_n het aantal klanten voorstelt dat op tijdstip *n* in de rij staat. In het tijdsinterval (*n*,*n*+1) komt er een stochastisch aantal nieuwe klanten bij, zeg Y_{n+1}. In elk tijdsinterval is er een kans *p* dat er één klant wordt geholpen, voorzover er klanten zijn natuurlijk, en een kans 1 – *p* dat er geen klanten geholpen worden (personeel moet immers ook wel eens rusten). In formuletaal hebben we:

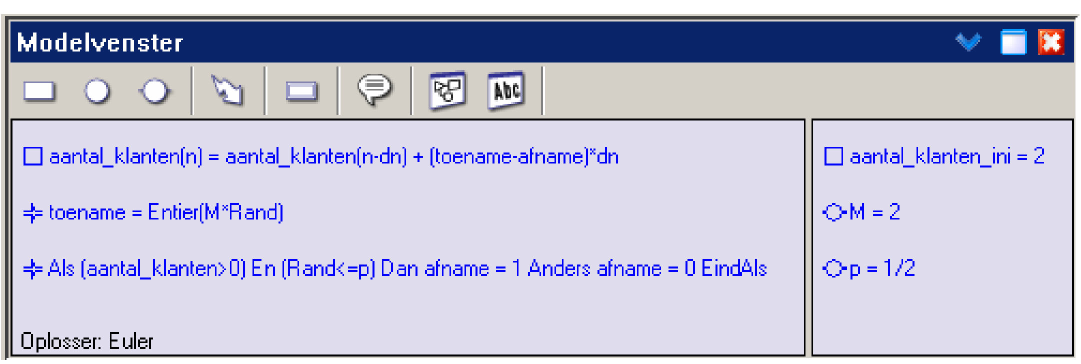
$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - p + Y_{n+1} & \text{als } X_n > 0 \\ Y_{n+1} & \text{als } X_n = 0 \end{cases}$$

De stochasten Y_1, Y_2, … worden onafhankelijk verondersteld en hebben allemaal dezelfde kansverdeling f: $P[Y_n=y] = f(y)$. We bekijken in ons voorbeeld alleen een eindige situatie en een uniforme verdeling: $f(0) = f(1) = \ldots = f(M-1) = 1/M$, voor vast gekozen natuurlijk getal *M*. De parameters waarmee we in ons model kunnen spelen zijn dus de kans op afhandeling van een klant (*p*) en het maximale aantal klanten dat er tegelijk bij kan komen (*M*–1) in de rij. Figuur 1 laat zien hoe eenvoudig een simulatie van een dergelijke wachtrij te maken is in de grafische modelomgeving. In ons rekenvoorbeeld hebben we *p* = 1/2 en *M* = 2 gekozen en zijn we uitgegaan van een wachtrij waarbij aan het begin al 2 klanten staan.

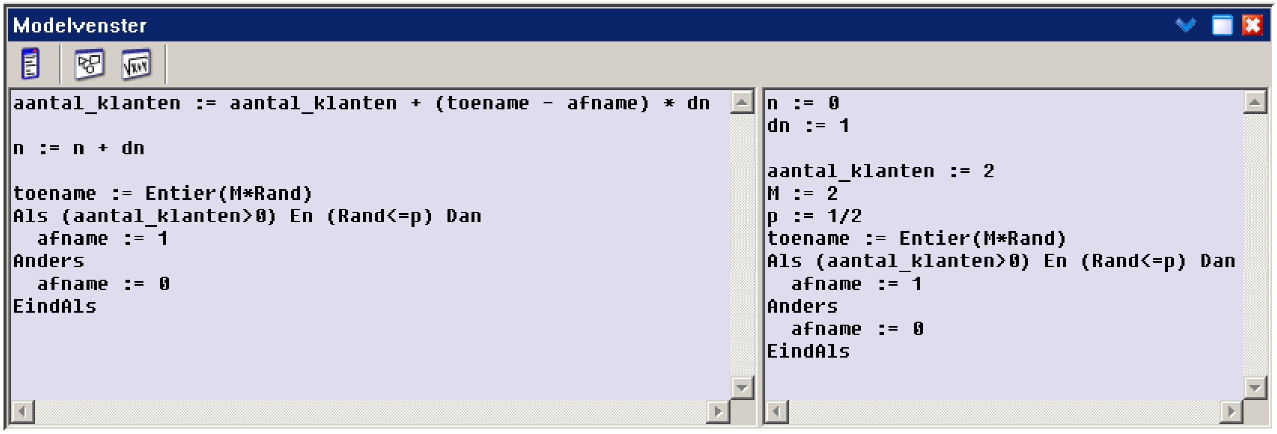
Het grafische scherm is niet erg informatief, maar hoe het model werkt wordt duidelijker als de formules in beeld zijn. Figuur 2 toont het model in vergelijkingen-modus. De precieze details zijn alleen zichtbaar in tekst-modus (Figuur 3)



