Werkgroep 5

Natuurwetenschappen + wiskunde + Coach → aantrekkelijke praktische opdracht

André Heck (AMSTEL Instituut) en André Holleman (Bonhoeffer College, Castricum)[*]

1. Inleiding

Elk schoolvak legt een eigen accent op de ICT-gereedschappen waarmee leerlingen zelfstandig hun werkzaamheden in het studiehuis kunnen uitvoeren. Voor de natuurwetenschappelijke vakken zijn dit ICT-gereedschappen om metingen te doen, gegevens te verwerken, computermodellen op te stellen en simulaties uit te voeren. Bij techniek gaat het om het combineren van meten van gegevens en aansturen van apparaten. Wiskunde heeft behoefte aan rekenfaciliteiten – exact, numeriek en grafisch – om gegevens mee te manipuleren of statistisch te verwerken, om te kunnen werken op de computer met wiskundige modellen en om simulaties uit te kunnen voeren. Voor alle vakken geldt dat Internet als onderwijsplek, informatiebron en communicatiemiddel voor leerling en docent zijn intrede doet.

Bij wiskunde-onderwijs is in Nederland de grafische rekenmachine ingevoerd. Ook worden enkele domein-specifieke pakketten zoals voor meetkunde, statistiek en dynamische systemen ingezet. Een visie op het gebruik van computeralgebra en andere wiskundige software is groeiende. Bij natuurkunde, scheikunde, biologie en techniek wordt op de meeste scholen Coach gebruikt bij practica. Deze leeromgeving biedt diverse wiskundige faciliteiten omdat experiment en waarneming meestal gepaard gaat met wiskundige presentatie en analyse van gegevens.

Met de invoering van de profielen Natuur & Gezondheid en Natuur & Techniek kan op het VWO aan de wenselijkheid om bèta-vakken inhoudelijk beter op elkaar af te stemmen gevolg gegeven worden. Deze samenhang zou je ook graag terug zien bij de hulpmiddelen voor leerlingen en docenten. De behoefte aan een gemeenschappelijke ICT-leeromgeving voor alle exacte vakken neemt toe., al is het alleen maar om een aanzienlijke tijdsbesparing te krigen door het gebruik van dezelfde gebruiksinterface. Voor de handliggend is dat de integratie met COACH wordt nagestreefd.

In de werkgroep komen drie problemen aan bod die door leerlingen in een praktische opdracht of profielwerkstuk met Coach onderzocht kunnen worden:

- Hoe hangt een ketting?
- Hoe groeit de gemiddelde Nederlandse jongen en meisje?
- Wat is de beste manier om een vrije worp bij basketbal te nemen?

Wiskunde en natuurwetenschappen worden in deze opdrachten niet als abstracte vakken ten toon gespreid, maar als vakken die ergens over gaan en vormgegeven zijn in uitdagende opdrachten.
Wij hopen dat deze voorbeelden u inspireren voor vakoverstijgende opdrachten waarin wiskunde en natuurwetenschappen hand in hand gaan.

2. Kettingen

Hoe hangt een ketting?

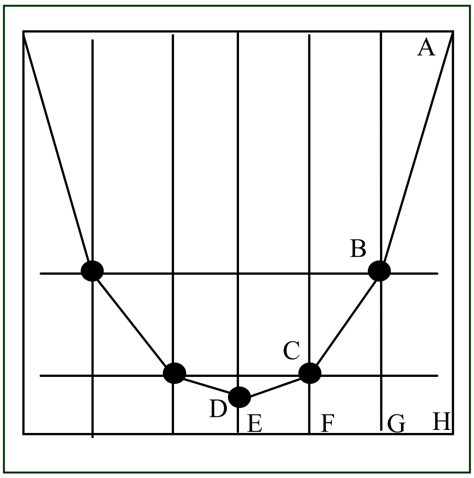
Overal kom je wel hangende kettingen, touwen en kabels tegen, bijvoorbeeld halskettingen, hoogspanningskabels en kabels waar een brugwegdek "aan hangt". Hangen al deze kabels volgens dezelfde wiskundige vorm? De eerste gedachte van menig leerling zal zijn: dat zal allemaal wel volgens een parabool zijn. Met Coach kun je dat gemakkelijk nameten. Het blijkt dan dat de parabool inderdaad voorkomt, bijvoorbeeld bij hangbruggen, maar dat een gewone halsketting niet volgens een parabool hangt.

