

# Wiskundige CSI

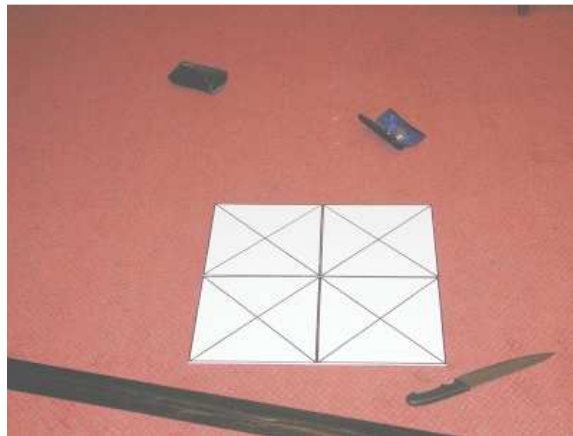
[André Heck]

## Meten op een foto

In elke aflevering van de tv-serie *Numb3rs* helpt wiskundige Charlie Eppes zijn broer, FBI-agent Don, met speels gemak om een misdaad op te lossen. In programma's als *CSI* en *Law & Order* zijn resultaten van DNA testen, toxicologisch onderzoek en van zoektochten in databanken in een mum van tijd beschikbaar. In deze misdaadprogramma's kunnen de meest wazige foto's en videobeelden en de slechtste geluidsopnames gemaakt op een plaats delict zodanig opgepoetst worden dat allerlei details snel beschikbaar komen.

De werkelijkheid is weerbarstiger en minder melodramatisch. Bij echt forensisch onderzoek gaat het om zorgvuldige en objectieve verzameling, documentatie en veiligstelling van sporen op een plaats delict of op een plek waar een ongeval plaatsgevonden heeft. Forensische fotografie is een van de technieken die hierbij gebruikt wordt. Vaste onderdelen zijn het maken van overzichtsfoto's vanuit diverse gezichtspunten, het maken van mid-range foto's waarin de aandacht uitgaat naar onderlinge positie van objecten die in het criminele onderzoek of de juridische afhandeling een rol kunnen spelen en het maken van close-up foto's voor interessante details. In dit artikel ga ik in op de tweede soort van forensische foto's.

In figuur 1 is een foto te zien die gemaakt is tijdens de werkgroep *Wiskunde ontwikkelen met foto's* op de Nationale Wiskunde Dagen 2008.<sup>[1]</sup> Het is een foto van de plaats delict van een ter plekke in scène gezet misdrijf. Toegegeven, de kwaliteit van de foto voor forensisch gebruik is voor verbetering vatbaar, maar het doel in de werkgroep was om te laten zien dat je in vijf minuten tijd zo'n foto kunt maken, importeren op de computer en desgewenst kunt bewerken voor verder gebruik in een dynamisch meetkundepakket zoals het gratis te downloaden pakket GeoGebra<sup>[2]</sup> of in een computerwerkomgeving zoals Coach.<sup>[3]</sup> Het mes, de brillendoos en de portemonnee zijn de door deelnemers meegebrachte objecten die in de fictieve misdaad een rol gespeeld hebben. Maar de fotograaf heeft nog een vierde object ter plekke neergelegd: een zogenaamd perspectiefvierkant, bestaande uit vier tegels van gelijke soort en met identieke afmetingen die zodanig aan elkaar geschoven zijn dat ze samen een vierkant vormen. Het perspectiefvierkant is het enige object op de foto waarvan de werkelijke afmeting bekend is en zal gebruikt worden om de grootte en de onderlinge positie van de andere objecten te bepalen. Zo'n hulpmiddel is nodig omdat je de plaats delict op de foto in perspectief ziet en hierdoor geen zodanig eenvoudige afstandsrelatie tussen objecten hebt dat je deze simpelweg met een liniaal kunt opmeten.



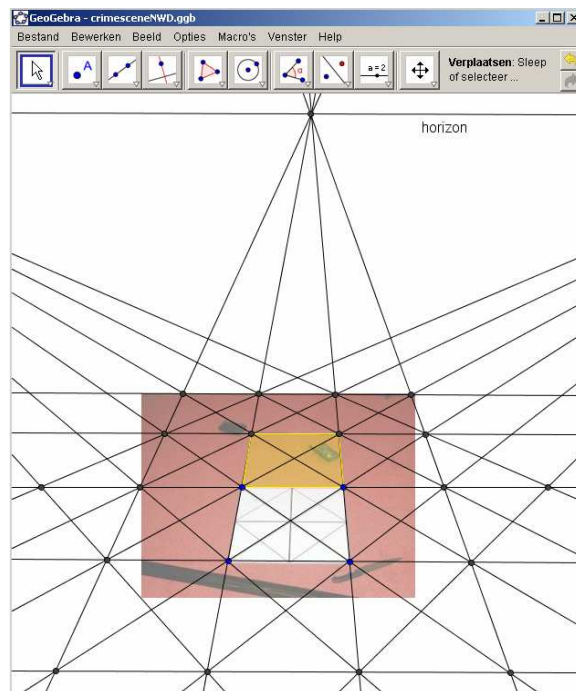
**Figuur 1.** Foto van de plaats delict.

