

Wis- en natuurkunde van hardlopen

1. Inleiding

In deze notitie bekijken we verschillende modellen voor hardlopen en voor sprints in het bijzonder. We onderscheiden twee soorten modellen, namelijk modellen die gebaseerd zijn op:

1. de tweede wet van Newton;
2. de balans van verschillende vormen van vermogen.

Beide soorten van modellen leveren differentiaalvergelijkingen voor de snelheid van de hardloper op. Op enkele modellen na zijn de bijpassende differentiaalvergelijkingen niet exact oplosbaar. In dat geval kunnen we numerieke oplossingen vinden via computermodellen. We zullen zien hoe Coach 6 gebruikt kan worden om experimentele resultaten te vergelijken met resultaten verkregen door computersimulaties.

2. Modellen gebaseerd op de tweede wet van Newton

Alle modellen van deze soort zijn gebaseerd op de volgende formule

$$m \cdot a(t) = F_{\text{voorstuwing}}(t) - F_{\text{weerstand}}(t), \quad (1)$$

waarbij

- m de massa van de hardloper is,
- $a(t)$ de versnelling op tijdstip t is,
- $F_{\text{voorstuwing}}(t)$ de voortstuwende kracht op tijdstip t is, d.w.z. de kracht die de hardloper op dat tijdsmoment vooruit doet bewegen, en
- $F_{\text{weerstand}}(t)$ de kracht op tijdstip t is die overwonnen moet worden om vooruit te komen.

We bekijken nu verschillende modellen uit de vakliteratuur.

2.1 Keller-model

Dit model uit 1973 is bedoeld om een sprint over 100 m te beschrijven, maar kan ook voor iets langere afstanden gebruikt worden bij elitesporters. In dit model wordt de voortstuwende kracht $F_{\text{voorstuwing}}(t)$ geschreven als het product van de massa m van de sprinter en de stuwkracht $f(t)$ per eenheid van massa op tijdstip t . Joseph Keller nam aan dat een sprinter vanaf het begin zo hard mogelijk loopt en tot het einde van de sprint een constante stuwkracht kan leveren, aangeduid met F . Dus:

$$F_{\text{voorstuwing}}(t) = m \cdot f(t) \quad (2)$$
$$f(t) = F \quad \text{bij een sprint}$$

Voor de weerstandskracht $F_{\text{weerstand}}(t)$ die overwonnen moet worden nam Keller aan dat deze voornamelijk bepaald wordt door interne weerstanden in het lichaam die overwonnen moeten worden om de ledematen te bewegen (leidend tot warmteproductie) en dat deze weerstandskracht toeneemt naarmate het gewicht van de hardloper groter is en de loopsnelheid toeneemt. Experimenten hebben in het verleden een lineair verband tussen weerstandskracht enerzijds en massa m en snelheid v anderzijds gesuggereerd:

$$F_{\text{weerstand}}(t) = m \cdot \sigma \cdot v(t), \quad (3)$$

waarbij $v(t)$ de snelheid van de hardloper op het tijdstip t is en σ een modelparameter is die (nagenoeg) constant verondersteld wordt en min of meer karakteristiek is voor de hardloper.

Wanneer we vergelijkingen (2) en (3) invullen in (1) en ons realiseren dat de versnelling $a(t)$ de afgeleide is van de snelheid $v(t)$, dan krijgen we het volgende beginwaardenprobleem:

$$\begin{aligned}v'(t) &= F - \sigma \cdot v(t) \\v(0) &= 0\end{aligned}\tag{4}$$

In de vakliteratuur is het gebruikelijk om de tijdconstante τ te gebruiken i.p.v. σ^{-1} . Dus:

$$\begin{aligned}v'(t) &= F - \frac{v(t)}{\tau} \\v(0) &= 0\end{aligned}\tag{5}$$

Bij een hardloopexperiment kun je de afgelegde afstand, snelheid en versnelling van een sprinter meten (bijvoorbeeld via videometing of door tussentijden te meten). Door de gemeten versnelling van de hardloper in een grafiek uit te zetten tegen de gemeten snelheid kun je nagaan hoe goed dit model past bij de meting. Via een rechte-lijn-regressie kun je de modelparameters F en τ bepalen, tenminste als je voldoende meetgegevens hebt..

Het bovenstaande beginwaardenprobleem is ook exact oplosbaar:

$$v(t) = F\tau(1 - e^{-t/\tau})\tag{6}$$

Het product $F\tau$ is gelijk aan de maximale snelheid van de sprinter. Wanneer we vergelijking (6) integreren krijgen we de volgende vergelijking voor de afgelegde afstand $D(t)$:

$$D(t) = F\tau^2(t/\tau + e^{-t/\tau} - 1)\tag{7}$$

Voor kleine waarden van tijd t geldt $e^{-t/\tau} \approx 1 - t/\tau + (t/\tau)^2/2$ en wanneer we dit invullen in (7) krijgen we voor de start van de sprint:

$$D(t) = \frac{1}{2}Ft^2\tag{8}$$

Door de afgelegde weg bij het begin van een sprint uit te zetten tegen de tijd krijg je een schatting van de modelparameter F . Samen met de gemeten maximale snelheid levert dit een schatting van de parameter τ op. Als alternatief kun je een functiefit uitvoeren met formule (6) voor de snelheid-tijd grafiek

We passen bovenstaande toe op de volgende gegevens van de 100 m sprint van Carl Lewis in de finale van de wereldkampioenschappen atletiek van 1987 in Rome, afkomstig van de website <http://myweb.lmu.edu/jmureika/track/splits/>. We corrigeren de tussentijden voor de gemeten reactiesnelheid van 0.193 s.

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| <i>positie</i> (m) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| <i>tussentijd</i> (s) | 1.94 | 2.96 | 3.91 | 4.78 | 6.64 | 6.50 | 7.36 | 8.22 | 9.07 | 9.93 |
| <i>gecorrigeerde tussentijd</i> (s) | 1.75 | 2.77 | 3.72 | 4.59 | 5.45 | 6.31 | 7.17 | 8.03 | 8.88 | 9.74 |

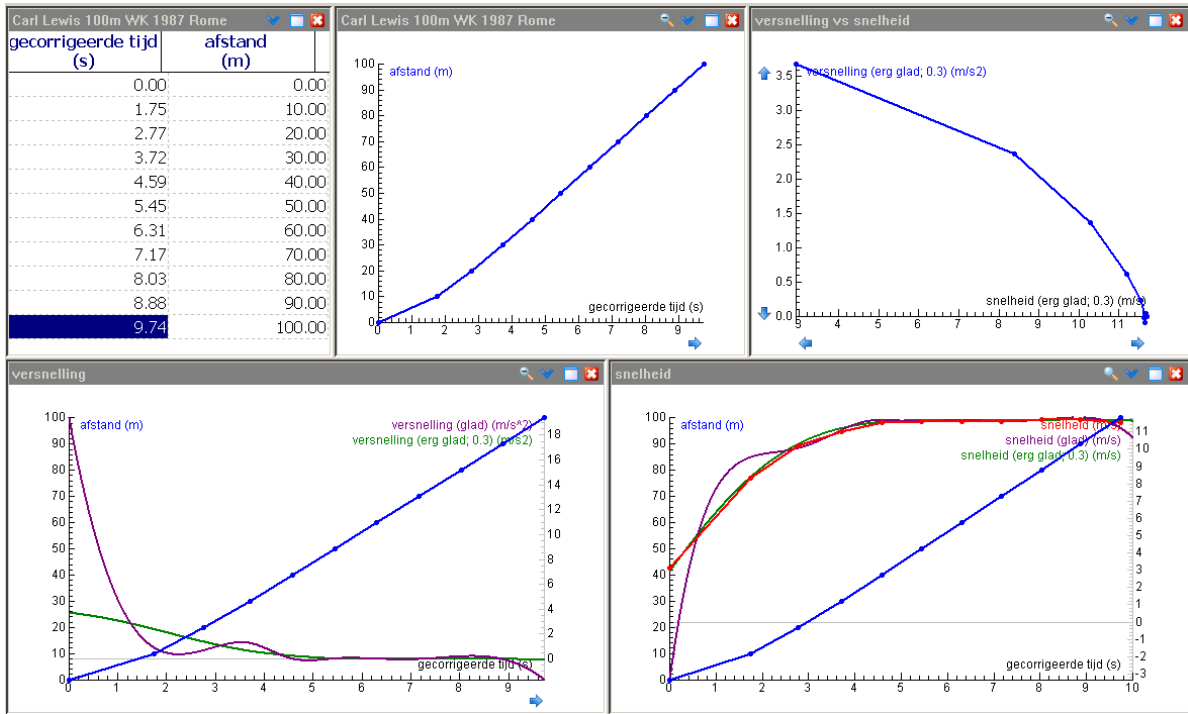
De snelheid en versnelling is in Coach te bepalen via eindige differenties of spline-smoothing. In figuur 1 zijn de grafieken van de afstand, snelheid en versnelling te zien, alsmede de versnelling-snelheid grafiek. We hebben bij de gladde afgeleide voor de parameter die de mate van gladheid bepaalt zowel de optie 'automatisch' als de waarden 0.03 en 0.03 gekozen.

De geschatte maximale snelheid is 11.7 m/s. We hebben deze waarde gebruikt om een schatting te maken van τ door een functiefit van de snelheid-tijd grafiek te doen met

$$f(x) = ae^{bx} + c\tag{9}$$

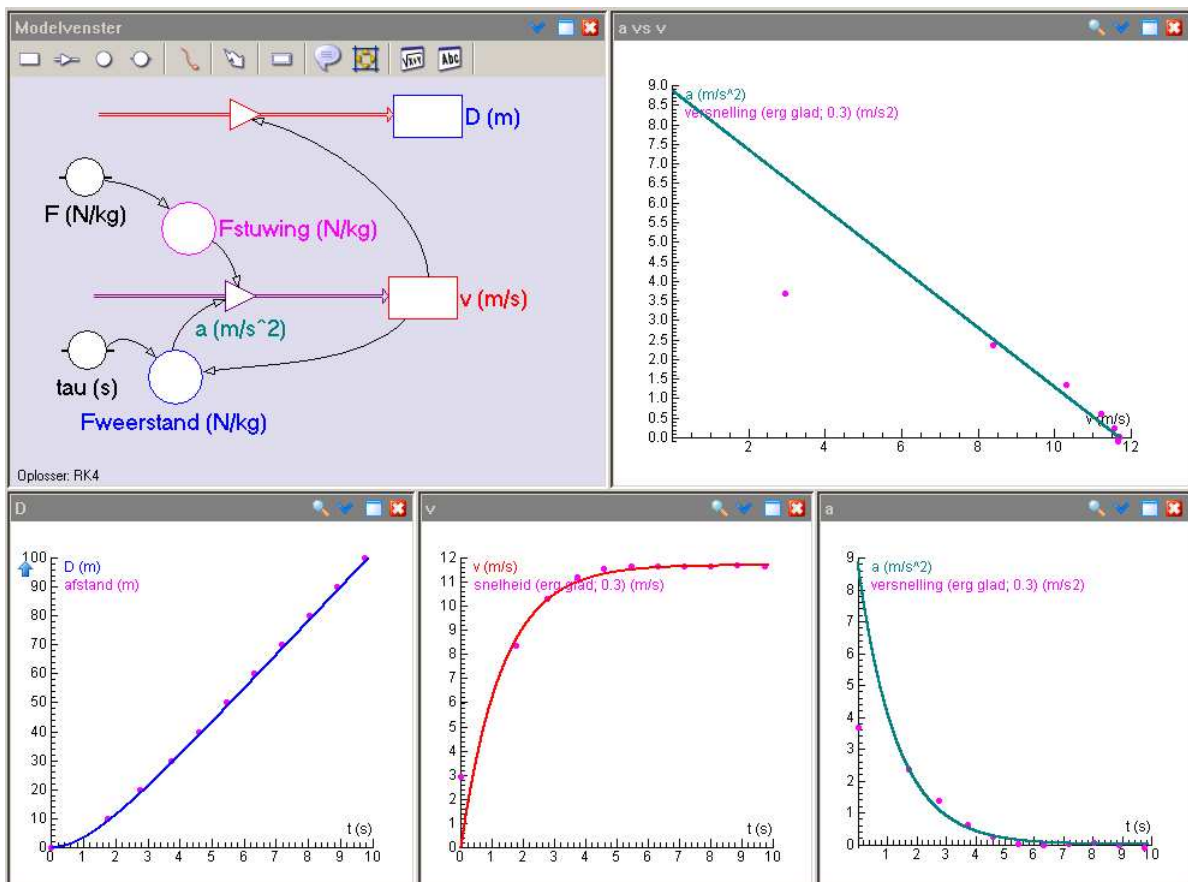
en $c = -a = 11.7$. We vinden: $1/\tau \approx 0.75892 \text{ s}^{-1}$ en dus $\tau \approx 1.318 \text{ s}$. Dan: $F \approx 8.88 \text{ N kg}^{-1}$.

