

In dit artikel beschrijft **André Heck** een modelleerproces van bruggen en bogen met gebruikmaking van ICT.

Modelleren van bruggen en bogen

Aanleiding

Directe aanleiding tot het schrijven van dit stukje is het voorbeeldvraagstuk 4 uit het artikel van Jan Blankespoor in het vorige Wiskunde D themanummer [1]. Hierin licht de cTWO-werkgroep voor toegepaste analyse 2 havo een tipje van de sluier op van de voorgestelde inhoud en illustreert dit aan de hand van vraagstukken. Het voorbeeldvraagstuk 4 is een toepassing van exponentiële functies bij de bestudering van een hangbrug.

Voorbeeldvraagstuk 4: De hangbrug

De vorm van een hangbrug (bijvoorbeeld de Golden Gatebrug bij San Francisco) kan worden voorgesteld door een functie van het type

$$y = f(x) = c(e^{-ax} + e^{ax}).$$

Hierbij zijn a en c constanten, y en x zijn beide in meters uitgedrukt. Voor een hangbrug met een weglengte van 100 meter geldt $c = 2,5$ en $a = 0,05$ waarbij x loopt tussen -50 en $+50$.

- Plot de grafiek van $f(x)$ in een geschikt venster. Bepaal de maximale hoogte van de brug.
- Waar is de brug meer dan 10 m hoog? (laat de computer dit voor je uitrekenen).
- Bepaal de afgeleide van $f(x)$.
- Toon aan dat de brug aan het begin en aan het eind het steilst loopt.
- Vanaf welk punt stijgt $f(x)$ meer dan 25 cm per m?

Wat mij onmiddellijk trof was dat de vorm van de draagkabel tussen de twee pylonen van de brug zonder toelichting gelijkgesteld wordt aan een kettinglijn. In een eerder artikel [2] over beeldrectificatie van digitale foto's en video's heb ik toevallig deze brug als voorbeeld gebruikt en opgemerkt dat uit metingen op de foto blijkt dat de draagkabel prima beschreven kan worden met een dalparabool. Wie heeft er nu gelijk?

Het antwoord op de laatste vraag kan kort zijn: beide auteurs hebben voor het speciale geval van de Golden Gate brug in wiskundig opzicht gelijk, net als een derde persoon die opmerkt dat de vorm een sinusoïde is en een vierde persoon die pleit voor een wiskundige functie van het type $f(x) = c \cdot \ln(1 + a \cdot x^2)$. Omdat de doorhang van de draagkabel niet zo groot is kunnen we veel geparameteriseerde functies kiezen die in de buurt van $x = 0$ bij geschikte parameterkeuzes (dat wil eigenlijk zeggen bij voldoende inzoomen) nagenoeg gelijk aan elkaar zijn. De functie

$$y = \frac{9x^2}{11 - 2x^2}$$

benadert bijvoorbeeld de kettinglijn tussen $(-1,1)$ en $(1,1)$ die door $(0,0)$ gaat met een foutmarge van 0,12%. Uiteraard heeft het simpelste functievoorschrift

vaak de voorkeur, maar wiskundig gezien voldoen meerdere functies. Deze beweringen kunnen we gemakkelijk verifiëren m.b.v. Coach 6 door een digitale foto van deze brug op te meten na correctie voor perspectivische vervorming en daarna regressiekrommen uit te laten rekenen of andere functionele verbanden in kaart te brengen. In Figuur 1 staat links de originele foto en rechts de rectificatie van het vlak gevormd door de rechterkant van de pylonen en de rechterzijde van het wegdek (gezien vanuit de camerapositie). De rechterkabel bevindt zich nagenoeg in dit vlak en wordt door de rectificatie nu wel een kromme die verdacht veel weg heeft van een dalparabool.

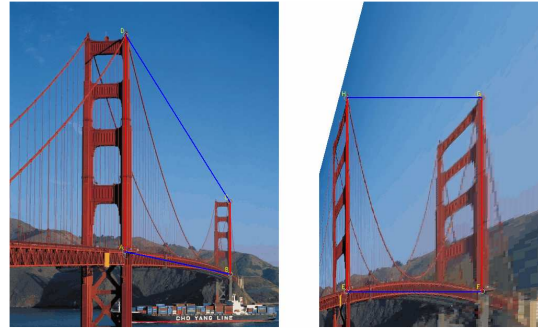


fig. 1 Rectificatie van de Golden Gatebrug

In de gerectificeerde foto is de schaling in horizontale en verticale richting niet gelijk. Dit veroorzaakt de vreemde verhouding van bruglengte en brughoogte. Voor de aard van de kromme die de draagkabel geeft maakt dit niet uit bij de eerder genoemde functionele verbanden.

In Figuur 2 is een schermafdruk te zien waarin de best bij een meting passende parabool van het type $y = a \cdot x^2$ opgespoord wordt door twee parameters op 0 vast te zetten. In tegenstelling tot een grafische rekenmachine kun je in Coach 6 parameterwaarden in een functietype vastklikken. Dit is vooral handig in toepassingen waarin parameters een fysische betekenis hebben (denk aan bijvoorbeeld aan valversnelling).

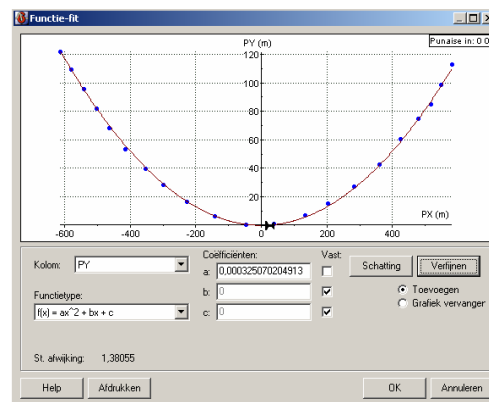


fig. 2 kwadratische regressie in Coach 6

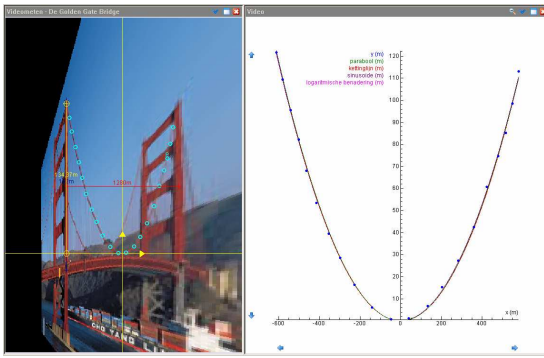


fig. 3 Wiskundige benaderingen van een meting

Figuur 3 is een schermafbeelding van een meting van de vorm van de draagkabel met de oorsprong van het assenstelsel gelijk gekozen aan het laagste punt van de kabel tussen de twee pylons. De grafieken van de eerder genoemde wiskundige benaderingen van de kabel zijn in het rechterdiagram getekend. Het feit dat je bijna geen verschil tussen de grafieken ziet geeft aan dat inderdaad alle beschrijvingen in wiskundig opzicht even goed zijn.