---

[*] André Holleman werkt in het kader van het NWO-programma "Leraar in Onderzoek" 1 dag per week op het AMSTEL Instituut in het project *ICT-toepassingen bij wiskundige en vakoverstijgende opdrachten*

Modellen

Bij een hangbrug zijn de kabels waar het wegdek "aan hangt" op onderling gelijke afstanden bevestigd. Daarom lijkt het een goed idee om als theoretisch model een gewichtsloze draad met daaraan op de juiste afstanden gelijke puntmassa's te nemen. In de figuur moet dus bv EF = FG = GH. Het is niet al te moeilijk om dit model praktisch te realiseren: een dunne ketting met een aantal gelijke gewichten zal goed voldoen.
Een gewone ketting is homogeen. Daarom nemen we hierbij als theoretisch model weer de gewichtloze draad, maar nu met de puntmassa's op gelijke afstanden op de draad. In de figuur moet dan bijvoorbeeld AB = BC = CD.
De puntmassa's hangen we symmetrisch en in oneven aantal, dus met één middenonderaan.

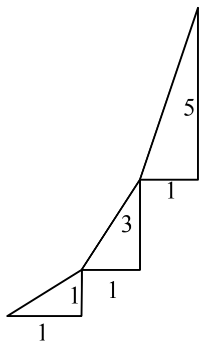


Meten

Vandaag zullen we meten aan de hand van een video-opname. Hierbij hangen de gewichten als in het tweede model, dus op gelijke afstanden op de ketting.
Wat te meten? Bijvoorbeeld de hoeken die DC, CB en BA met de horizontale richting maken? De helling van de lijnstukken DC, CB en BA?
Tussen hellingen lijkt een eenvoudig verband te bestaan, namelijk de verhouding 1 : 3 : 5.
Ditzelfde verband is er als de gewichten worden opgehangen volgens het eerste model. (Om dit voor elkaar te krijgen kun je het best uitgaan van de paraboolvorm om de onderlinge afstanden te berekenen.)

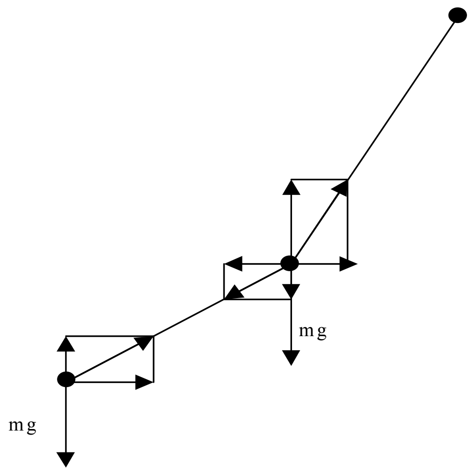
Reflectie

In de figuur hiernaast is de situatie van de paraboolvorm geschetst. We herkennen de kwadraten: 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, enzovoort.
Geen verrassende uitkomst dus.
Bij het eerste model krijg je een andere situatie. Nu zijn niet de horizontale rechthoekszijden, maar de schuine zijden even groot. Daarom kan de vorm van de hangende ketting geen parabool zijn.



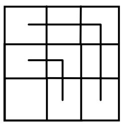
Theorie

Enerzijds past het meetresultaat wonderwel bij de parabool, anderzijds is het misschien wel te mooi om waar te zijn. Daarom zal een theoretische onderbouwing gezocht moeten worden.
Met behulp van evenwicht van krachten bij de verschillende puntmassa's krijg je, na enig rekenwerk, inderdaad het verwachte resultaat.
Het blijkt daarbij dat de onderlinge afstanden van de puntmassa's er niet toe doen.
Met enige sturing kunnen leerlingen in de hogere klassen deze afleiding zelf wel aan, denken wij.