Waarden τ kunnen per sprinter verschillen, maar liggen in de buurt van 1 s volgens Pritchard (1993). Woodside (1991) heeft het model aangepast en gebruikt voor lange loopafstanden.



Figuur 1. Sprintgegevens van Carl Lewis in de finale van het WK 1987 in Rome.

Het beginwaardenprobleem (5) kan in de grafische modelleromgeving van Coach 6 eenvoudig gebouwd worden. In figuur 2 staan de resultaten van een simulatie met de eerder gegeven schattingen van parameterwaarden.



Figuur 2. Simulatie van het Keller-model van Carl Lewis's sprint op het WK 1987.

De versnelling-snelheid grafiek in Figuur 1 laat geen mooi lineair verband zien, maar een mogelijke oorzaak is dat er onvoldoende meetgegevens zijn van de sprint.

2.2 Tibshirani-model

In het Keller-model wordt verondersteld dat de hardloper de maximale stuwkracht vol kan houden tijdens de hele race, dat hij of zij in een rechte lijn loopt en dat windinvloeden verwaarloosd mogen worden. Robert Tibshirani heeft in 1997 het Keller-model zodanig aangepast dat de eerste veronderstelling verwerkt is. In het Tibshirani-model wordt aangenomen dat de sprinter niet de maximale stuwkracht tijdens de hele race kan aanhouden, maar dat de stuwkracht $f(t)$ langzaam in tijd afneemt. De meest eenvoudige aanname is:

$$f(t) = F - ct \quad (9)$$

Het op te lossen beginwaardenprobleem is dan

$$\begin{aligned} v'(t) &= F - ct - \frac{v(t)}{\tau} \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Merk op dat de versnelling in dit model negatief wordt als de tijd lang genoeg is. Ook dit beginwaardenprobleem is nog exact oplosbaar:

$$v(t) = k - c\tau t - ke^{-t/\tau} \quad (11)$$

waarbij $k = F\tau + c\tau^2$. Wanneer we vergelijking (11) integreren, dan krijgen we de volgende vergelijking voor de afgelegde afstand $D(t)$:

$$D(t) = kt - \frac{c\tau t^2}{2} + k\tau(e^{-t/\tau} - 1) \quad (12)$$

Voor kleine waarden van tijd t , d.w.z. voor de start van de sprint, geldt vergelijking (8) of als je iets nauwkeuriger wilt werken

$$D(t) \approx \frac{Ft^2}{2} - \frac{(F + c\tau)t^3}{6\tau} \quad (13)$$

Robert Tibshirani heeft ook opgemerkt dat zijn model beperkingen heeft voor het lopen in de bocht van een atletiekbaan, hetgeen van belang is voor de loopnummers op de 200 en 400 m. Op een sprinter lopend met constante snelheid v in een bocht met straal r werkt een middelpuntzoekende versnelling die steeds naar het middelpunt gericht is en in grootte gelijk is aan v^2/r . Hoeveel energie de hardloper verbruikt om deze centripetale versnelling te realiseren is moeilijk in te schatten. Alexandrov & Lucht (1981) en Jonas Mureika (1997) hebben overigens hiervoor een eenvoudig model opgesteld, maar dit valt (voorlopig) buiten ons interessegebied.

Het is interessant om andere aannames voor de stuwkracht te bestuderen. Bijvoorbeeld levert de veronderstelling

$$f(t) = Fe^{-ct/\tau} \quad (14)$$

ook een beginwaardenprobleem op dat exact oplosbaar is. De oplossing is namelijk

$$v(t) = \frac{F\tau(e^{-ct/\tau} - e^{-t/\tau})}{1 - c} \quad (15)$$

Wanneer we vergelijking (15) integreren, dan krijgen we de volgende vergelijking voor de afgelegde afstand $D(t)$:

$$D(t) = \frac{F\tau^2 \left(e^{-t/\tau} - \frac{1}{c} e^{-ct/\tau} \right)}{1 - c} \quad (16)$$

Ook is de veronderstelling

$$f(t) = F e^{-c(t/\tau)^2} \quad (17)$$

te onderbouwen en interessant om te bestuderen. De exacte oplossing voor de snelheid is in dit geval

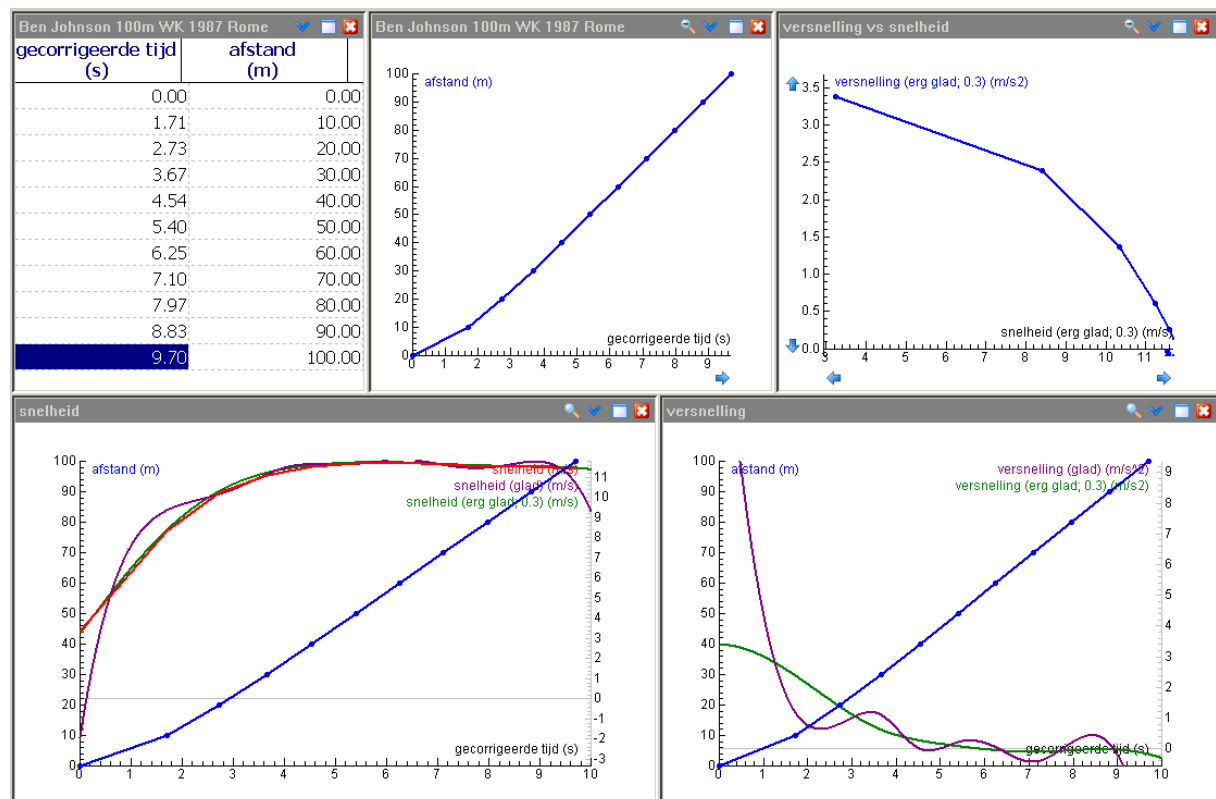
$$v(t) = \frac{\sqrt{\pi} F \tau e^{\left(\frac{1}{4c} \frac{t}{\tau}\right)} \cdot \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{c}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{2ct - \tau}{2\tau\sqrt{c}} \right) \right)}{2\sqrt{c}} \quad (18)$$

waarbij erf de errorfunctie is.

We passen het Tibshirani-model toe op de volgende gegevens van de 100 m sprint van Ben Johnson in de finale van de wereldkampioenschappen atletiek van 1987 in Rome. We corrigeren de tussentijden voor de gemeten reactiesnelheid van 0.129 s.