Maar dit geldt niet voor de hangbrug waar het voorbeeldvraagstuk verder op ingaat: de overspanning hangt daarvoor te ver door. In figuur 4 zijn de grafieken getekend van een parabool en een kettinglijn die passen bij een brug van 100 meter lengte en pylons die 30,66 meter hoog zijn. Er is nu wel een duidelijk verschil.

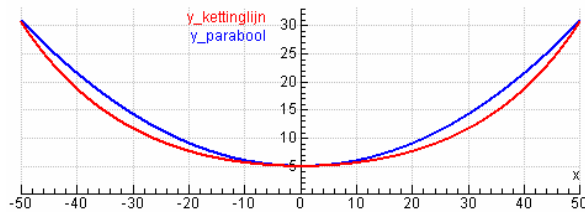


fig. 4 Kettinglijn en parabool als beschrijving van de draagkabel voor de brug uit het voorbeeldvraagstuk.

In het voorbeeldvraagstuk wordt de wiskundige formule van een kettinglijn zonder enige motivering geponeerd voor de vorm van een draagkabel van een hangbrug. Maar waarom zou deze vorm eigenlijk hetzelfde zijn als die van een hangende ketting [3,4]? Toegegeven, het voorbeeldvraagstuk gaat niet over het modelleren van een kabel van een hangbrug. Deze context is alleen maar een bijkomstig verhaaltje in een som die in werkelijkheid gaat over een onderzoekje m.b.v. ICT naar een wiskundige uitdrukking met e-machten. Dit is jammer want leerlingen krijgen op deze wijze een onrealistisch beeld van toepassing van wiskunde en analyse in het bijzonder.

Een wiskundige beschrijving van de vorm van een draagkabel van een hangbrug en van de vorm van een hangende ketting is mijns inziens een geschikt onderwerp om leerlingen bezig te laten zijn met modelleren. Deze mening is gebaseerd op ervaringen met een praktische opdracht voor vwo leerlingen [5]. Hier gaat de rest van dit artikel over. Tevens wil ik ingaan op een model van het modelleerproces en het gebruik hiervan voor het ontwerp van lesmateriaal. Dit onderwerp dient als casus hiervoor.

Een model van modelleren

Omdat er verschillende opvattingen over modelleren en haar rol in onderwijs bestaan [6] wil ik eerst mijn eigen standpunt verduidelijken. Met opzet heb ik als titel van dit artikel gekozen voor ‘modelleren van bruggen en bogen’ en me niet beperkt tot ‘wiskundig modelleren’. Onder modelleren versta ik een cyclisch proces waarin een aantal activiteiten geschakeld zijn en waarin zowel wiskundige als domeinspecifieke kennis en vaardigheden een rol spelen bij het vat krijgen op en redeneren over een situatie of probleem uit de echte wereld. In het diagram in Figuur 5 wordt het modelleerproces opgedeeld in 7 deelprocessen. Het betreft de schematische beschrijving van modelleren volgens Blum en Leiß [7] waarbij verschillende modelleerstadia in de werkelijkheid en in de wiskundewereld onderscheiden worden. Bij wiskundig modelleren ligt het accent meer op deelprocessen 3 t/m 5.

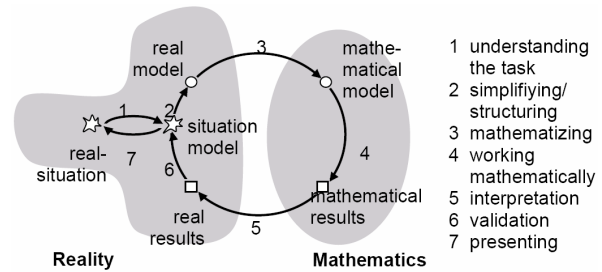


fig. 5 Modelleercyclus volgens Blum en Leiß.

Er bestaan meer van dergelijke schema's voor modelleercycli [8]. Ze worden vooral gebruikt als theoretisch kader voor vakdidactische studies, om het ‘ideale modelleerproces’ te beschrijven, modelleercompetenties te formuleren en om problemen van leerlingen bij het modelleren in kaart te brengen [9-11]. Ze geven niet aan dat men tijdens het modelleerproces noodzakelijkerwijs alle fasen in genoemde volgorde doorloopt. Een gegeven computermodel kan best het vertrekpunt zijn om vat te krijgen op een dynamisch verschijnsel en voor het construeren van een wiskundig model kan het nodig zijn eerst de aanwezige kennis van wis- en natuurkunde op te frissen of uit te breiden. Blomhøj en Jensen [12] geven een voorbeeld van een lesontwerp uit de farmacologie waarin het proces van mathematiseren in omgekeerde volgorde gebeurt: eerst wordt experimenteel een geschikte formule voor de concentratie van een verdovingsmiddel bepaald en pas daarna wordt een 2-compartimentmodel ontwikkeld dat de gevonden formule als oplossing heeft.

Ook betekent het opsplitsen van de modelleercyclus niet dat de kennis en vaardigheden bij elk deelproces afzonderlijk geleerd en geoefend moeten worden. Dan kom je juist in valkuilen terecht zoals het zomaar weggeven van formules in contexten of het modelleren van fenomenen zonder validatie van het model door vergelijking met ervaringen, observaties, experimentele gegevens of met theoretische kennis. Dit is eigenlijk alleen te rechtvaardigen wanneer men slechts voor even wil inzoomen op een bepaald facet van het modelleerproces, bijvoorbeeld om zich op een kernconcept of een basistechniek te concentreren. Men kan dan in het lesmateriaal voldoende informatie opnemen die

de op dat moment minder belangrijk beschouwde deelprocessen sterk vereenvoudigen, zo niet trivialisieren. Maar als men modelleren serieus neemt, dan ontkomt men volgens mij niet aan de verplichting om leerlingen meerdere keren alle stappen van het modelleringsproces te laten doorlopen, ongeacht de tijd die hiervoor uitgetrokken moet worden.

Een schema voor een modelleercyclus kan ook een houvast bieden aan auteurs van lesmateriaal waarin modelleren centraal staat. Dit is geen loos advies want onderwijsontwikkelaar kan de verleiding niet weerstaan om leerlingen al vrij snel bloot te stellen aan het modelleren van complexe systemen. Nadeel is dan dat een leerling bij het gegeven probleem niet alle facetten in elke stap van de modelleercyclus kan overzien en dat de auteurs in een poging om de situatie zo eenvoudig mogelijk te presenteren eindigen met modellen die weinig of geen realiteitswaarde en voorspellingsmogelijkheden hebben. Als je wilt dat een leerling de hele modelleercyclus kan doorlopen, dan is het naar mijn mening verstandig juist voor simpele, maar vakinhoudelijk rijke onderwerpen te kiezen. Pas als een leerling voldoende kennis en ervaring met modelleren opgedaan heeft en een solide basis van wiskundige en natuurwetenschappelijke kennis en vaardigheden heeft verworven is bestudering van complexere systemen mogelijk. Dit past dan goed in een grotere praktische opdracht of in een profielwerkstuk.