Nader onderzoek

Allereerst de parabool.
Een bewijs of een beredenering van de stelling:
de som van de eerste k oneven getallen is gelijk aan k^2



$1+3+5=3^2$

Dit kan zowel meetkundig (zie hiernaast) als algebraïsch via
$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$.
Bij de standaardparabool $y = x^2$ is het verband tussen de opeenvolgende oneven getallen en de grafiek natuurlijk duidelijk.
Maar is de verhouding 1 : 3 : 5 : 7 enz ook te ontdekken bij gelijke horizontale stappen die niet gelijk aan 1 zijn? Hierbij kan de tabeloptie van Coach (of de Grafische Rekenmachine) hulp bieden. Is een eventueel vermoeden ook te bewijzen? Maar als die verhouding er ook met kleinere stappen in zit, waarom is de grafiek bij de top dan zo plat vergeleken met de verdere grafiek?

De modelleeromgeving van Coach biedt nog meer mogelijkheden.
Is het mogelijk om de grafiek van een parabool, dus van een hangend koord met gewichten, te laten benaderen met behulp van verticale stapjes in de verhouding 1 : 3 : 5 : 7 … ? En is de lengte van het koord te berekenen?
Kun je Coach de vorm laten tekenen waarin een koord met bijvoorbeeld 11 gewichten en een lengte van 50 cm gaat hangen? Heb je hierbij nog te maken met de horizontale afstand van de beide eindpunten?

De kettinglijn
Wiskundig gezien is de kettinglijn heel wat ingewikkelder als de parabool: er zijn *e*-machten nodig of hyperbolische functies. Het hangt er dus vanaf hoe ver en hoe slim de leerling is of hier op in gegaan kan worden. Maar misschien is het wel mogelijk om de vorm van een hangend koord van bijvoorbeeld 55 cm met 11 gewichten te laten tekenen.

Zo zijn er nog wel meer vragen te bedenken. Sommige zullen moeilijk of niet te beantwoorden zijn, andere kunnen verassende inzichten geven.

3. Groei van Nederlandse jongens en meisjes

Wat is normaal?

Menige scholier vraagt zich wel eens af "ben ik te dik of te dun?", "ben ik lang of kort in vergelijking met leeftijdgenoten", "waarom zijn meisjes in de brugklas gemiddeld genomen langer dan jongens", "hoe lang zal ik vermoedelijk worden?".
Deze vragen veronderstellen dat er zoiets bestaat als een normaal gewicht, een normale lengte en een normale groei en ontwikkeling van het menselijk lichaam.
Om antwoorden te vinden moet je de cijfers van laatste Nederlandse groeistudies onder de loep nemen. Met deze echte gegevens en gebruikmakend van ICT-hulpmiddelen als Coach en de grafische rekenmachine kun je interessante resultaten behalen. Een hoogtepunt: een betrekkelijk eenvoudig wiskundig model beschrijft de gemiddelde lengtegroei van Nederlandse jongens en meisjes van 0 tot 21 jaar tot op de centimeter nauwkeurig.

Wiskundige begrippen

Lengtegroei en gewichtstoename van jongens en meisjes kom je regelmatig in wiskunde schoolboeken tegen. Bij de behandeling van veranderingsbegrippen zoals toenamendiagram, differentiequotiënt en helling, en bij statistische begrippen als normale verdeling, gemiddelde, mediaan en percentielen.

Jammergenoeg kom je wel veel verzonnen contexten tegen, voorgeschoteld als reëele context, maar alleen bedoeld als omlijsting of als ideale illustratie van een wiskundig begrip. Wat te denken van een opgave over een 15-jarige jongen van 175 cm die klein van stuk genoemd, maar in feite de gemiddelde lengte van Nederlandse jongens op deze leeftijd heeft. Of wat te denken van een opgave waarin een 12-jarige jongen 115 cm lang is (39 cm onder het landelijke gemiddelde) en een eindlengte bereikt van 191 cm, ruim boven het landelijke gemiddelde.

Met de echte gegevens in de hand kunnen leerlingen zelf verbanden tussen gewicht, lengte, leeftijd en andere biometrische gegevens onderzoeken en wiskundige begrippen in praktijk met een duidelijk doel toepassen.