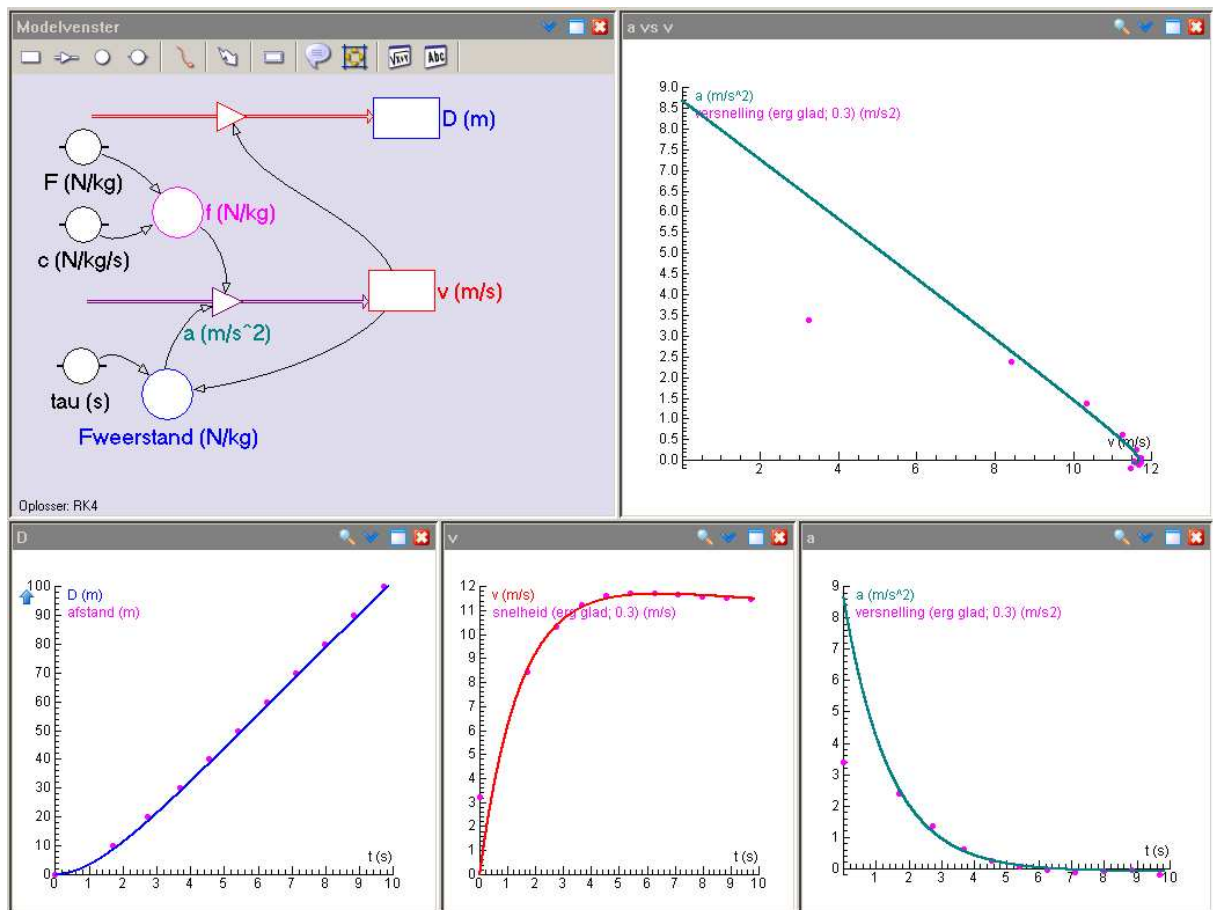
| positie (m) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| tussentijd (s) | 1.84 | 2.86 | 3.80 | 4.67 | 5.53 | 6.38 | 7.23 | 8.10 | 8.96 | 9.83 |
| gecorrigeerde tussentijd (s) | 1.71 | 2.73 | 3.67 | 4.54 | 5.40 | 6.25 | 7.10 | 7.97 | 8.83 | 9.70 |

In figuur 3 zijn de grafieken van de afstand, snelheid en versnelling te zien, alsmede de versnelling-snelheid grafiek. We hebben bij de gladde afgeleide voor de parameter die de mate van gladheid bepaalt opnieuw zowel de optie 'automatisch' als de waarden 0.03 en 0.3 gekozen.



Figuur 3. Sprintgegevens van Ben Johnson in de finale van het WK 1987 in Rome.

Het beginwaardenprobleem (10) kan in de grafische modelleromgeving van Coach 6 eenvoudig gebouwd worden. In figuur 4 staan de resultaten van een simulatie met de eerder gegeven schattingen van parameterwaarden.



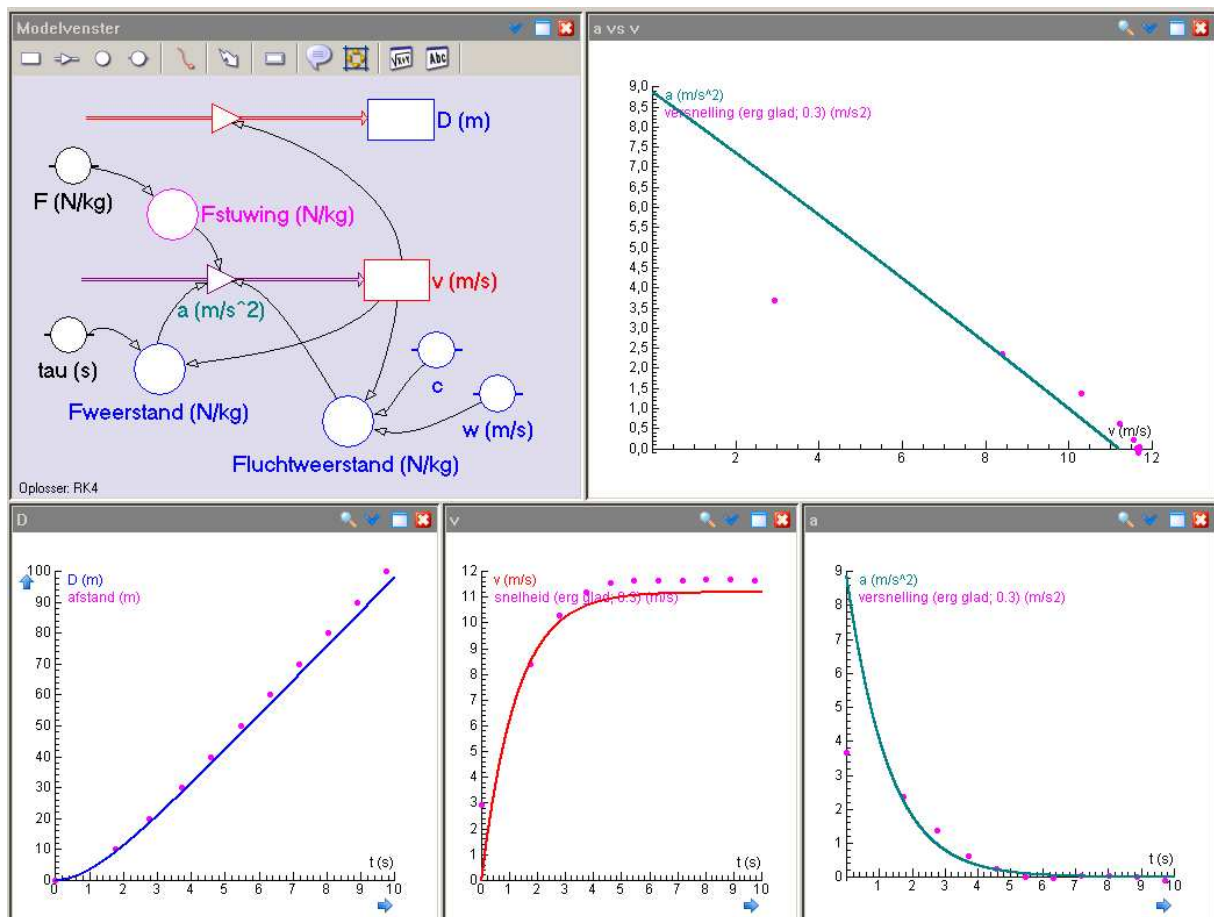
Figuur 4. Simulatie van het Tibshirani-model van Ben Johnson's sprint op het WK 1987.

2.3 Invloed van wind

In de eerste twee modellen is windinvloed verwaarloosd. Aangezien het Reynolds getal voor een hardloper in de orde van grootte van 10^4 tot 10^5 is, mag de luchtweerstandskracht die de atleet ondervindt verondersteld worden evenredig te zijn met het kwadraat van de relatieve snelheid. Als we voor het gemak veronderstellen dat de hardloper met de wind mee of juist tegen de wind in loopt, mogen we dus veronderstellen dat

$$F_{\text{luchtweerstand}} = \frac{1}{2} \rho C_w A (v - w)^2 = mc(v - w)^2, \quad (19)$$

waarbij w de windsnelheid is (positieve waarde betekent meewind), v de snelheid van de hardloper is, ρ de luchtdichtheid is, C_w de weerstandscoefficiënt is, A de oppervlakte van het frontale vlak van de hardloper is, m de massa van de atleet is en c een constante is. $C_w \approx 1$, $A \approx 0.45 \text{ m}^2$ en $c \approx 0.00375$. Luchtweerstand kan eenvoudig in een computermodel worden meegenomen maar het effect op het sprintresultaat is klein, plusminus 3%. Overigens kan dit het verschil betekenen tussen wel of geen record. Figuur 5 laat trouwens wel zien dat wanneer je windinvloed opneemt in het model, de modelparameters voor maximale stuwkracht F en interne weerstand τ veranderd moeten worden. In de schermafdruk hebben we de eerdere waarden voor de sprint van Carl Lewis gebruikt met een windsnelheid van $+0.95 \text{ m/s}$. De nieuwe simulatie wijkt af van de eerder gevonden resultaten. Een aanpassing van $\tau = 1.365 \text{ s}$ en $F = 9.0 \text{ N kg}^{-1}$ geeft al een simulatie die beter past bij de meetgegevens.



Figuur 5. Effect van wind op de simulatie van het Keller-model bij Carl Lewis's sprint.

2.4 Mureika-model

Jonas Mureika heeft in 2001 korte loopnummers gemodelleerd op zowel een wiskundige als natuurkundige grondslag. De bewegingsvergelijkingen van het Keller-model (vgl. 5) en het Tibshirani-model (vgl. 10) zijn als volgt aangepast:

$$v'(t) = f_s + f_h - f_v - f_w, \quad (20)$$

waarbij de termen aan de rechterkant van de vergelijking de volgende interpretaties gegeven worden.

- *Stuwende term* f_s

dit is de stuwkracht die een sprinter in de eerste 25-30 m van een sprint kan aanwenden om uit de startpositie te versnellen. Gekozen is voor een sterk verval van deze voortstuwende term

$$f_s(t) = f_0 e^{-\sigma t^2}, \quad (21)$$

- *Term* f_h *voor handhaving van de voortstuwing*

Dit is een voortstuwende term die de stuwkracht representeert die de hardloper kan handhaven tijdens zijn of haar race. Gekozen is voor een exponentieel verval van deze voortstuwende term

$$f_h(t) = f_1 e^{-ct}, \quad (22)$$

- *De snelheidsterm* f_v

Deze term wordt gelijk gekozen aan die van het Keller-model

$$f_v(t) = v(t)/\tau, \quad (23)$$

o *De luchtweerstandsterm f_w*

Hier heeft Mureika een term toegevoegd aan de traditionele formule voor luchtweerstand (vergelijking 19) om rekening te kunnen houden met het oprichten van het lichaam van een sprinter uit de startpositie tijdens de eerste fase van de race.

$$f_w = \frac{1}{2m} \rho \left(1 - \frac{e^{-\sigma t^2}}{4} \right) C_w A (v - w)^2, \quad (24)$$

waarbij de symbolen de eerder gebruikte betekenis hebben. De luchtdichtheid ρ hangt af van de hoogte waarop het sportgebeuren plaatsvindt. De volgende formule kan gebruikt worden (Mureika, 2005):

$$\rho = \rho_0 e^{-0.000125h}, \quad (25)$$

waarbij ρ_0 de luchtdichtheid op zeeniveau is ($\rho_0 = 1.18 \text{ kg m}^{-3}$ bij $25 \text{ }^\circ\text{C}$) en h de hoogte (in meters) is.