In het vervolg van dit artikel zal ik het schema van Blum en Leiß nader toelichten en dit gebruiken om een mogelijke route te beschrijven voor het vinden en beargumenteren van een wiskundige formule voor de vorm van een draagkabel van een hangbrug en voor de vorm van een hangende ketting. Ik hoop te kunnen demonstreren dat in een dergelijk simpel ogend probleem heel veel interessante wis- en natuurkunde zit die voor vwo-leerlingen met behulp van ICT zowel toegankelijk als uitdagend is.

Modelleren van hangbruggen en kettingen

Vat krijgen op de probleemsituatie



fig. 6 De Keshwa Chaca brug en de Ponte de 25 Abril

Bij een hangbrug kun je denken aan een touwbrug in een speeltuin of uit films die zich afspelen in de jungle, of aan een voetgangersbrug uit het Inca tijdperk zoals de Keshwa Chaca, maar ook aan bruggen zoals de Golden Gate brug in Los Angeles, de hier sterk op lijkende Ponte de 25 Abril in Lissabon of de Clifton hangbrug in Bristol, UK. In Nederland komen geen hangbruggen voor vanwege de bodemgesteldheid en omdat dit type brug pas aantrekkelijk

is bij grote overspanningen (meer dan 500 meter). De voetgangers-touwbrug, met het flexibele loopgedeelte doet meer denken aan een hangende ketting, terwijl bij de andere voorbeelden van hangbruggen de hangkabels de belasting op de brug overbrengen op twee draagkabels die tussen twee pylonen zijn opgehangen en in landhoofden zijn verankerd. Schematisch ziet dit type hangbrug er als volgt uit:

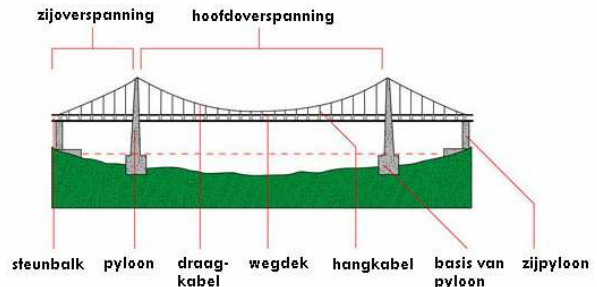


fig. 7 Schematische tekening van een klassieke hangbrug

In bovenstaand schema zijn allerlei veronderstellingen opgenomen die in werkelijkheid niet altijd waar hoeven te zijn: pylonen zijn even hoog verondersteld, het wegdek loopt horizontaal en is zo star dat het niet doorbuigt, de zijoverspanning is nodig om te voorkomen dat spankrachten in de draagkabel de pylonen omver trekken. Met andere woorden, we stellen ons de ideale hangbrug voor om de wiskundige vorm van de hoofdoverspanning te bestuderen. We hebben ons een mentaal beeld van de echte situatie gevormd. Dit wordt in het model van Blum en Leiß het situatiemodel genoemd. Het mentale beeld van de situatie komt vaak onbewust tot stand door informele kennis en ervaring alsmede door disciplinaire kennis. Zo'n mentaal beeld kan visueel zijn in de vorm van grafische representaties, maar ook meer analytisch gestructureerd via symbolen en verbale beschrijvingen. Dit hangt meestal van persoonlijke voorkeuren af.

Een goede afbakening van het probleem valt ook onder het proces van vat krijgen op de probleemsituatie. In ons geval zijn we niet zozeer geïnteresseerd in een meetkundige constructie zoals in onderstaande figuur 8, waarin de hoofdoverspanning in een dynamisch meetkunde pakket benaderd is met een kegelsnede. Wij willen daarentegen een coördinatensysteem invoeren met de horizontale as parallel aan het brugwegdek en hiermee de vorm van de hoofdoverspanning via een wiskundige functie beschrijven.



fig. 8 Kegelsnede in Cabri geconstrueerd langs de hoofdoverspanning van de Ponte de 25 Abril

Vereenvoudigen en structureren

De vereenvoudiging en structurering gaat in de modelleer-cyclus bewust verder tot een 'model van de werkelijkheid' gecreëerd is met een concrete vraagstelling. Het zoeken naar de essentie van het probleem en het transformeren van een situatiemodel tot een zo eenvoudig, van allerlei afleidende bijkomstigheden ontdaan en meer abstract model van de werkelijkheid is vaak een fase van grote creativiteit. Christiaan Huygens heeft op zeventienjarige leeftijd in zijn studie over de vorm van een hangende ketting of koord het lumineuze idee gekregen om de ketting op te vatten als een serie gelijke gewichten die op gelijke afstanden langs een gewichtsloos, niet-rekbaar koord hangen (Figuur 9). Dit klopt natuurlijk niet, maar het is een benadering die beter wordt naarmate je meer gewichten op kortere onderlinge afstand neemt. In het limietgeval komt deze benadering overeen met de exacte oplossing van het oorspronkelijke probleem.

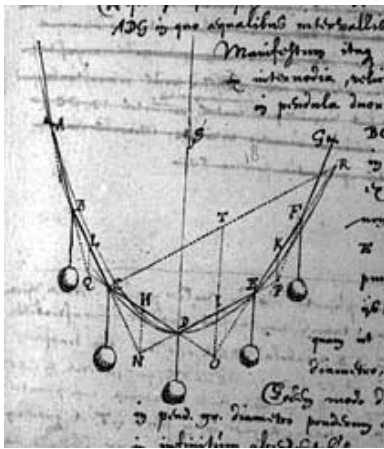


fig. 9 Tekening van een kettinglijn door Huygens [13]

Uitgaande van een brugwegdek met een uniforme verdeling van het gewicht en draag- en hangkabels van verwaarloosbaar gewicht kunnen we een hangbrug ook in verband brengen met opgehangen gewichten. Alleen moeten de gewichten nu op gelijke horizontale afstand opgehangen worden en niet op gelijke afstanden langs het koord.

Mathematiseren

Als model van de werkelijkheid nemen we in navolging van Huygens een flexibele, niet-rekbare ketting met verwaarloosbaar gewicht waaraan in serie op gelijke afstanden gelijke gewichten opgehangen zijn. We zullen twee situaties onderzoeken: (1) gewichten op gelijke onderlinge horizontale afstand en (2) gewichten op gelijke onderlinge afstand langs het koord. Er zijn allerlei manieren om van hieruit tot een wiskundig model te komen en dit verder wiskundig uit te werken. Jan van de Craats [3] en Klaas Pieter Hart [4] gebruiken bijvoorbeeld elementaire kennis over krachten en krachtenevenwichten om tot een differentiaalvergelijking te komen en vervolgens analytisch op te lossen. De kettinglijnformule is in zijn eenvoudigste gedaante (bij geschikte keuze van oorsprong en schaling)

gelijk aan $y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. In deze aanpak gaat het mathematiseren vooraf aan de wiskundige uitwerking. Ik wil hier laten zien dat een voorafgaand experimenteel en

ICT-gebaseerd onderzoek ook mogelijk is en tot diep inzicht kan leiden. Dit werk ligt ten grondslag aan een wiskundig model dat ook door natuurkundige basisprincipes onderbouwd is en dat via computersimulaties leidt tot benaderingen van kettinglijnen en draagkabels van hangbruggen.