Figuur 1. Grafisch model en simulatie van een wachtrij.



Figuur 2. Wachtrijmodel in vergelijkingen-modus.



Figuur 3. Een tekstgebaseerd wachtrijmodel.

Statistische analyse

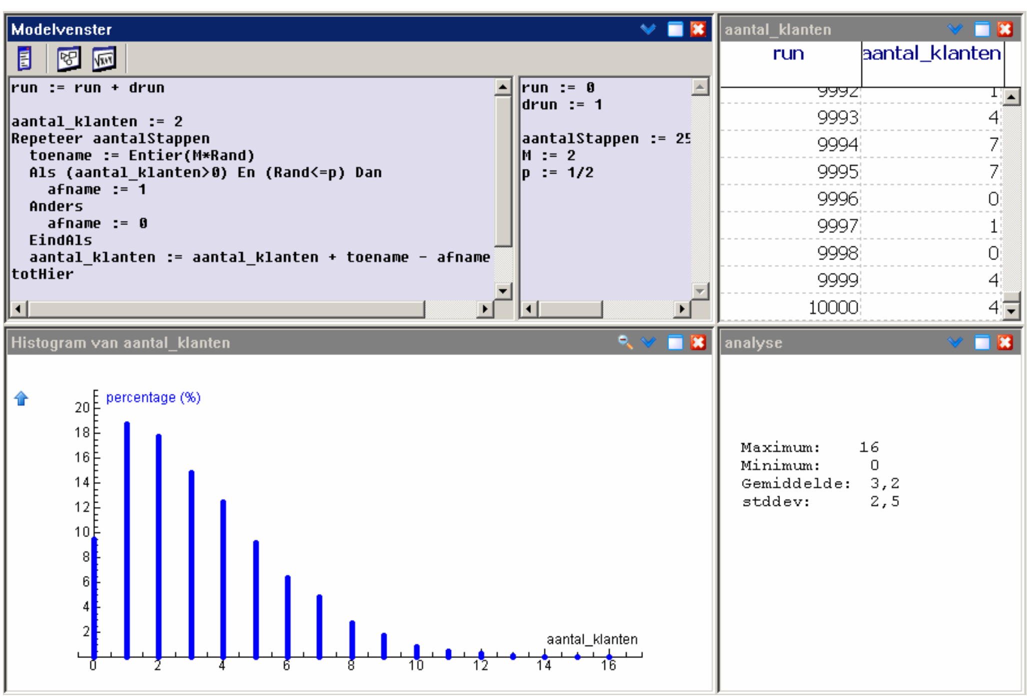
Deze tekst-modus kan ook gebruikt worden om een groot aantal runs achter elkaar te doen en de resultaten statistisch te verwerken. Handig is dat je een groot deel van bovenstaand programma kunt hergebruiken; zie Figuur 4 voor een analyse m.b.v. Coach 6. In Figuur 4 is de computeranalyse voor p = 1/2, M = 2 en een beginaantal van 2 klanten. Het blijkt dat het gemiddelde aantal klanten na 25 tijdstappen in een totaal van 10000 runs ongeveer 3 is met een standaarddeviatie van 2,4. Het histogram met de verdeling van het aantal klanten is ook getekend. Als je start met 25 klanten, dan is het gemiddelde aantal klanten na 25 stappen gelijk aan 25 met standaardafwijking 3,55. Dit resultaat is te verklaren omdat er gemiddeld per 2 tijdstappen 1 klant geholpen wordt en 1 klant erbij komt, mits er maar steeds klanten in de rij blijven staan. Zoals Figuur 5 suggereert is het aantal klanten van 25 tijdstappen normaal verdeeld: de formule voor de fit is gelijk aan