Ook het model van Mureika kan in Coach gemakkelijk gemodelleerd en gesimuleerd worden. De volgende modelparameters zijn gedestilleerd uit resultaten van winnaars bij wereldkampioenschappen en olympische spelen:

$$\begin{aligned} f_0 &= 6.10 \text{ m s}^{-2}, \quad \sigma = 2.22 \text{ s}^{-2}, \quad f_1 = 5.15 \text{ m s}^{-2}, \\ c &= 0.0385 \text{ s}^{-1}, \quad \tau = 3.096 \text{ s}, \quad A_w = \frac{C_w A}{m} = 0.00288 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

Mureika heeft het model ook aangepast om rekening te houden met bochten tijdens 200 m sprint door een dempingcoëfficiënt β aan de stuwende termen toe te voegen:

$$v'(t) = \beta (f_s + f_h) - f_v - f_w, \quad (27)$$

waarbij β afhangt van het nummer van de baan waarin de atleet rent en de snelheid $v(t)$:

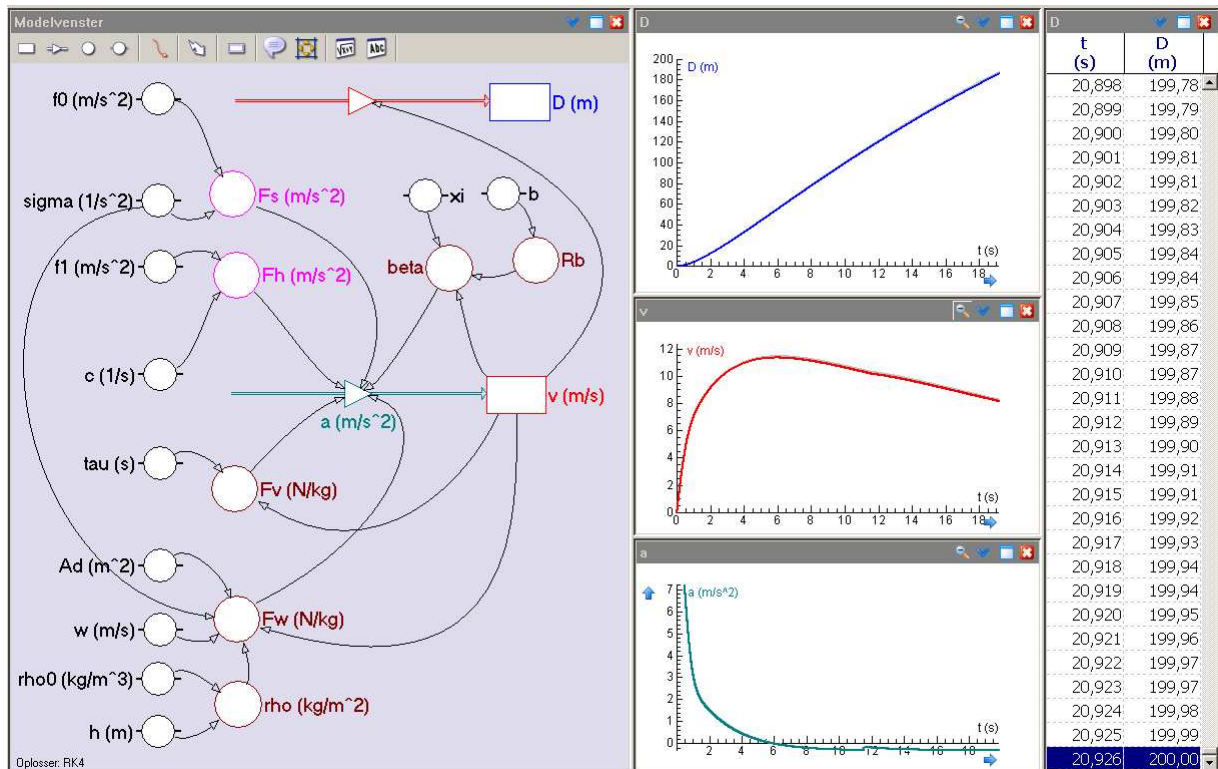
$$\beta = 1 - \frac{\xi v(t)^2}{R_b}, \quad (28)$$

waarbij de straal R_b van baan b op een atletiekbaan die aan IAAF standaarden voldoet (straal van baan één is gelijk aan 36.80m en de breedte van elke baan is gelijk aan 1.22 m) gegeven is door

$$R_b = 36.80 + 1.22(b - 1) \quad (29)$$

en de krommingsfactor ξ experimenteel bepaald is ($\xi \approx 0.015$).

Figuur 6 toont een simulatie met een Coach 6 model van een 200 m sprint in de binnenbaan. Met zo'n model kunnen we de invloed van parameters onderzoeken. Bijvoorbeeld, had dezelfde sprinter in baan 8 gelopen, dan was zijn eindtijd 20.794 s geweest in plaats van 20.926 s. Meer dan ééntiende seconde kan het verschil tussen goed en zilver zijn. Had deze prestatie niet op zeeniveau plaatsgevonden, maar op 2000 m hoogte, dan zou volgens het model de looptijd gelijk geweest zijn aan 20.689 s. Was er steeds een rugwind van 2 m/s geweest, dan zou de eindtijd 20.548 s zijn. Geen wonder dat de IAAF grenzen stelt aan de hoogte en de windsnelheid van sportgebeurtenissen waar wereldrecords gevestigd kunnen worden.



Figuur 6. Simulatie van het Mureka-model van een 200 m sprint op een atletiekbaan.

3. Modellen gebaseerd op de vermogensbalans

Bij de wet van behoud van energie zijn naast kinetische en potentiële energie ook andere vormen van energie betrokken, bijvoorbeeld elastische energie, warmte, chemische energie, etc. In de spieren wordt chemische energie omgezet in mechanische energie, bij concentrische spiersamentrekking (waarbij de spier verkort), met een groot verlies aan warmte. Omgekeerd, kan mechanische energie ook in spiervezels worden opgeslagen, in excentrische spiersamentrekking (waarbij de uitwendige kracht groter is dan de kracht die door de spier wordt geleverd, zodat de spier verlegt). Spieren en pezen kunnen mechanische energie ook opslaan als elastische energie. Een vermogensbalans beschrijft de omzetting van verschillende vormen van energie in elkaar. De vermogensbalans voor een stijf lichaam ziet er als volgt uit:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\text{extern}} F(t) \cdot v(t) + \sum_{\text{extern}} M(t) \cdot \omega(t), \quad (30)$$

waarbij E de mechanische energie is, d.w.z. de som van kinetische en potentiële energie van het lichaam is, $F(t)$ resp. $M(t)$ een op tijdstip t van buiten werkende kracht en moment is, en $v(t)$ resp. $\omega(t)$ de snelheid en hoeksnelheid op tijdstip t is. We gaan de vermogensbalans toepassen op hardlopen.

3.1 Ward-Smith model

John Ward-Smith heeft in 1995 een vermogensbalans tussen het metabole vermogen, de geproduceerde warmte per tijdseenheid, het mechanisch vermogen en het vermogen nodig om luchtweerstand te overwinnen voor een sprinter opgesteld.

Aan de linkerkant van deze vermogensbalans staat het metabole vermogen P_{metabool} die de atleet levert door verbranding van voedingsstoffen. Het metabole vermogen bestaat uit twee gedeelten: het aërobe vermogen $P_{\text{aër}}$, afkomstig van energieproductie waarbij ingeademde

zuurstof een rol speelt, en het anaërobe vermogen P_{an} , waarbij de energieproductie zonder zuurstof plaatsheeft.

$$P_{\text{metabool}} = P_{\text{aër}} + P_{\text{an}} \quad (31)$$

Uit experimenteel onderzoek van o.a. Rodolfo Margaria (1976) blijkt dat aan het begin van een inspanning het aërobe vermogen toeneemt volgens de volgende formule:

$$P_{\text{aër}} = R(1 - e^{-\lambda t}) \quad (32)$$

Let wel, deze formule geldt niet voor onbepaalde tijd want de hoeveelheid aërobe energie $C_{\text{aër}}(T)$ geleverd tot tijdstip T is gelijk aan

$$C_{\text{aër}}(T) = \int_0^T R(1 - e^{-\lambda t}) dt = RT - \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T}) \quad (33)$$

en deze waarde gaat naar oneindig als de tijd T naar oneindig gaat. Maar het menselijk lichaam heeft geen oneindige energiebron. Op lange termijn neemt het maximale aërobe vermogen tijdens een inspanning af.

Voor het anaërobe vermogen heeft Ward-Smith volgens algemene principes die beschreven zijn door Margaria de volgende formule afgeleid:

$$P_{\text{an}} = P_{\text{max}} e^{-\lambda t}, \quad (34)$$

waarbij P_{max} het maximale anaërobe vermogen aan het begin van een inspanning is.

Aan de rechterkant van de vermogensbalans staat het verbruik van energie van de atleet per tijdseenheid. Deze bestaat uit warmteproductie per tijdseenheid, $P_H = \frac{dH}{dt}$, en het vermogen

dat de voortbeweging van de atleet bepaalt, in dit geval de verandering $P_v = \frac{dW}{dt}$ van kinetische energie en wrijvingsenergie. Voor de eerste term kan gekozen worden voor de volgende formule

$$P_H = \alpha \cdot v(t), \quad (35)$$

waarbij α een constante is. De tweede term bestaat uit een luchtweerstandsterm en een kinetische term:

$$P_v = \frac{1}{2} \rho C_w A v (v - w)^2 + m v \frac{dv}{dt}, \quad (36)$$

waarbij w de windsnelheid is (positieve waarde betekent meewind), v de snelheid van de hardloper is, ρ de luchtdichtheid is, C_w de weerstandscoefficiënt is, A de oppervlakte van het frontale vlak van de hardloper is, en m de massa van de atleet is.

Als we vergelijking (32), (34), (35) en (36) in de vermogensbalans invullen, dan krijgen we:

$$R(1 - e^{-\lambda t}) + P_{\text{max}} e^{-\lambda t} = \alpha v + \frac{1}{2} \rho C_w A v (v - w)^2 + m v \frac{dv}{dt} \quad (37)$$

Uit dimensieoverwegingen mogen we aannemen dat de constanten R , P_{max} en α evenredig zijn met de massa m van de atleet. We kunnen vergelijking (37) dus ook schrijven als:

$$\tilde{R}(1 - e^{-\lambda t}) + \tilde{P}_{\text{max}} e^{-\lambda t} = \tilde{\alpha} v + \frac{1}{2} \rho A_w v (v - w)^2 + v \frac{dv}{dt}, \quad (38)$$

waarbij $\tilde{R} = \frac{R}{m}$, $\tilde{P}_{\text{max}} = \frac{P_{\text{max}}}{m}$, $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{m}$ en $A_w = \frac{C_w A}{m}$. We kunnen dit herschrijven als:

$$v' = \frac{1}{v} \left(\tilde{R}(1 - e^{-\lambda t}) + \tilde{P}_{\text{max}} e^{-\lambda t} - \tilde{\alpha} v - \frac{1}{2} \rho A_w v (v - w)^2 \right) \quad (39)$$

Er is maar één probleem met deze differentiaalvergelijking, nl. dat een beginsnelheid $v(0) = 0$ een oneindige versnelling aan de start van de sprint geeft. We kunnen dit probleem omzeilen door voor een numerieke oplossingsmethode met tijdstap Δt als eerste snelheden te kiezen

$$v(0) = 0, v(\Delta t) = \sqrt{2\tilde{P}_{\max} \Delta t} \quad (40)$$

Maar zeker zo handig is om het volgende beginwaardenprobleem op te schrijven voor kinetische energie:

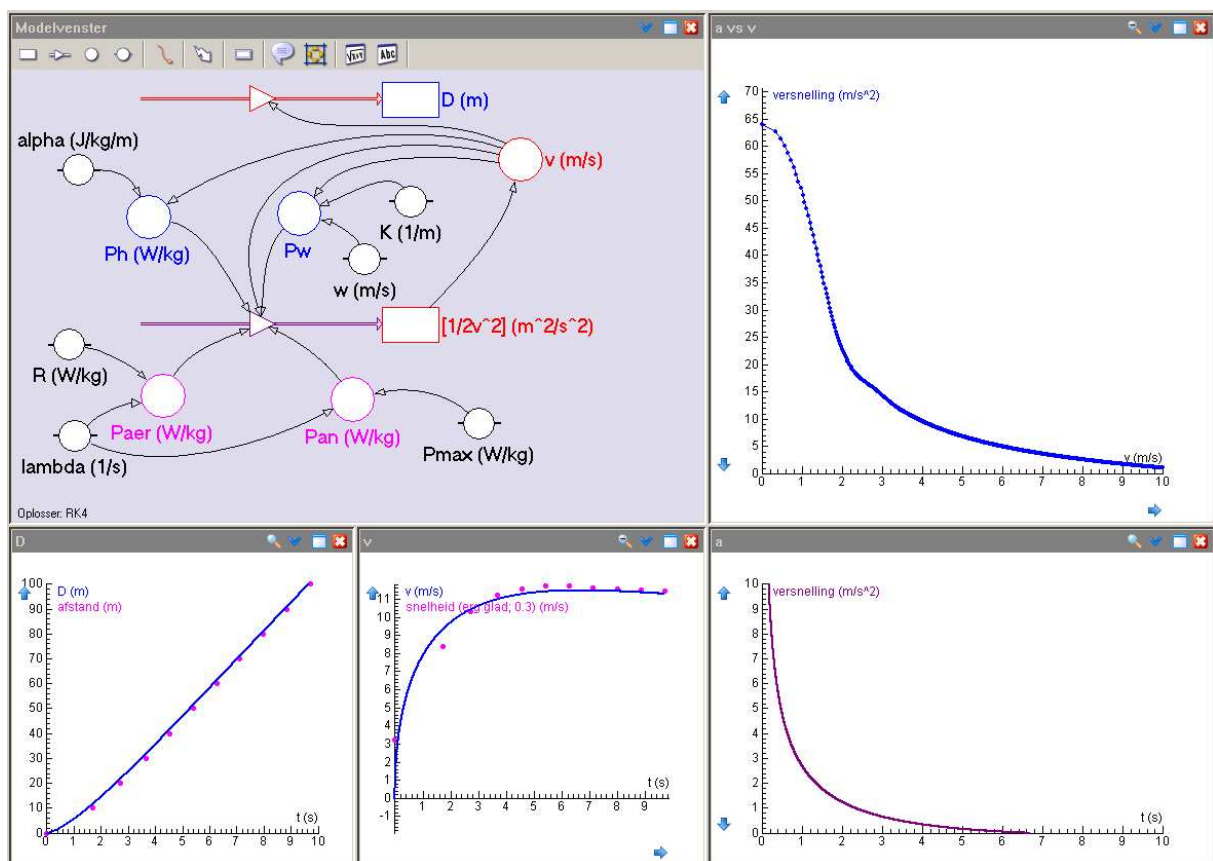
$$\frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt} = \tilde{R}(1 - e^{-\lambda t}) + \tilde{P}_{\max} e^{-\lambda t} - \tilde{\alpha}v - Kv(v-w)^2 \quad (41)$$

$$v(0) = 0$$

met $K = \frac{1}{2} \rho A_w$. Voor de simulatie in Figuur 7 van het Ward-Smith model hebben we de volgende parameterwaarden gekozen:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= 25 \text{ W kg}^{-1}, & \tilde{P}_{\max} &= 54.5 \text{ W kg}^{-1}, & \tilde{\alpha} &= 3.96 \text{ J kg}^{-1} \text{ m}^{-1}, \\ K &= 0.0029 \text{ m}^{-1}, & w &= 0.95 \text{ m s}^{-1}, & \lambda &= 0.03 \text{ s}^{-1} \end{aligned} \quad (42)$$

en de sprintgegevens van Ben Johnson bij de wereldkampioenschappen in 1987 als achtergrondgrafiek gebruikt.



Figuur 7. Simulatie van het model van Ward-Smith voor Ben Johnson's 100m op het WK 1987.

In latere modellen (2000) heeft Ward-Smith het anaërobie vermogen in drie componenten opgedeeld omdat het vermogen aan het allereerste begin van de start anders overschat wordt. Ook heeft hij in navolging van Péronnet en Thibault (1989) de aanname dat het maximale aërobie vermogen constant is laten varen en in 1999 een exponentieel verval na verloop van zekere tijd ingebouwd om middenafstanden en lange afstanden beter te kunnen modelleren.

3.2 Péronnet-Thibault model

Péronnet en Thibault hebben in 1989 een model voor hardlopen opgesteld dat, vergelijkbaar met het Ward-Smith model, uitgaat van een vermogensbalans met een metabool vermogen dat uit een aërobe en anaërobe component bestaat. In tegenstelling tot het Ward-Smith model hebben Péronnet en Thibault aangenomen dat het maximale aërobe vermogen P_{MAP} alleen maar tot een zeker tijdstip, T_{MAP} ($T_{\text{MAP}} \approx 7$ min.), geleverd kan worden en dat daarna dit maximaal te leveren aërobe vermogen lineair afneemt met de logaritme van de tijd. In hun model rekenen Péronnet en Thibault met het gemiddelde geleverde vermogen over een tijdsinterval $(0, T)$. We geven de formules zonder verdere uitleg.

Voor het aërobe vermogen:

$$P_{\text{aër}}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T [\text{BMR} + B(1 - e^{-t/\tau_1})] dt, \quad (43)$$

waarbij BMR resp. MAP staat voor ‘basal metabolic rate’ en ‘maximal aerobic power’ en deze gegeven worden door de volgende formule

$$B = \begin{cases} \text{MAP} - \text{BMR} & \text{als } T \leq T_{\text{MAP}} \\ \text{MAP} - \text{BMR} - E \ln\left(\frac{T}{T_{\text{MAP}}}\right) & \text{als } T > T_{\text{MAP}} \end{cases}, \quad (44)$$

Voor het anaërobe vermogen:

$$P_{\text{an}}(T) = \frac{S}{T} (1 - e^{-T/\tau_2}), \quad (45)$$

waarbij

$$S = \begin{cases} A & \text{als } T \leq T_{\text{MAP}} \\ A \left[1 - f \ln\left(\frac{T}{T_{\text{MAP}}}\right) \right] & \text{als } T > T_{\text{MAP}} \end{cases}, \quad (46)$$

Voor de constanten kunnen bij berekeningen de volgende waarden gebruikt worden:

$$\begin{aligned} A &= 1658 \text{ J kg}^{-1}, & \text{BMR} &= 1.2 \text{ W kg}^{-1}, & \text{MAP} &= 29.1 \text{ W kg}^{-1}, \\ E &= 1.25 \text{ W kg}^{-1}, & f &= 0.233, & T_{\text{MAP}} &= 420 \text{ s}, & \tau_1 &= 30 \text{ s}, & \tau_2 &= 20 \text{ s} \end{aligned} \quad (47)$$

Het gemiddelde vermogen P_v dat de hardloper nodig heeft in een race van tijdsduur T om met snelheid v te rennen (de rechterkant van de vermogensbalans) wordt gegeven door

$$P_v = \text{BMR} + \alpha v + c v (v - w)^2 + \frac{v^3}{2D}, \quad (48)$$

met constanten α en c (en waarbij D de afgelegde weg is). Door voor oplopende waarden van tijd T het volgende stelsel van vergelijkingen op te lossen zijn de gesimuleerde plaats-tijd grafiek en snelheid-tijd grafiek te construeren.

$$\begin{aligned} P_{\text{aër}}(T) + P_{\text{an}}(T) &= P_v \\ D &= T v \end{aligned} \quad (49)$$

We zullen deze numerieke berekeningen niet uitvoeren.

3.3 Van Ingen Schenau model

Gerrit Jan van Ingen Schenau, uitvinder van de klapschaats, Ron Jacobs en Jos de Koning van de Vrije Universiteit in Amsterdam hebben in 1991 onderzoek gedaan naar het verband tussen het vermogen dat een sporter op een fietsergometer kan leveren en het vermogen om een sprintprestatie te leveren. Het model voor sprinten dat zij opgesteld hebben lijkt veel op het Ward-Smith model behalve dat zij het aërobe en anaërobe vermogen onafhankelijk van elkaar

met een exponentiële term beschrijven en dat zij rekening houden met beperkte efficiëntie in energieomzettingen. Hun theoretische model gaat uit van de volgende vermogensbalans

$$P_{\text{metabool}} e_m = H v + k_w v^3 + v \frac{dv}{dt}, \quad (50)$$

waarbij e_m de mechanische efficiëntie van de voortbeweging is. De experimentele waarde van e_m voor schaatsers is bijvoorbeeld gelijk aan 0.228. Het aërobe vermogen neemt toe volgens de volgende formule:

$$P_{\text{aër}} = R(1 - e^{-\lambda_1 t}) \quad (51)$$

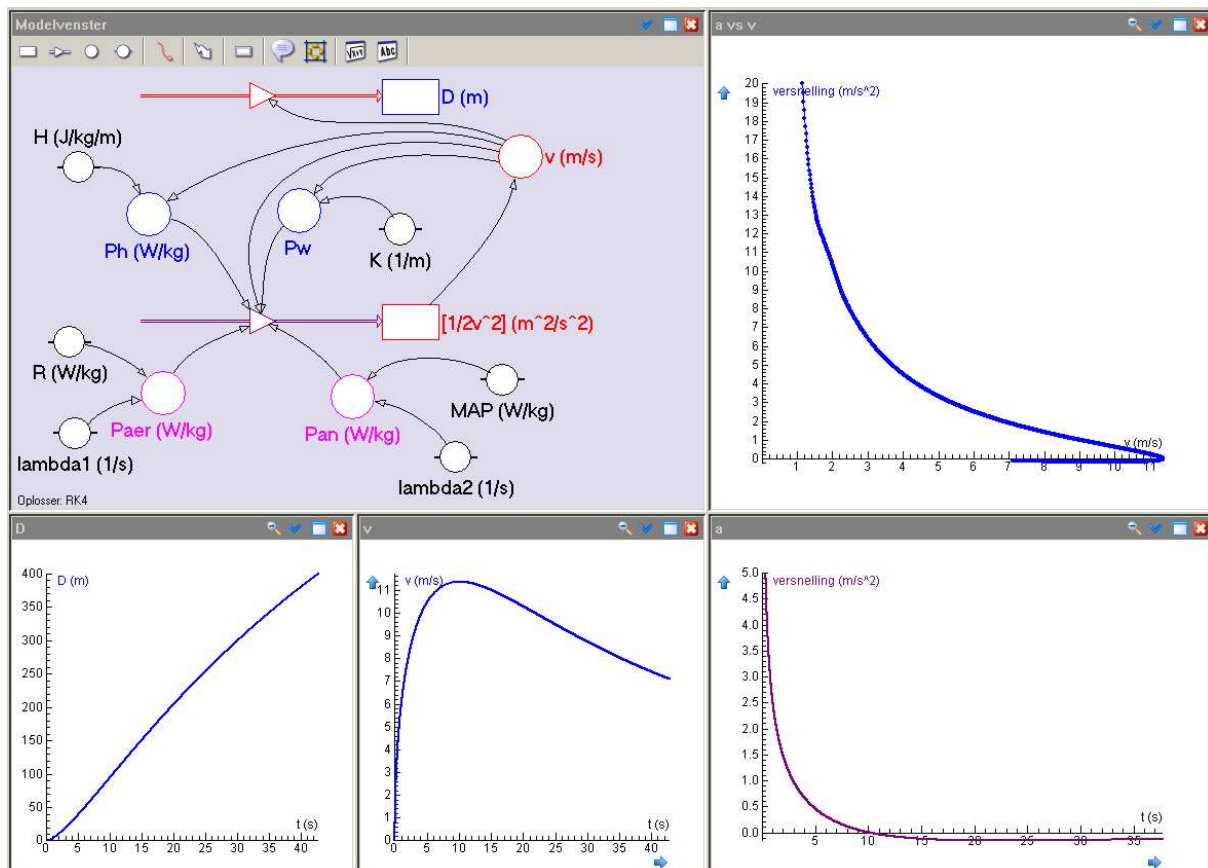
Voor de experimentele waarde voor λ_1 kan 0.0384 s^{-1} genomen worden, Voor het anaërobe vermogen wordt de volgende formule gehanteerd:

$$P_{\text{an}} = E_0 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (52)$$

waarbij E_0 de anaërobe capaciteit is die verkregen wordt door P_{an} te integreren van tot $t=0$ tot $t=\infty$. Voor sprinters zijn de gerapporteerde parameterwaarden $E_0 \lambda_2 = 22.44 \text{ W kg}^{-1}$ en $\lambda_2 = 0.0403 \text{ s}^{-1}$. Van Ingen Schenau en collega's zijn met windtunnelexperimenten tot de volgende differentiaalvergelijking voor sprinten zonder wind gekomen:

$$22.44e^{-0.0403t} + 4.19(1 - e^{-0.0384t}) = 0.97v + 0.00366v^3 + v \frac{dv}{dt}, \quad (53)$$

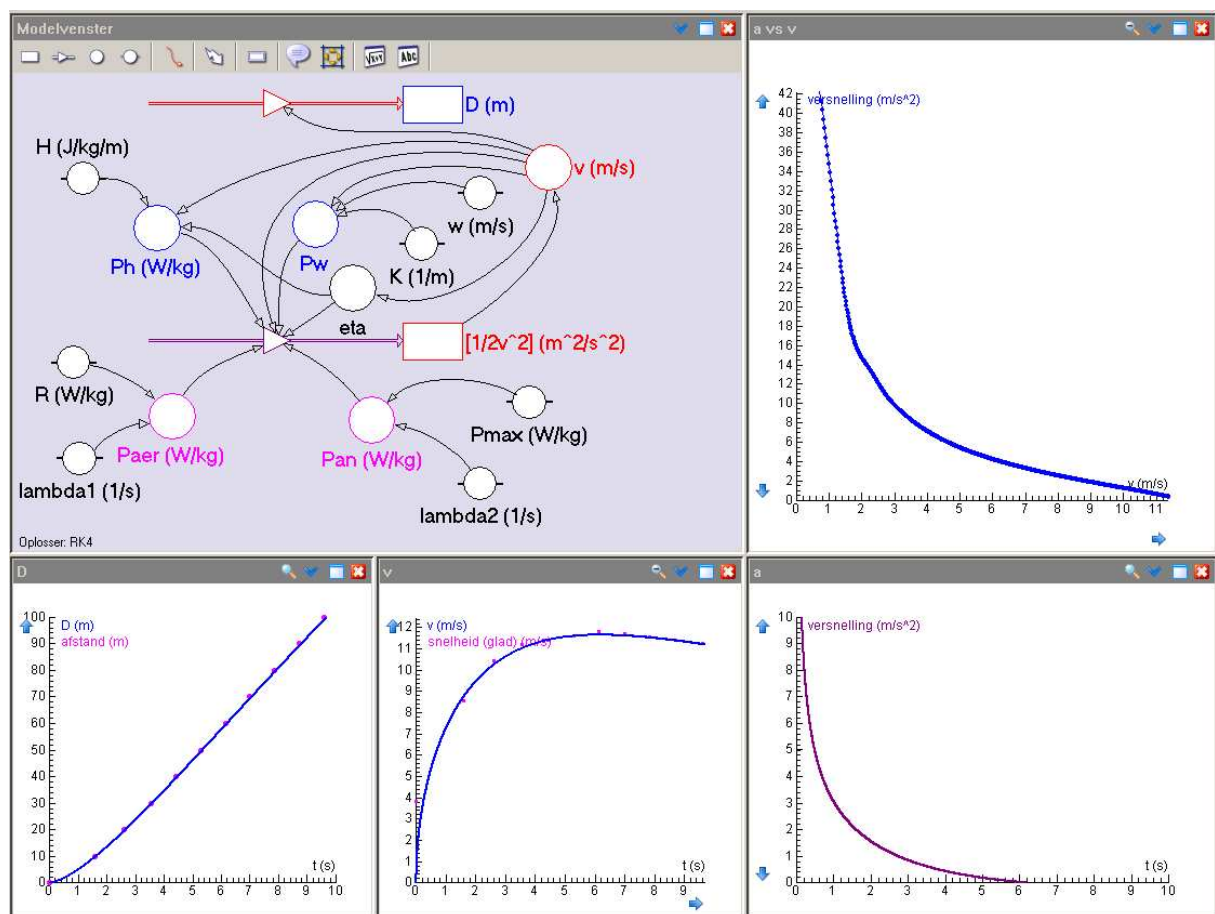
Figuur 8 toont een schermafdruck van een simulatie van dit model voor 400 meter sprint. We hebben het computermodel zodanig opgesteld dat parameterwaarden gemakkelijk aangepast kunnen worden.



Figuur 8. Simulatie van het van Ingen Schenau-model voor 400 m

Laurent Arsac en Elio Locatelli hebben in 2002 het van Ingen Schenau-model toegepast op de 100 m sprint van Maurice Greene en Marion Jones bij de wereldkampioenschappen in Athene in 1997 met nieuwe parameterwaarden. Zij hebben bovendien een lineair verband tussen de mechanische efficiëntie η en de snelheid van de sprinter aangenomen. Figuur 9 toont een schermafdruk van de simulatie van de sprint van Maurice Greene met op de achtergrond de plaats-tijd en snelheid-tijd grafieken. De volgende gegevens van de 100 m sprint van Maurice Greene in de finale van de wereldkampioenschappen atletiek van 1997 in Athene zijn bekend. We corrigeren de tussentijden voor de gemeten reactiesnelheid van 0.134 s. De overeenstemming tussen simulatie en metingen is frappant.

| positie (m) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| tussentijd (s) | 1.71 | 2.75 | 3.67 | 4.55 | 5.42 | 6.27 | 7.12 | 7.98 | 8.85 | 9.73 |
| gecorrigeerde tussentijd (s) | 1.58 | 2.62 | 3.54 | 4.42 | 5.29 | 6.14 | 6.99 | 7.85 | 8.72 | 9.60 |



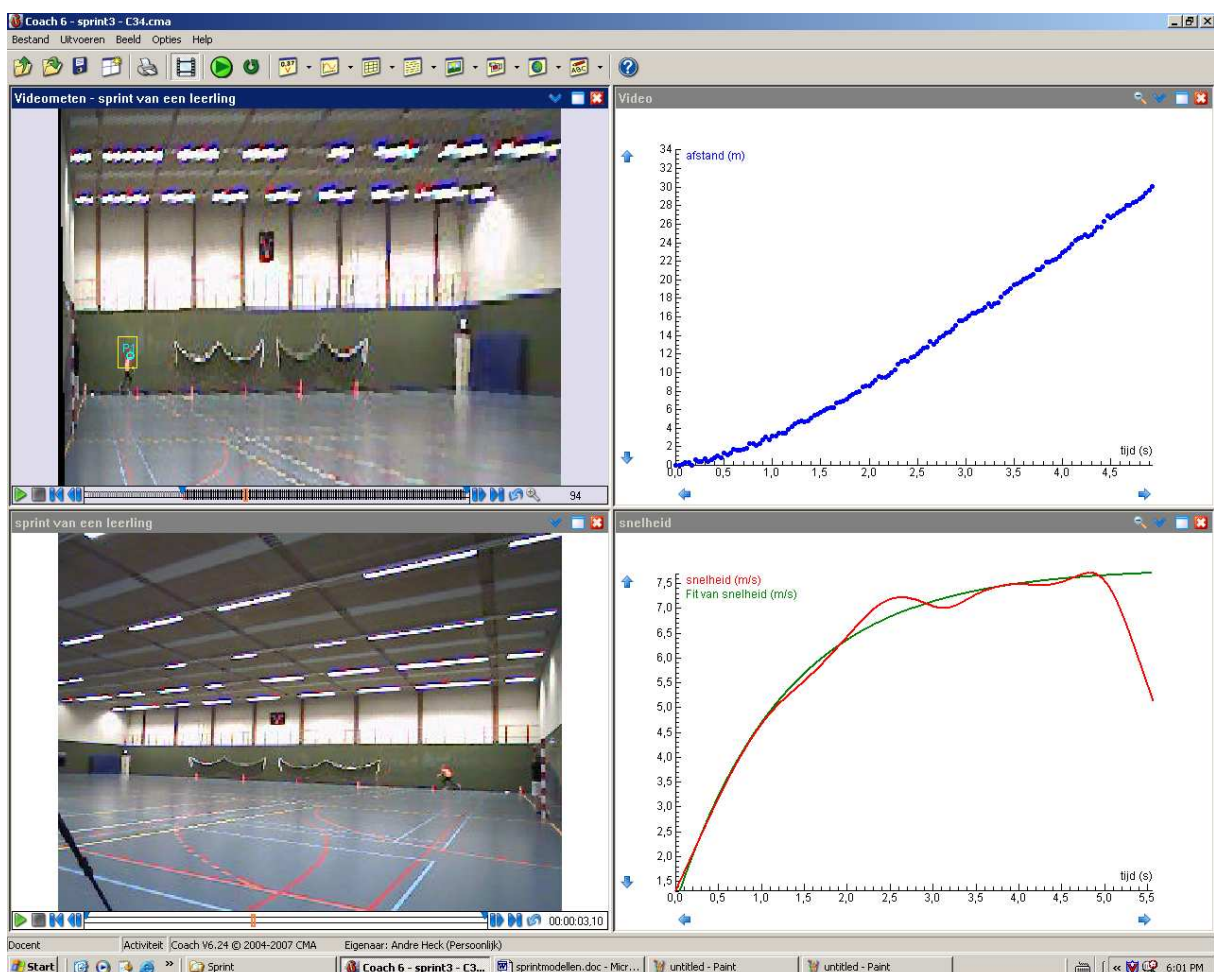
Figuur 9. Simulatie van Maurice Greene's 100 m sprint op het WK 1997 volgens het model van Laurent Arsac en Elio Locatelli