Figuur 10 is een schermafdruck van een Coach 6 activiteit waarin een experimentele opstelling gebouwd en gefotografeerd is met vijf gelijke gewichten die zodanig bevestigd zijn dat de onderlinge horizontale afstanden en de horizontale afstanden van de buitenste gewichten tot de ophangpunten gelijk zijn. Een assenstelsel met de oorsprong in het laagste punt is gekozen en de coördinaten van de ophangpunten en de knikpunten in het draagkoord zijn met een simpele muisklik vastgelegd. Deze meting op de digitale foto levert de grafische weergave van de draadsegmenten in het diagramvenster aan de rechterkant op. Met het gereedschap in Coach om hellingen in grafieken op te meten kunnen leerlingen experimenteel achterhalen dat de hellingen van de draadsegmenten rechts van het laagste punt een vaste verhouding 1:3:5 zouden kunnen hebben. Door digitale hoekmetingen in de foto kunnen de hellingen op een tweede manier bepaald worden zodat controle van metingen ingebouwd kan worden. Door met meer gewichten en verschillende onderlinge afstanden te experimenteren kunnen leerlingen er gemakkelijk achterkomen dat dit niet afhangt van de massa van de opgehangen gewichten (onder de aanname dat ze allemaal even veel wegen), dat deze vaste verhoudingen ook optreden bij gelijk onderlinge afstanden van de gewichten langs de draad en dat de onderlinge afstanden hierin geen rol spelen. Essentieel is alleen dat de ophanging zodanig gebeurt dat een symmetrische figuur ontstaat (symmetrisch in de y-as bij onze keuze van het assenstelsel).

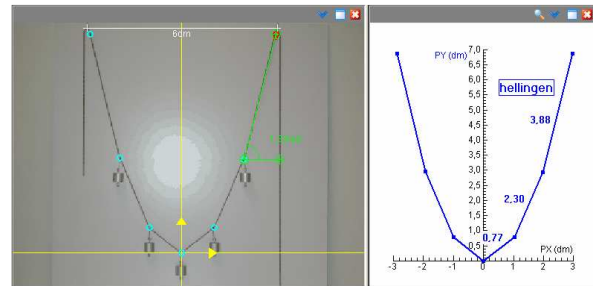


fig. 10 Metingen in een digitale foto.

Nu kun je de vaste verhouding van hellingen wel gelijk gaan gebruiken om via een computermodel hangende kettingen en draagkabels van hangbruggen te modelleren, maar het eigenlijk veel interessanter en leerzamer om eens goed na te denken en een verklaring te vinden voor het gevonden resultaat van vaste verhoudingen van hellingen volgens de reeks 1:3:5:7:.... Ook nu draait alles weer om krachten en evenwicht van krachten, maar het is eenvoudiger dan in menige beschrijving [3,4] omdat we alleen te maken hebben met puntkrachten, d.w.z. met krachten die maar op één punt van een lichaam ingrijpen. Dat dit ook, desnoods met hulp van de docent, een haalbare kaart is met leerlingen blijkt uit onderstaande uitleg van twee 4-vwo leerlingen in een klasexperiment [5]:

“Zie het plaatje hieronder (Figuur 12). Als zwaartekracht hebben wij als voorbeeld 100 N genomen.

Bij A is de spankracht in de twee delen van de ketting gelijk. De verticale componenten van de spankracht zijn dus samen 100 N, en enkel 50 N. De horizontale componenten zijn overal gelijk en heffen elkaar op, dus daar hebben we het verder niet over.

De linker spankracht van B is gelijk aan de spankracht (links of rechts) van A. Dus de verticale component van die spankracht in A is gelijk aan de verticale component van de linker spankracht in B. Deze verticale component van B heeft dezelfde richting als de zwaartekracht. Samen zijn ze dus 150 N. De verticale component van de rechter spankracht van B moet gelijk zijn aan de zwaartekracht en de ander verticale component, dus 150 N. $3 \times 50 = 150$, dus dat klopt. Als je dan verder redeneert moet de verticale component van de rechter spankracht van C gelijk zijn aan $5 \times 50 = 250$ N.

De rechter spankracht van B en de linker spankracht van C zijn weer gelijk aan elkaar. Dus de verticale component ook. Dat maakt dus dat, samen met de zwaartekracht, de totale kracht naar beneden dus 250 N is. Dus moet de kracht naar boven ook 250 N zijn. Dus de verticale component van de rechter spankracht van C is dus 250 N. De verhouding 1:3:5 klopt dus.

Conclusie: Als een boog symmetrisch is en op alle punten een even zware kracht wordt uitgeoefend, krijg je dus altijd een vorm van een parabool met hellingen die zich verhouden als 1:3:5:7 ... enz.”

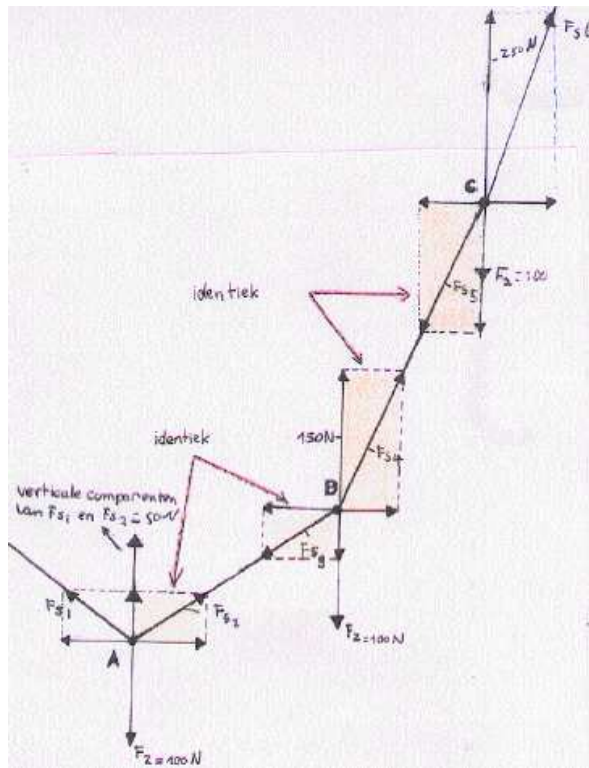


fig. 12 Schets van leerlingen bij hun toelichting.

Met de redenering van de leerlingen en de manier waarop ze het verwoorden is niet veel mis. Hun conclusie slaat op de situatie waarin de gewichten op gelijke horizontale afstand van elkaar hangen. Stel dat deze afstand gelijk aan 1

is, dat de oorspong van het assenstelsel gelijk aan A is, en dat de eerste helling richtingscoëfficiënt 1 heeft. Dan zijn de coördinaten van opeenvolgende punten aan de rechterkant gelijk aan (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), ..., oftewel de punten liggen op de standaardparabool $y = x^2$. Als de onderlinge afstand van de gewichten langs de draad gelijk aan elkaar gekozen wordt, dan volgt uit de vaste verhoudingen van de hellingen eenvoudigweg dat de knikpunten niet op een parabool kunnen liggen. Onduidelijk is dan nog wel welke functie gekozen kan worden opdat de knikpunten op de grafiek van deze functie liggen.