KKP-model

Er bestaan verschillende modellen om de lengtegroei wiskundig te beschrijven. Deze modellen hebben weinig klinisch nut, maar zijn vooral van wetenschappelijk belang.
In het zogenaamde KKP-model worden 3 groeifasen onderscheiden die elk hun eigen wiskundige beschrijving hebben:

1. *Kleutertijd* (0-3 jaar): geremde groei, waarbij lengtetoename vanaf de geboorte exponentieel afneemt. De groei in deze fase is vooral gerelateerd aan voeding. De bijpassende formule is $L_1 = a_1 - b_1 e^{-c_1 t}$ (*t* is hier als symbool voor leeftijd gebruikt)
2. *Kindertijd*: lengtetoename neemt lineair af en leidt tot de formule
   $L_2 = a_2 t^2 + b_2 t + c_2$
   De groei in deze fase wordt vooral gestimuleerd door groeihormoon.
3. *Pubertijd*: logistische groei voor de bijdrage van de pubertijdspurt, met als formule $L_3 = \dfrac{a_3}{1 + e^{c_3 - b_3 t}}$
   Deze fase wordt veroorzaakt door de geslachtssteroïden.

Zoals u ziet, stuk voor stuk, wiskundige modellen die in de wiskundeles aan bod komen. Een uitzondering dat een wiskundig model dat in wetenschappelijk onderzoek echt gebruikt wordt ook door leerlingen te bevatten is.

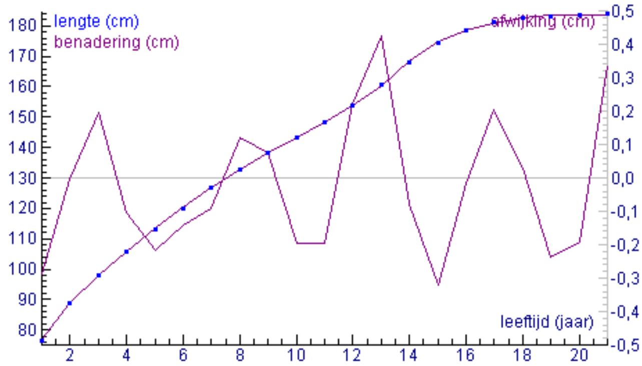
Resultaten voor Nederlandse jongens en meisjes

Voor wie het KKP-model voor de Nederlandse situatie wil weten, geven we de formules
(lengte *L* in cm, leeftijd *t* in jaren):

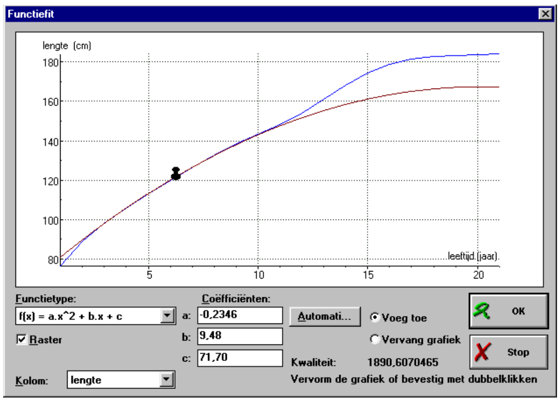
Jongens: $L_1 = 76{,}4 - 19{,}4e^{-1.56t}$ $\quad L_2 = -0{,}235t^2 + 9{,}5t - 4{,}7$ $\quad L_3 = \dfrac{16{,}1}{1 + e^{16{,}4 - 1{,}2t}}$

Meisjes: $L_1 = 74{,}3 - 18{,}7e^{-1.65t}$ $\quad L_2 = -0{,}256t^2 + 9{,}8t - 4{,}8$ $\quad L_3 = \dfrac{8{,}6}{1 + e^{12{,}4 - 1{,}1t}}$

Het KKP-model voor Nederlandse jongens werkt heel netjes:



Je gebruikt in Coach de regressie-tool en de modelomgeving voor het empirische onderzoek. Hieronder is een schermafdruk van een handmatige bepaling van de kromme voor groei in de kinderperiode voor jongens.