## Gebruik van het perspectiefvierkant in een meetkundige aanpak

Er zijn twee redenen om een perspectiefvierkant in de forensische foto te gebruiken:

1. het is een object op de foto waarvan de werkelijke afmeting in ieder geval nauwkeurig en buiten alle twijfel bekend is;
2. de vorm van dit object is zodanig gekozen dat – zoals de naam suggereert – voor afstandsmetingen met de perspectivische vervorming op de foto rekening gehouden kan worden.

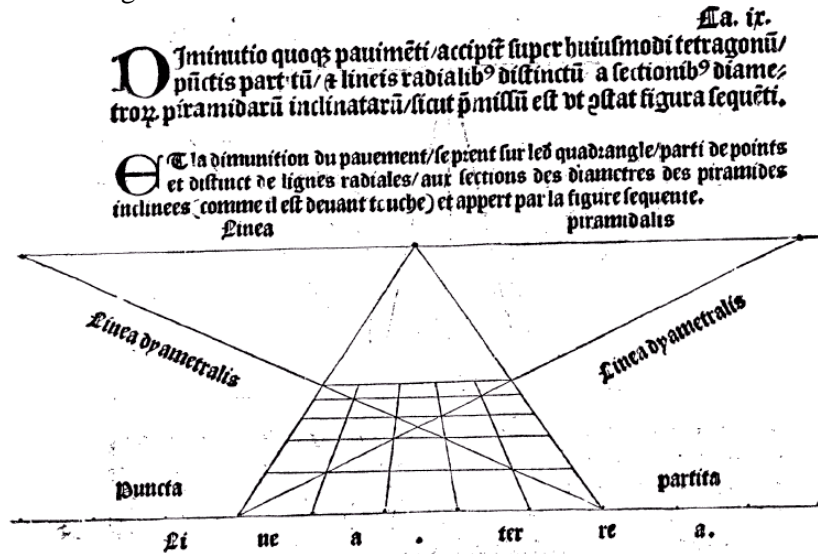
De tweede reden is de belangrijkste en voor de keuze van het perspectiefvierkant heb ik me laten leiden door de gedetailleerde beschrijving in het recente boek *Crime Scene Photography* van Edward Robinson.<sup>[4]</sup> In deze sectie leg ik kort uit hoe het vierkant gebruikt kan worden om de locaties van de objecten op de foto met elke gewenste precisie te bepalen. Enerzijds gebeurt dit door een proces van uitbreiding van het perspectiefvierkant tot een groter tegelpatroon over de vloer en anderzijds door een proces van verfijning van dit rooster. Figuur 2 toont de uitbreidingsoperatie uitgevoerd met het dynamische wiskundepakket GeoGebra. Het vierkant waarbinnen de brillendoos zich bevindt is gearceerd.



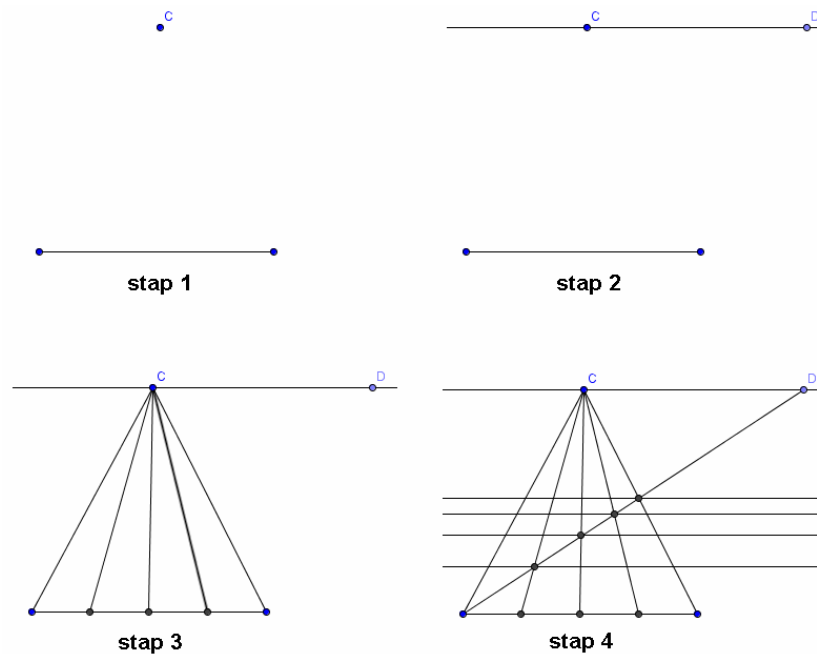
**Figuur 2.** Uitbreiding van het perspectiefvierkant tot een groter tegelpatroon.