4. Model van een sprintje van een leerling

Het is interessant om modellen te bestuderen van sprintnummers van wereldrecordhouders, maar het is zeker zo boeiend om modellen toe te passen op eigen sprintjes. Eigen loopbewegingen over korte afstand (zeg 25 tot 30 meter) kunnen met een webcam opgenomen worden en de filmpjes kunnen met het videoanalyse gereedschap in Coach 6 bestudeerd worden. Figuur 10 is een schermafdruk van een videometing van een sprint van een 4-vwo leerlinge

van een sprint over 25 meter in een sportzaal. De opname is met een webcam, die 30 beeldjes per seconde filmt, gemaakt vanuit een hoek van de zaal. Oranje pionnen markeren punten op 5 m afstand van elkaar langs een rechte lijn waarlangs gespurt wordt. Linksonder in Figuur 10 staat de originele opgenomen videoclip. Perspectiefcorrectie moet hierop toegepast worden om uit de videoclip echte plaats-tijd gegevens te vinden. Tegelijkertijd hebben we de videoclip horizontaal gespiegeld om de beweging van links naar rechts te krijgen zodat een gewoon assenstelsel gebruikt kan worden. De plaats-tijd grafiek vinden we m.b.v. point-tracking in het filmpje met een geschikt zoekgebied en zoekpatroon. We vinden de snelheid-tijd grafiek door een afgeleide te bepalen via spline-smoothing, met een geschikte mate van gladheid, over het tijdsinterval waarin de leerling de eerste 30 meter aflegt. De snelheid-tijd grafiek kan beschreven worden volgens het Keller-model met een exponentiële functiefit. We vinden in dit geval de volgende formule:

$$v = -6.74e^{-0.7739t} + 7.80 \quad (54)$$

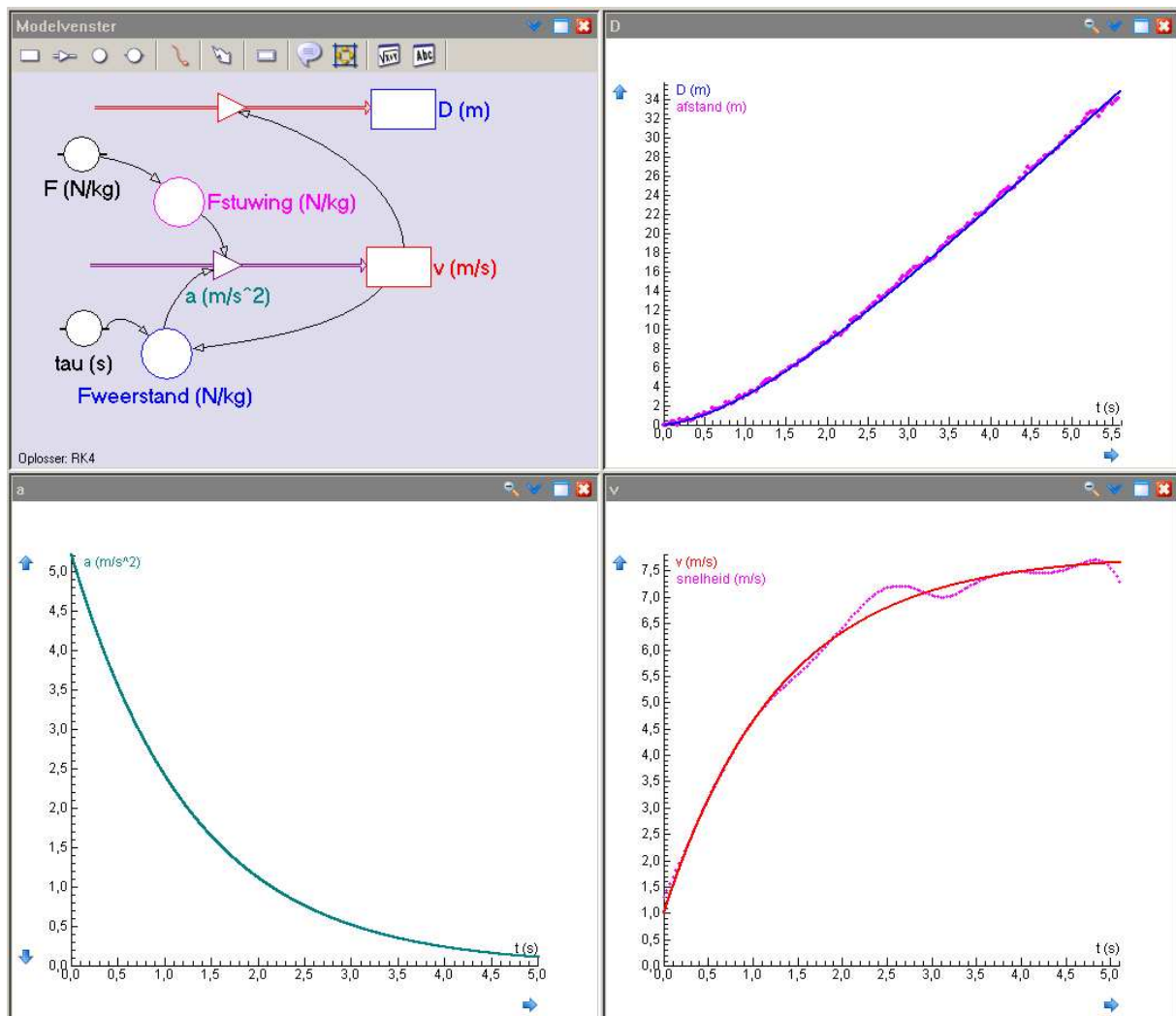


Figuur 10. Videoanalyse van een sprint over 25 m van een 4-vwo leerling in een sportzaal.

Vergelijking (54) kunnen we ook schrijven als

$$v = 6.74(1 - e^{-0.7739t}) + 1.06 \quad (55)$$

In het Keller-model van deze sprint kunnen we dan kiezen: $\frac{1}{\tau} \approx 0.7739 \text{ s}^{-1}$ en dus $\tau \approx 1.3 \text{ s}$ en een beginsnelheid $v(0)$ van 1.06 m/s . Ook kunnen we kiezen: $F \approx 7.80 \times 0.7739 \approx 6.0 \text{ N kg}^{-1}$. De simulatie van het Keller-model met deze parameterwaarden en de gemeten grafieken op de achtergrond is te zien in de schermafdruk van Figuur 11.



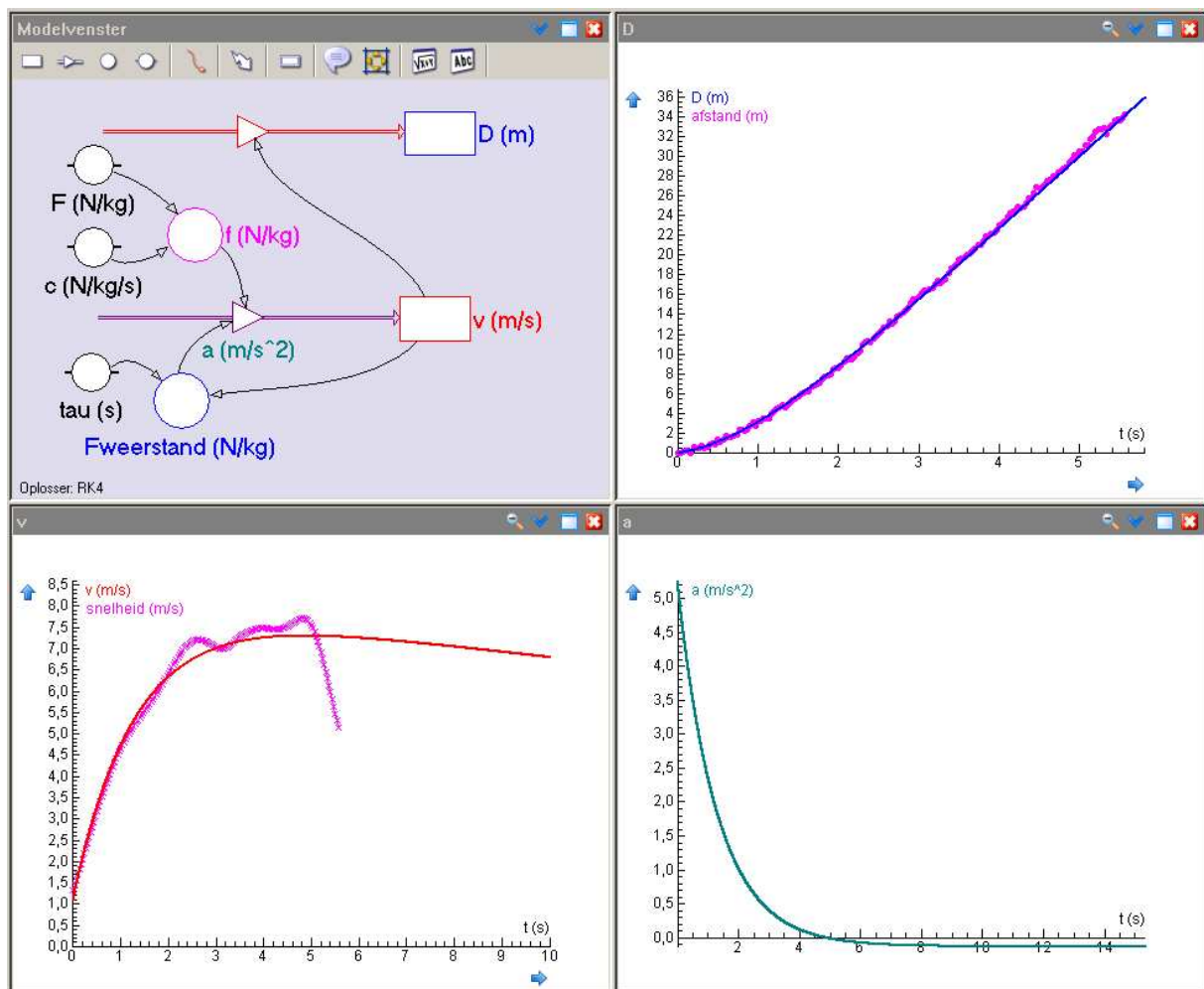
Figuur 11. Simulatie van het Keller-model van het sprintje van de 4-vwo leerlinge.

Wanneer dit model doorgerekend wordt voor 100 m dan zou de eindtijd van de sprint gelijk zijn aan 14 s. Dit is vast een te mooie tijd om waar te zijn omdat de leerlinge de topsnelheid waarschijnlijk niet zo lang kan aanhouden. Het Tibshirani-model kan hier wel rekening mee houden. In de schermafdruk vertoond in Figuur 12 hebben we een afnemende stuwkracht die resulteert in een voorspelde 100 m eindtijd van 15.4 s.