$$f(\text{aantal\_klanten}) = 11,2 \times e^{-\frac{1}{2}\frac{(\text{aantal\_klanten}-25,0)^2}{12,6}}$$

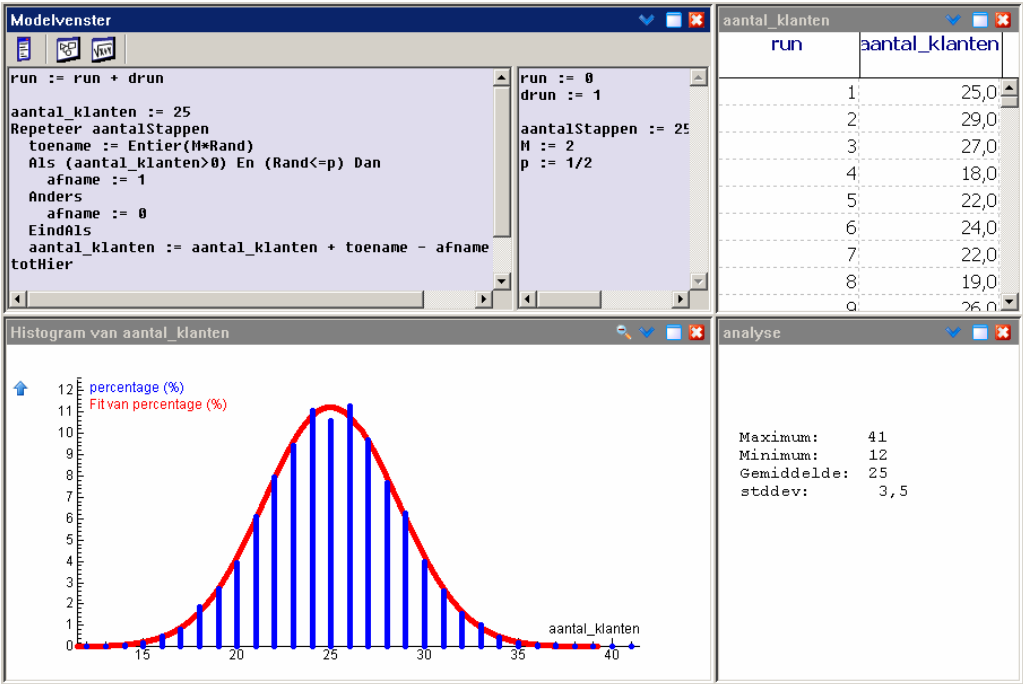
Hieruit rolt ook de standaarddeviatie van 3,55:

$$(3,55)^2 \approx 12,6 \quad \text{en} \quad \frac{100}{3,55\sqrt{2\pi}} \approx 11,2 \ .$$

Het statistische begrip normale verdeling komt zo mooi tevoorschijn in de computeranalyse en is niet voorgekauwd door leraar of lesmateriaal.



Figuur 4. Computeranalyse van het wachtrijmodel in tekst-modus; beginaantal klanten = 2.



Figuur 5. Computeranalyse van het wachtrijmodel in tekst-modus: beginaantal klanten = 25.

André Heck, AMSTEL Instituut, A.J.P.Heck@uva.nl