Belangrijk hier is dat de leerlingen een gemeenschappelijk punt in de verschillende wiskundige vormen van gewichten aan een hangende ketting gevonden hebben bij een symmetrische ophanging, nl. de vaste verhoudingen van opeenvolgende draadsegmenten. Voor hen hebben dan alle hangende kettingen en alle hangbruggen een gelijksoortige basisvorm. Het feit dat ze het al lang niet meer hebben over die ene ophanging blijkt wel uit hun taalgebruik: “Als zwaartekracht hebben wij als voorbeeld 100 N genomen”. De massa van de gewichten doet er voor de leerlingen niet toe. Enige noodzaak is dat de gewichten gelijk zijn en symmetrisch opgehangen zijn: “Als een boog symmetrisch is en op alle punten een even zware kracht wordt uitgeoefend, krijg je dus altijd een vorm van een parabool met hellingen die zich verhouden als 1:3:5:7 ... enz.”. De onderstreepte woorden duiden er op dat veralgemenisering van het probleem uit de werkelijkheid heeft plaatsgevonden.

Wiskundig uitwerken

Om van het wiskundig model naar modeluitkomsten te komen kunnen twee routes bewandeld worden, namelijk een klassieke route met pen en papier waarin een algebraïsche/analytische aanpak via differentiaalvergelijkingen beproefd wordt en een route waarin met een computermodel aan een numerieke benadering gewerkt wordt. Het idee is dat leerlingen met een geschikte computermodelleeromgeving een instrument in handen hebben om ook in meer realistische situaties problemen aan te pakken waarvoor de analytische mathematische behandeling buiten hun bereik ligt. In een advies aan de gezamenlijke bèta-vernieuwingscommissies [14] staat letterlijk: “Daardoor krijgt modelleren een meer realistisch karakter en kunnen activiteiten als experimentele toetsing, modevaluatie en probleemdefinitie meer betekenis krijgen. Bovendien kan zodoende de relatie met ‘echte’ modelleerproblemen, zoals die spelen in de beroepspraktijk en in het maatschappelijk debat, beter inzichtelijk gemaakt worden.”

Bij het wiskundige werk om een oplossing te vinden van een wiskundig model kan het nuttig zijn om technologie in te zetten voor het maken van grafische representaties (ook van opgespoorde algebraïsche verbanden), voor het bepalen van een regressiekromme bij data, en voor het doorrekenen van enkele gevallen. Wiskundigen zijn overigens in het algemeen terughoudend in het gebruik van ICT bij wiskundig modelleren, ook als het om berekenen van modeluitkomsten gaat. Zij grijpen niet bij het minste of geringste naar rekenmachines en computerprogramma’s, maar ze proberen het mathematiseringsproces door goed

nadenken en puzzelen met pen en papier in veelbelovende banen te leiden en ze proberen eigenschappen van modeluitkomsten af te leiden door zorgvuldig het mathematisch model te analyseren alvorens oplossingen ook echt uit te rekenen. In feite hebben de leerlingen in het hierboven beschreven werk ICT alleen ingezet om tot een goed idee van verhoudingen tussen opeenvolgende hellingen van draadsegmenten te komen en is er daarna denkwerk aan te pas gekomen om het resultaat te verklaren. Met dit resultaat in handen hebben ze kunnen verklaren wanneer de knikpunten van een kabel al dan niet op een parabool liggen. De wiskundige formule van de kettinglijn hebben ze daarbij nog niet gevonden. Eerlijk gezegd valt dit ook buiten bereik van leerlingen in 4-vwo die nog niet van differentiaalvergelijkingen gehoord hebben.

Wat wel goed mogelijk is na de experimentele benadering en de theoretische fundering is een computermodellering met behulp van een programmeeromgeving of systeem-dynamische software. Een leerling kan bijvoorbeeld een hangende ideale ketting benaderen met een serie van equidistant geplaatste kraaltjes van gelijk gewicht. Figuur 13 is een schermafdruck van een Coach 6 activiteit waarin een computerprogramma een kettinglijn benadert. Hierin is een computermodel te zien waarin een halsketting van zekere lengte L in $2N$ gelijke stukken verdeeld wordt en, uitgaande van een zekere helling naar rechts in het laagste punt, de ligging van opeenvolgende kettingsegmenten berekend wordt door opeenvolgende hellingen te bepalen volgens de opeenvolgende verhoudingen $1:3:5:7:9:\dots$. De posities van de knikpunten worden berekend m.b.v. de trigonometrische formule $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. Het diagram rechtsboven in Figuur 13 laat de berekende kromme zien samen met de gemeten punten op de hangende ketting.

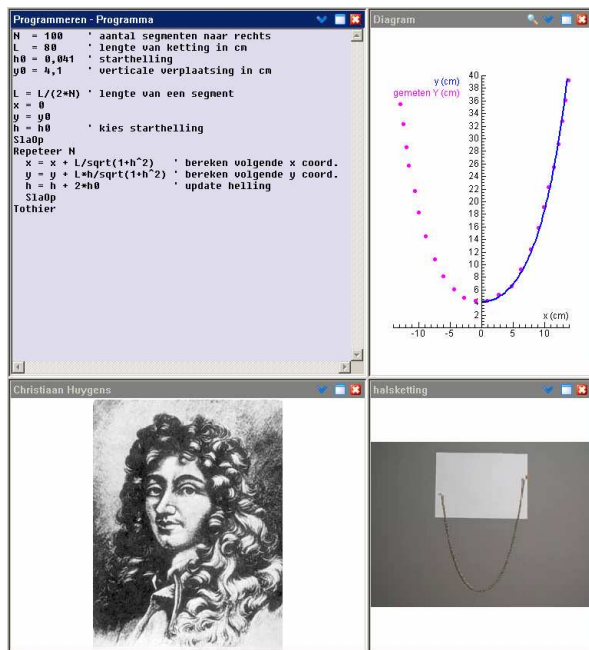


fig. 13 Coach programma voor kettinglijn

Wie een leerstijl heeft die meer visueel georiënteerd is kan als alternatief een grafisch modelleervenster gebruiken zo-

als in onderstaande figuur 14. Over de betekenis van de grafische componenten volgt later in dit artikel meer.