Nader onderzoek door leerlingen

Landelijke groeistudies zijn mooi, maar zeker zo interessant is de situatie in de klas of op de hele school. Als leerlingen dit gaan onderzoeken lopen ze vanzelf tegen allerlei onderzoeksproblemen aan, en niet alleen wiskundige problemen. Hoe pak je zo'n onderzoek eigenlijk aan? Ga je zelf meten of ga je lengte- en gewichtgegevens van leerlingen opvragen? Welke andere vragen stel je en hoever mag of kun je hierin gaan? Hoe ga je met de persoonsgegevens om? Wat te doen als veel scholieren weigeren mee te werken aan het groeionderzoek? Maak je onderscheid tussen allochtone en autochtone leerlingen en is dit nodig en/of ethisch verantwoord. Hoe presenteer je de onderzoeksresultaten?
En zo kunnen we nog wel een tijdje doorgaan.
Er komt veel kijken bij zo'n onderzoek en dat geeft een goed beeld van wat echt onderzoek en verslaglegging inhoudt.

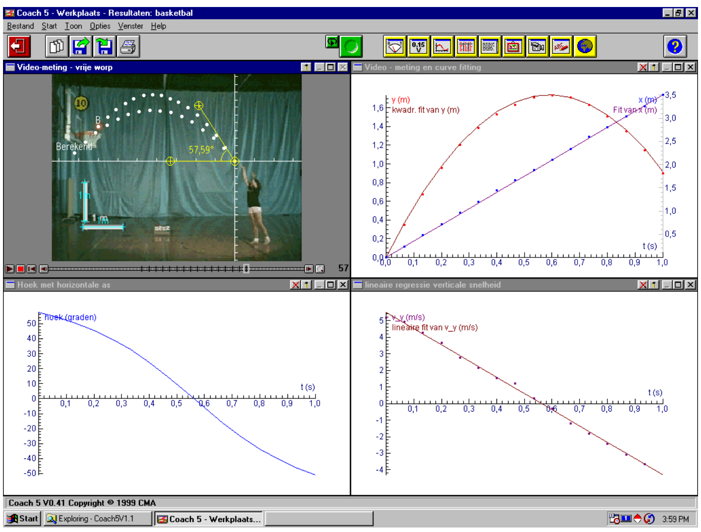
4. *Vrije worp bij basketbal*

Meten aan videoclips

Voordelen van videometing voor de wiskundeles zijn:

- Je hoeft zelf geen proefopstelling op te bouwen
- Processen die zich minder goed lenen voor directe metingen kun je toch bestuderen
- Je hoeft niet van tevoren tot in detail te bedenken wat precies gemeten gaat worden.
- Metingen zijn gemakkelijk te doen, achteraf nog eens te verifiëren en indien nodig te corrigeren.

Een voorbeeld: vrije worp bij basketbal



Hierboven staat een schermafdruk van een meting en analyse van een vrije worp bij basketbal.

De formules bij verwaarlozing van luchtweerstand beginsnelheid v, hoek van weggooien α:

$$x = (v\cos\alpha)t$$

$$y = (v\sin\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Oftewel de parabool:

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2$$

Differentiëren levert de helling in elk punt van de baan op.
Voor de hoek van inval β bij de basketring op afstand L geldt:

$$\tan\beta = \tan\alpha - \frac{gL}{v^2\cos^2\alpha}$$

Met deze formules kun je ook banen uitrekenen bij worpen met andere beginsnelheden of hoeken en in de videoclip tonen.

Uitdagende onderzoeksvragen

Bij gegeven hoek van weggooien, in hoeverre mag de snelheid variëren om toch nog een punt te scoren? Bij gegeven beginsnelheid, hoe mag de hoek van weggooien variëren om toch nog een punt te scoren?

Ben je als lange speler in het voordeel bij een vrije worp t.o.v. een kleinere speler?

Levert een bovenhandse vrije worp een hogere kans op een score op dan een onderhandse worp?

Waarom worden bij korfbal vrije worpen altijd onderhands genomen en bij basketbal door professionele spelers bovenhands? Is daar vanuit de wiskunde en natuurkunde een verklaring voor te geven?

Nemen meisjes een vrije worp anders dan jongens en zo ja wat is het verschil?