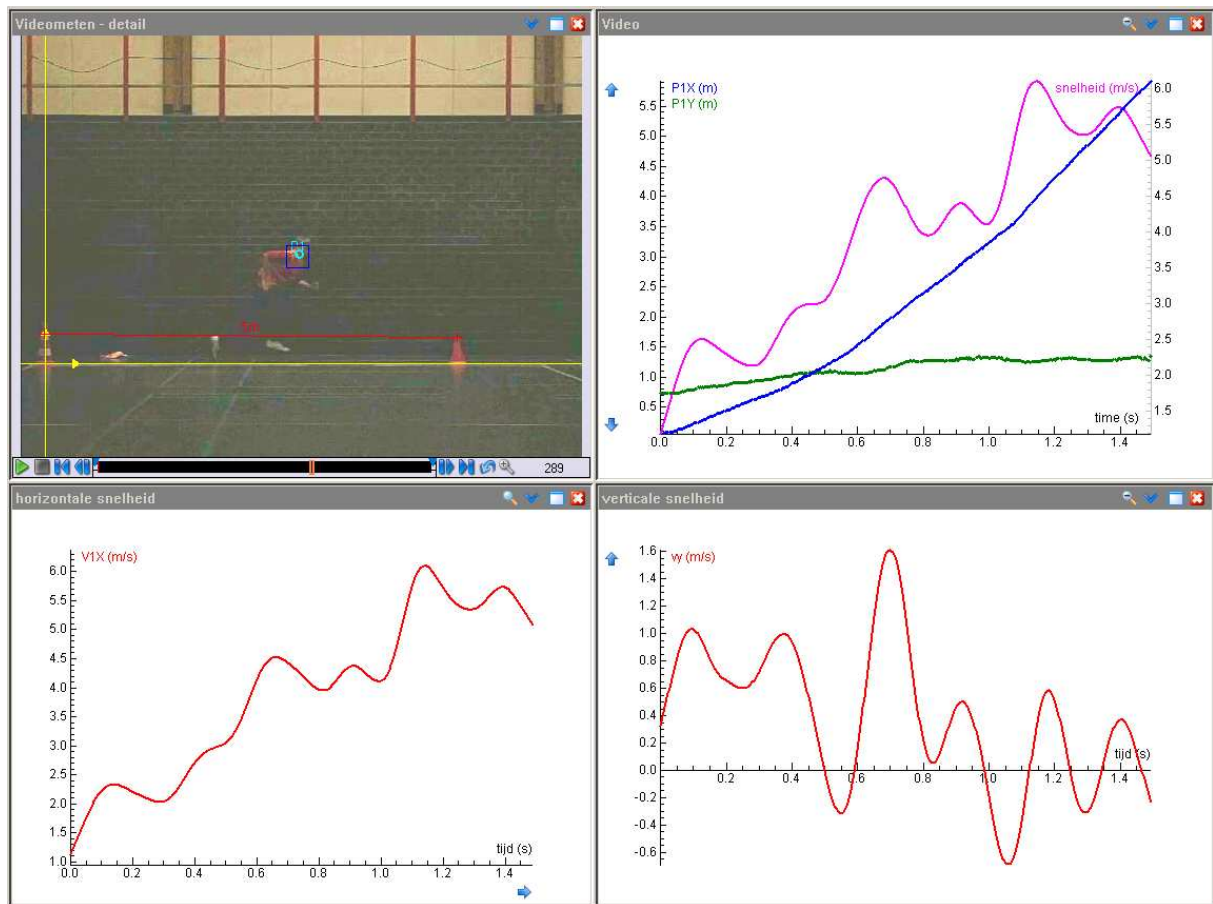
Het is mooi om te zien dat deze simpele wiskundige modellen voor hardlopen over korte afstand al in praktijk goed blijken te werken om een spurt van een leerlinge te modelleren en op basis hiervan voorspellingen over haar sportprestaties te kunnen doen. Ook de andere eerder besproken modellen kunnen met succes worden toegepast op de sprint van de vwo-leerlinge, maar dit levert behalve schattingen van haar maximale aërobe en anaërobe vermogen geen nieuwe inzichten op. In plaats daarvan kunnen we beter in meer detail naar de start van de leerlinge kijken via beelden opgenomen met een hogesnelheidscamera die 300 beeldjes per seconde opneemt. Figuur 13 toont de schermafdruk van de videoanalyse van de videoclip gemaakt met een hogesnelheidscamera die 300 beeldjes per seconde filmt. In deze film zijn de eerste 5 meter na de start te zien en we hebben de schouder van de leerlinge als meetpunt gekozen. De snelheid-tijd grafiek die berekend is via spline-smoothing is eigenlijk het meest interessant. De stijgende en dalende fragmenten van de grafiek zijn te relateren aan de begin van de sprintster: als ze met een been afzet is de snelheidsgrafiek stijgend, tijdens de vlucht-

fase van het lopen daalt de snelheidsgrafiek. De verschillen in opeenvolgende stijgende stukken suggereert dat de stuwkracht die uitgeoefend is niet voor elke been gelijk is geweest: het rechterbeen zet sterker af in de film dan het linkerbeen. Dit kan met links- of rechtshandigheid van de sprintster te maken hebben, maar net zo goed met het zoeken naar een goede balans tijdens deze spurt. Dit vinden we ook terug bij opmeting van de lengtes van de eerste schreden (afstand tussen twee opeenvolgende vloercontacten van dezelfde voet). Voor het linkerbeen zijn de eerste schreden 2.13 m en 2.63 m; voor het rechterbeen 2.36 m en 2.85 m. Een andere interessante grootheid is de hoek van de romp met de horizontaal tijdens de eerste fase van de sprint. Deze kan in de videoclip het gemakkelijkst onderzocht worden door een bewegend assenstelsel met oorsprong op heuphoogte en poolcoördinaten te gebruiken. In Figuur 14 is het resultaat van de meting te zien samen met de grafiek van de snelheid waarmee de romp omhoog komt. In deze fase geeft de snelheidgrafiek nog een bijna lineair verband met de tijd aan, hetgeen een kwadratische fit voor de romphoek suggereert. Omdat op de langere termijn de romphoek naar verwachting constant wordt is in de schermafdruck ook een exponentiële fit te zien; ook deze is in redelijke overeenstemming met de meetresultaten.

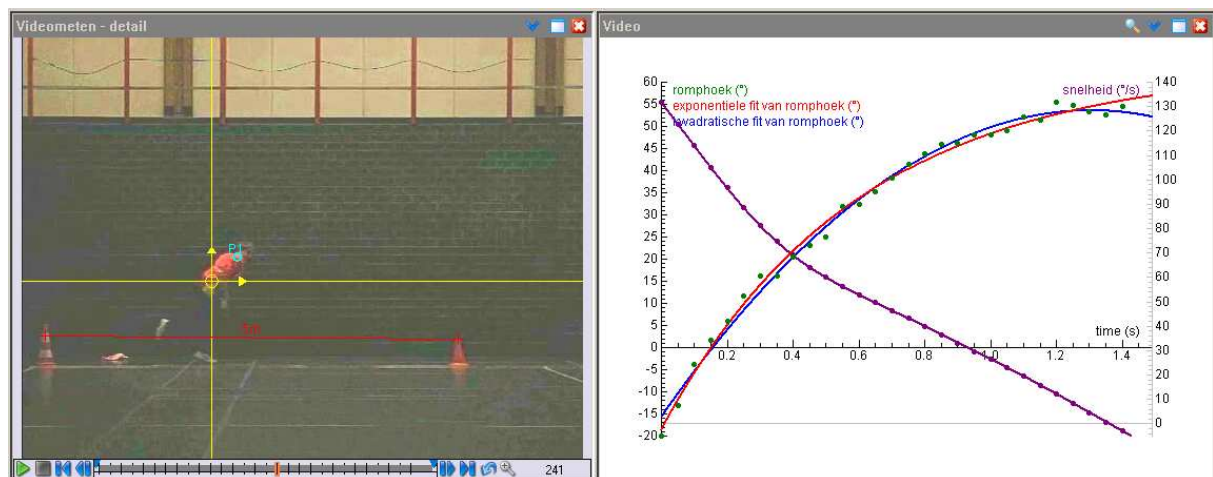
Kortom, de grafieken en gemeten afstanden zijn niet abstracte wiskundige zaken, maar ze zeggen iets over de wijze waarop de sprintbeweging is uitgevoerd en ze horen ook echt bij een context die er niet met de haren bijgesleept is. Wanneer een leerling een dergelijk onderzoek over zichzelf uitvoert is de hoop en verwachting dat dit veel spannender en interessanter is dan een studie van de sprint van iemand anders. Ook kunnen leerlingen hun resultaten met die van klasgenoten vergelijken.



Figuur 12. Simulatie van het Tibshirani-model van het sprintje van de 4-vwo leerling.



Figuur 13. Videoanalyse van de eerste meters van de sprint van de 4-vwo leerling.



Figuur 14. Videoanalyse van de romphoek tijdens de eerste fase van de sprint.

Literatuur

- Igor Alexandrov & Philip Lucht (1981), Physics of Sprinting, *American Journal of Physics* **49** (3) 254-257.
- Laurent Arzac & Elio Locatelli (2001), Modeling the Energetics of 100-m Running by Using Speed Curves of World Champions. *Journal of Applied Physiology* **92** (11) 1781-1788.

- Joseph Keller (1973), A Theory of Competitive Running. *Physics Today* **26** (9) 42-47.
- Joseph Keller (1974), Optimal Velocity in a Race. *The American Mathematical Monthly* **81** (5) 474-480.
- Rodolfo Margaria (1976) *Biomechanics and Energetics of Muscular Exercise*. Clarendon Press, Oxford, pp. 21-27.
- Jonas Mureika (1997), A Simple Model for Predicting Sprint Race Times Accounting for Energy Loss on the Curve. *Canadian Journal of Physics* **75** (11) 837-851.
- Jonas Mureika (2001), A Realistic Quasi-Physical Model of the 100 m Dash. *Canadian Journal of Physics* **79** (4) 697-713.
- Jonas Mureika (2005), The Effects of Temperature, Humidity, and Barometric Pressure on Short-Sprint Race Times. *Canadian Journal of Physics* **84** (4) 311-324.
- François Péronnet & Guy Thibault (1989), Mathematical Analysis of Running Performance and World Running Records. *Journal of Applied Physiology* **67** (1) 453-465.
- William Pritchard (1993), Mathematical Models of Running. *SIAM Review* **35** (3) 359-379.
- Robert Tibshirani (1997), Who is the Fastest Man in the World?, *The American Statistician* **51** (2) 106-111.
- John Ward-Smith (1985), A Mathematical Theory of Running, Based on the First Law of Thermodynamics, and its Application to the Performance of World-Class Athletes. *Journal of Biomechanics* **18** (5) 337-349.
- John Ward-Smith (1989), The Bioenergetics of Optimal Performances in Middle-Distance and Long-Distance Track Running. *Journal of Biomechanics* **32** (5) 461-465.
- John Ward-Smith & Peter Radford (2000), Investigation of the Kinetics of Anaerobic Metabolism by Analysis of the Performance of Elite Sprinters. *Journal of Biomechanics* **33** (8) 997-1004.
- William Woodside (1991), The Optimal Strategy for Running a Race (A Mathematical Model for World Records from 50 m to 275 m). *Mathematical and Computer Modelling* **15** (10) 1-12