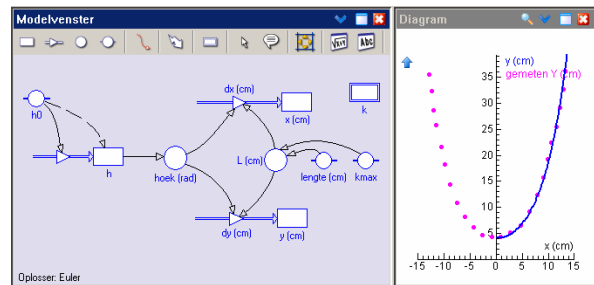


fig. 14 Grafisch modelprogramma voor kettinglijn

Deze schermafdruck illustreert dat een grafisch modelleer-gereedschap niet uitsluitend voor dynamische systemen ingezet wordt, maar eigenlijk meer een grafische invoer en weergave van een computermodel is. Een overgang naar een tekst-gebaseerde weergave van het model in de modelleeromgeving van Coach maakt dit ook aan leerlingen zonneklaar.

In een klasexperiment in 5-vwo, al uitgevoerd in 2001 met Coach 5, hebben leerlingen met succes en voldoening via de tekst-gebaseerde modelleeromgeving gepuzzeld op de vraag hoe uit de verhoudingen $1:3:5:7:\dots$ van opeenvolgende hellingen van draadsegmenten met knikpunten op gelijke horizontale afstand juist een parabool tot stand komt. In hun praktische opdracht, die sindsdien standaard-onderdeel van de Coach distributie is, begonnen ze met het computerprogramma in Figuur 15. Het modelvenster is hierin verdeeld in twee delen: links staat het eigenlijke model, rechts de beginwaarden. Je ziet: x begint met -5 , y met 25 . Verder is dx gelijk aan 1 . Dit laatste betekent dat x steeds toeneemt met stapgrootte 1 . Links zie je hoe eerst dy berekend wordt en dan de nieuwe x - en y -waarde. Daarna begint het spel weer van voor af aan: links staat de code van een herhalingslus. Het model wordt doorgerekend totdat $x > 5$. Het diagramvenster laat zien dat de berekende punten op de standaardparabool $y = x^2$ liggen.

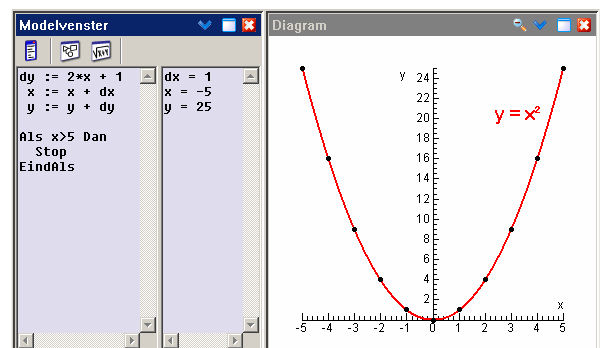


fig. 15 Coach programma voor de standaardparabool

Geen van de leerlingen had moeite met het begrijpen van dit computerprogramma. Het gepuzzel kwam pas in de tweede opdracht waarin gevraagd werd om het programma zodanig aan te passen dat het ook werkt voor een willekeurige stapgrootte dx , onder de voorwaarde dat de formule $y = x^2$ niet gebruikt wordt. Behalve hun antwoord moesten leerlingen in hun verslag ook opschrijven hoe ze te

werk gegaan waren en, in het geval ze per toeval op het antwoord waren gestuit, aantonen waarom het werkt. Dit vereiste inventiviteit en groot doorzettingsvermogen van de leerlingen om te komen tot de computerregel

$$dy = 2 \cdot x \cdot dx + dx^2.$$

Meestal begonnen de leerlingen eerst met het bestuderen van een tweede concreet geval, bijvoorbeeld $dx = \frac{1}{2}$ of $\frac{1}{4}$, om vandaar uit naar het algemene geval te gaan. In de derde opdracht werd de moeilijkheidsgraad verder opgevoerd: nu moest een model gemaakt worden voor het geval de ophangpunten de punten (0,10) en (10,10) zijn en het laagste punt (5,5) is. Ook moesten ze de formule van de parabool waarop de punten liggen bepalen. Een leerlinge schreef over haar aanpak: "Van verschillende personen kreeg ik te horen: 'Hoe kom je erop!' tja, dat weet ik ook in de meeste gevallen niet echt te beschrijven. Voor mij is het heel gewoon dat ik het bewuste vraagstuk op die manier oplos, maar voor anderen is dat een raadsel. Ik heb hen geprobeerd uit te leggen dat ik heel systematisch te werk ben gegaan wanneer ik een algemeen geldende formule probeerde te vinden. Eerst maakte ik een tabel en daaruit haalde ik de formule, voor een bepaalde waarde van dx . Wanneer ik dit aan mijn klasgenoten vertelde vroeg een aantal van deze 'maar waarom doe je dat dan', ja waarom? Het leek mij nogal voor de hand liggen dit op deze manier te doen, hoe maak je een formule van een grafiek, door verschillende punten te weten en daar een verband tussen te vinden. Maar goed, ik had zo verschillende formules en uit die formules moest een algemeen geldende formule gemaakt worden. En dat is nu juist wat ik echt geweldig vind, net zo lang puzzelen totdat je weet 'dit is em.'. Wanneer je de opdracht op deze manier aanpakt heb je vrij snel het antwoord. Opdracht drie ging vrijwel op dezelfde manier. Maar was al iets lastiger. Mede doordat er in beginwaarde van dy niet direct een verband was te vinden. Maar na even puzzelen, kwam ik ook hier vrij snel op het juiste spoor en wist ik al snel de algemene formule te formuleren."

Behalve een illustratie van de aanpak van een leerlinge is dit citaat ook een verwoording van de appreciatie van de opdracht door deze leerling. Mijn ervaring was en is dat veel leerlingen het leuk vinden en er een voldaan gevoel aan overhouden als ze, na veel proberen, de goede oplossing van een probleem gevonden hebben.

Daarnaast mag niet onvermeld blijven dat de wiskundige uitwerking van de vaste verhoudingen van opeenvolgende hellingen ook kan leiden tot de differentiaalvergelijking die de vorm van een hangbrug bepaalt. Een leerling kan bijvoorbeeld in een computermodel zelf uitproberen dat verwaarlozing van de kwadratische term dx^2 in de rekenregel $dy = 2 \cdot x \cdot dx + dx^2$ voor kleine waarden van dx niet zo'n groot verschil in het resultaat van een simulatie maakt. Voor kleine stapgrootte geldt de linearisatie $dy \approx 2 \cdot x \cdot dx$. In het limietgeval geldt dus: $y' = 2x$. Ziehier een differentiaalvergelijking voor de parabool van de vorm $x^2 + c$.

Modellering van bruggen en bogen op basis van de bijpassende differentiaalvergelijkingen behoort natuurlijk in de hogere vwo-klassen tot de mogelijkheden. Samenvattend kunnen we stellen dat alle krommen die we intussen bekeken hebben bepaald worden door de toename van de hel-

ling h . Omdat bij een hangbrug de belasting constant is in de horizontale richting, is ook de hellingstoename constant per eenheid van horizontale afstand. Met andere woorden:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dh}{dx} = \frac{1}{c},$$

voor zekere constante c . Bij een ketting, die met het eigen gewicht (dus in de richting van de ketting zelf) belast wordt, is de hellingstoename constant per eenheid van kettinglengte. Hieruit volgt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dl} \cdot \frac{dl}{dx} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

voor zekere constante c . In verkorte notatie:

$$y'' = \frac{1}{c} \sqrt{1 + (y')^2},$$

waarbij c een constante is. Als we de lengte-eenheid in het vlak schalen met c , met andere woorden als we overstappen op dimensieloze grootheden, dan krijgen we een vergelijking voor de kettinglijn in zijn eenvoudigste vorm:

$$y'' = \sqrt{1 + (y')^2},$$

waaraan inderdaad als oplossing voldoet

$$y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

De afleiding van differentiaalvergelijkingen en het nadenken over eigenschappen van oplossingen hiervan is overigens een belangrijke onderdeel van dit type modelleren. Voor het modelleren van een hangbrug kunnen hierbij verschillende wegen bewandeld worden. Een meer natuurkundige aanpak gebruikt het gegeven dat een ketting zó hangt dat de potentiële energie minimaal is. Voor de potentiële energie van een hangende ketting met uniforme dichtheid ρ en ophangpunten bij $x = -a$ en $x = a$ kunnen we de volgende uitdrukking opschrijven (met valversnelling g):

$$E_{\text{pot}} = \rho \cdot g \cdot \int_{-a}^a y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Voor het minimaliseren van deze integraal passen we de vergelijkingen van Euler-Lagrange toe:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Voor ons probleem geldt: $F(x, y, y') = y \sqrt{1 + (y')^2}$. Toepassing van het Euler-Lagrange formalisme geeft dan:

$$y \cdot y'' = 1 + (y')^2.$$

Aan weerszijden vermenigvuldigen met y' en herschrijven leidt tot de differentiaalvergelijking

$$\frac{y' \cdot y''}{1 + (y')^2} = \frac{y'}{y}.$$

Integratie aan weerszijden levert, voor het geval $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$, de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Samen met de eerder genoemde differentiaalvergelijking

$$y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$$

krijgen we dan de vergelijking

$$y'' = y.$$

Ondertussen hebben we al veel differentiaalvergelijkingen gevonden waar de kettlijn aan moet voldoen en onder de gedane veronderstellingen is $y = \cosh(x)$ steeds de oplossing.

Dynamische modelleersoftware biedt uitkomst wanneer de differentiaalvergelijkingen niet analytisch oplosbaar zijn of het analytisch oplossen buiten bereik van leerlingen valt. Figuur 16 is een schermafdrruk van een grafisch model in Coach 6 dat een beginwaardenprobleem representeert. De betekenis van de iconen is vergelijkbaar met die in andere systeemdynamische software zoals Powersim en STELLA: er bestaan iconen voor toestandsvariabelen (rechthoeken), stroomvariabelen (dubbele pijlen met een driehoek in het midden), hulpvariabelen (cirkels), constanten (cirkels met 'handvaten'), relaties (enkele pijl), en voor het specificeren van beginwaarden (gestippelde pijlen). Een stroompijl begint of eindigt altijd in een toestandsvariabele en geeft (een deel van) de verandering van de toestand aan. De inkomende relatiepijlen van variabele worden gebruikt om expliciet in het grafische model aan te geven waar deze variabele van afhangt. De gele sticker in de schermafdruk, die alleen tevoorschijn komt als je de cursor een tijdje boven het icoon houdt, toont de formule die de verandering van de helling specificceert ($\frac{1}{c}\sqrt{1+h^2}$).

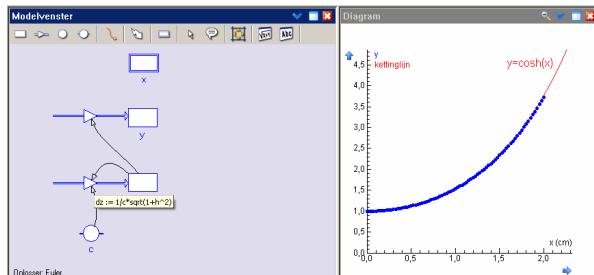


fig. 16 Coach model van een beginwaardenprobleem

Samengevat, geef je via het grafische model op welke grootheden in het wiskundige model een rol spelen (met onderscheid tussen parameters, rekengrootheden en toestandsvariabelen), hoe ze van elkaar afhangen, welke formules voor grootheden precies gebruikt worden en welke waarden de constanten hebben. Het grafische model wordt automatisch vertaald naar een stel vergelijkingen die op hun beurt gebruikt worden in een computersimulatie van het model. In ons voorbeeld is $c = 1$ en $y(0) = 1$; dan benadert de berekende numerieke oplossing de exacte oplossing $y = \cosh(x)$. De grafiek in figuur 16 illustreert dit. Dit voorbeeld van computermodellering en andere voorbeelden in dit artikel wekken overigens de terechte indruk dat bij een gegeven wiskundig model nog verschillende manieren van computermodellering door leerlingen mogelijk zijn, zelfs bij inzet van alleen een grafische modelleeromgeving.

Interpreteren en valideren van het wiskundige model

In zijn oratie aan de Wageningen Universiteit [15] noemt Jaap Molenaar twee zaken van belang voor de 'kwaliteit' van een model. Hij noemt een model 'goed' als (1) het model de beschikbare waarnemingen goed beschrijft en (2) het model voorspellingen mogelijk maakt die, na verificatie, goed blijken te kloppen. Tevens merkt hij op, onder

verwijzing naar de methode van data fitting, dat de 'voorspelkracht' vele malen zwaarder weegt dan de 'beschrijfkraft'. Wat het eerste punt betreft: de confrontatie van het wiskundige model en de werkelijkheid van hangende kettingen en hangbruggen is in de gekozen opbouw van een praktische opdracht over modelleren van bruggen en bogen bijna nooit uit het oog geweest. Bijvoorbeeld, bij de uitwerking van het wiskundige model voor een hangende ketting in de vorm van een computermodel (Figuur 13) hebben we de uitkomsten van een modelberekening al gelijk vergeleken met de metingen op de betreffende halsketting. Voor de Golden Gate brug is een vergelijking van model en meting (in gerectificeerde digitale foto) te zien in Figuur 17. Dit grafische computermodel is gebaseerd op een model van de draagkabel via k_{max} rechte schakels waarvan de knikpunten op vaste horizontale afstand van elkaar liggen opdat de paraboolvorm, zoals we inmiddels weten, ontstaat.

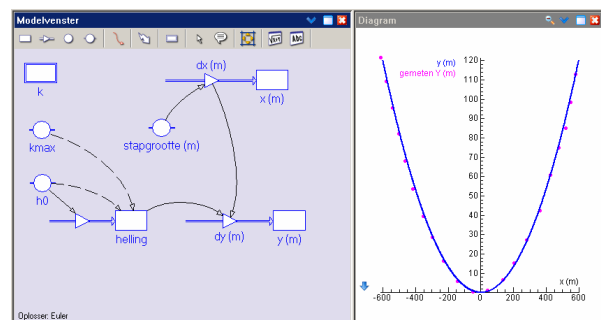


fig. 17 Coach programma voor de Golden Gate hangbrug

De voorspelkracht van het wiskundige model zit vooral in ruime toepasbaarheid van de gekozen aanpak. Stel dat we interesse hebben in de wiskundige vorm van een hangende ketting waaraan in het laagste punt nog een hangertje hangt, dan kunnen we deze situatie modelleren door uit te gaan van een serie gewichten op gelijke afstand langs een koord waarvan alle gewichten even zwaar zijn op eentje na: in het laagste punt hangt een zwaarder gewicht. Met dezelfde redenering over krachten en krachtenevenwichten kunnen we dan tewerk gaan. Hetzelfde geldt als we de wiskundige vorm willen bepalen van twee touwen waaraan een schommelstoeltje hangt dat minder breed is dan de onderlinge afstand van de ophangpunten. In deze fase van modelleren is de belangrijkste competentie voor leerlingen om oplossingen en oplossingsmethoden die ze voor een speciaal geval gevonden hebben te generaliseren.

De voorspelkracht van ons model komt ook tot uiting in de mogelijkheden die verworven zijn om bij gegeven lengte van een ketting en bij gegeven afstand tussen twee ophangpunten de 'doorhang' van de hangende ketting te bepalen of om bij een hangbrug met een hoofdoverspanning van gegeven lengte en pylonen van gegeven hoogte de lengte van de draagkabel te bepalen.

Leerlingen geven blijk van een goed kunnen interpreteren van wiskundige resultaten in de reële context door toepasselijk wiskundig taalgebruik. Dit houdt bovendien in dat ze niet alleen getallen of formules als wiskundige oplossingen zien, maar ook grafieken of computermodellen.

Validering van een model betekent met name het vergelijken van resultaten met metingen en observaties en een kritisch kijken naar het eigen wiskundig handelen en naar de gevonden oplossingen. Een modelleur moet het lef hebben om vragen te stellen bij het eigen modellerenproces, te reflecteren op veronderstellingen en implicaties hiervan, en zonodig veranderingen in het model aan te brengen of alternatieven te proberen. Dit vergroot de kans op succes. Voor onderwijs in modelleren betekent dit dat leerlingen in hun werk de kans moeten krijgen deze facetten van modelleren onder ogen te krijgen. Zo leren ze de kracht en beperkingen van modellen kennen en wordt een werkhouding gestimuleerd waarin het de normaal gevonden wordt om van fouten te leren en actief op zoek te zijn naar alternatieven.

Conclusie

Ik hoop de volgende doelen gerealiseerd te hebben:

- Het misverstand over de wiskundige vorm van hangende kettingen en hangbruggen is weggenomen: het verschil tussen parabool en kettinglijn is duidelijk.
- Het voorbeeld van modelleren van bruggen en bogen illustreert goed dat bij modelleren van realistische problemen verschillende methoden van aanpak en talloze middelen inzetbaar zijn, variërend van al experimenterend aan de slag zijn of met een computermodel in de weer zijn tot algebraïsch/analytisch formuleren en met pen en papier oplossen. Ik onderschrijf de conclusie van Bert Zwaneveld [16] dat de aanpak bij elk modelleerprobleem de belangrijkste stap is en dat je daarbij moet durven iets te proberen.
- Het idee dat de modelleercyclus van Blum en Leiß houvast kan bieden bij het structureren en ontwerpen van een modelleeropdracht voor leerlingen is goed overgekomen.
- Aannemelijk is gemaakt dat ICT inderdaad het arsenaal van mogelijkheden voor een leerling zinvol verruimt met het oog op experimenten uitvoeren, hypothesen onderzoeken en 'wat als'-vragen beantwoorden. Met een computermodel kan een leerling naar mijn mening vaak ook weer dicht terugkomen bij een concrete context waar het allemaal mee begon, zeker als modeluitkomsten vergeleken kunnen worden met experimentele gegevens. Het toetsen van een model aan de werkelijkheid hoort volgens mij een vanzelfsprekend onderdeel van de activiteiten door leerlingen te zijn. Coach biedt uitstekende mogelijkheden om experimenteren en modelleren aan elkaar te koppelen in zinvolle en in praktijk uitvoerbare leerlingactiviteiten.
- Het artikel heeft de notie versterkt dat in simpel ogende problemen heel veel interessante wis- en natuurkunde zit die voor vwo-leerlingen met behulp van ICT zowel toegankelijk als uitdagend is. Het verband tussen wiskunde in theorie en praktijk kan hiermee goed duidelijk gemaakt worden.

De auteur wil zijn collega's Leendert van Gastel en Peter Uylings danken voor de vruchtbare discussies over modellering van ankerkettingen, halskettingen en hangbruggen

André Heck, AMSTEL Instituut, Universiteit van Amsterdam, heck@science.uva.nl

Noten

- [1] Blankespoor, J. (2007). Wiskunde D Toegepaste analyse 2 HAVO. *Nieuwe Wiskrant* **26** (4) 4-6.
- [2] Heck, A. (2004). Met een schuine blik. *Nieuwe Wiskrant* **26** (4) 4-6.
- [3] Craats, van de J. (1999). Hoe hangt een ketting. *Nieuwe Wiskrant* **19** (1) 32-36.
- [4] Hart, K.P. (1999). De kettinglijn. *Pythagoras* **39** (2), 28-29.
- [5] Heck, A. & Holleman, A. (2004). A Practical Investigation Task with the Computer at Secondary School: Bridges and Hanging Chains. Extended paper in: M. Borovcnik, H. Kautschitsch (eds.) *Electronic Proceedings of ICTMT5* in Klagenfurt, Vienna: öbv&hpt, 2004. ISBN 3-209-03849-X (cd-rom).
- [6] Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006) A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38** (3) 302-310.
- [7] Blum, W. & Leiß, D. (2005) "Filling up" - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. In: M. Bosch (red.) *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education*, pp. 1623-1633. <http://ermeweb.free.fr/CERME4>
- [8] Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38** (2) 86-95.
- [9] Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A Framework for Identifying Student Blockages during Transitions in the Modelling Process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38** (2) 143-162.
- [10] Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **38** (2) 113-142.
- [11] Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In: W. Blum, P.L. Galbraith & M. Niss (red.). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study, New ICMI Study Series, Vol. 10. New York: Springer.
- [12] Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modeling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications* **22** (3) 123-139.
- [13] Huygens, C. (1646) De Catena pendente. In: La Société hollandaise des sciences (red.) *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens* (1888) Tome XI, chap. VI, pp. 51-68. <http://gallica.bnf.fr>
- [14] Savelsbergh, E. et al (2007). Modelleren in de β -vakken: Kennis in uitvoering. Advies aan de gezamenlijke β -vernieuwingscommissies. Utrecht: Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen.
- [15] Molenaar, J. (2007). De kracht van wiskundig modelleren. Oratie uitgesproken op 21 juni 2007 in de Aula van Wageningen Universiteit.
- [16] Zwaneveld, B. (2006). Modelleren op verschillende niveaus. *Euclides* **82** (3) 89-91.