De uitbreiding van het gegeven perspectiefvierkant tot een betegeling van een groter vloeroppervlak vindt zijn oorsprong in de constructies van tegelvloeren in eenpunts of centraal perspectief die in de Renaissance in de schilderkunst ontwikkeld zijn. Een van de meest bekende methoden is afkomstig van Leon Battista Alberti (1407-1472), die hij "modo ottimo" ("beste manier") noemde in zijn verhandeling getiteld *Il Trattato della Pittura e I Cinque Ordini Archittonici* ("over schilderen", 1436) en die beter bekend is onder de Italiaanse naamgeving van "costruzione legittima" ("legitieme constructie"). Een meer wiskundige onderbouwing van deze methode is door Piero della Francesca (1412-1492) opgeschreven in de trilogie *De Prospectiva Pingendi* ("over perspectief bij schilderen", verschenen in de periode 1484-1487). De geïnteresseerde lezer wordt voor meer details verwezen naar het prachtige boek *Piero della Francesca, A Mathematician's Art* van J.V. Field<sup>[5]</sup> en naar vakliteratuur.<sup>[6,7]</sup> Hans de Rijk<sup>[8]</sup> heeft eerder in Euclides een toegankelijke beschrijving van Alberti's aanpak gegeven.

Maar in feite is de methode waarop het perspectiefvierkant in de forensische praktijk gebruikt wordt meer verwant met de zogenaamde *distantiepunt constructie*. Deze methode is voor het eerst beschreven door Jean Pélerin (alias Viator, 1445-1524) in zijn boek *De Artifici-ali Perspectiva* uit 1505, maar was vermoedelijk ook al in Italië in de vijftiende eeuw bekend. Figuur 3 toont een fragment uit de derde editie van dit boek<sup>[9]</sup> dat gaat over de genoemde methode, waarvan aangetoond kan worden dat deze dezelfde resultaten oplevert als Alberti's methode. We zullen in de laatste paragraaf het bewijs leveren. Dan zal ook meer duidelijk worden waarom de distantiepunt methode goed werkt en welke rol de (gewenste) afstand van het oog tot het tafereel speelt. Figuur 4 toont de vier stappen in de distantiepunt constructie voor een tegelvloer met zestien vierkanten. Deze constructie is met een dynamisch meetkundepakket eenvoudig na te doen.



Figuur 3. Fragment uit Pélerin's boek over de distantiepunt constructie.



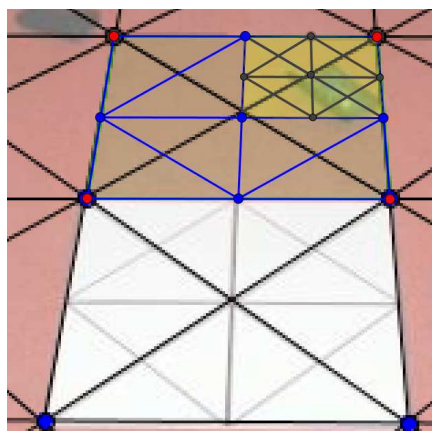
Figuur 4. Stappen in de distantiepunt constructie van Pélerin.

De stappen uit de distantiepunt constructie zijn:

1. Teken de basislijn voor de tegelvloer en kies de positie van het centrale punt C.
2. Teken de horizon door C en kies een punt D zodat de afstand CD gelijk is aan de (gewenste) afstand van het oog tot de afbeelding.
3. Verdeel een stukje van de basislijn in een gewenst aantal gelijke delen en verbind de verdelingspunten met C.
4. Teken een rechte lijn van D naar het tegenoverliggende einde van het basislijnstuk en teken door elk snijpunt van deze lijn door D met de lijnen door C een lijn parallel aan de basislijn.

De verfijning van het tegelpatroon tot een rooster waarin met meer precisie de locatie van een object is vastgelegd is een proces waarin in de eerste stap elk gewenst kopie van het perspectiefvierkant in het uitgebreide tegelpatroon op zijn beurt verdeeld wordt in vier gelijkvormige perspectiefvierkanten met gehalveerde grootte. Dit proces kun je vervolgens zo vaak herhalen als je nodig acht. In het gegeven voorbeeld is de werkelijke lengte van elke zijde van het oorspronkelijke perspectiefvierkant gelijk gekozen aan  $\frac{1}{2}$  m. Na de eerste verfijning ontstaat een vierkant met de werkelijke lengte van elke zijde gelijk aan  $(\frac{1}{2})^2$  m. Na de tweede stap in het verfijningproces is de werkelijke lengte van elke zijde  $(\frac{1}{2})^3$  m. Na  $n$  stappen is de nauwkeurigheid waarmee een werkelijke positie bepaald kan worden dus gelijk aan  $(\frac{1}{2})^n$  m. Je kunt dus zo nauwkeurig werken als je nodig acht. Figuur 5 illustreert de eerste stap in het verfijningproces voor het vierkant waarin de brillendoos ligt. Ruw geschat op basis van deze figuur ligt de brillendoos  $\frac{3}{8}$  m rechts en  $\frac{1}{8}$  m naar voren toe van de portemonnee vandaan. Dit geeft een ruwe schatting van de tussenliggende ruimte van  $\frac{1}{8}\sqrt{10}$  m  $\approx$  39,5 cm. De verfijningsprocedure is als volgt:

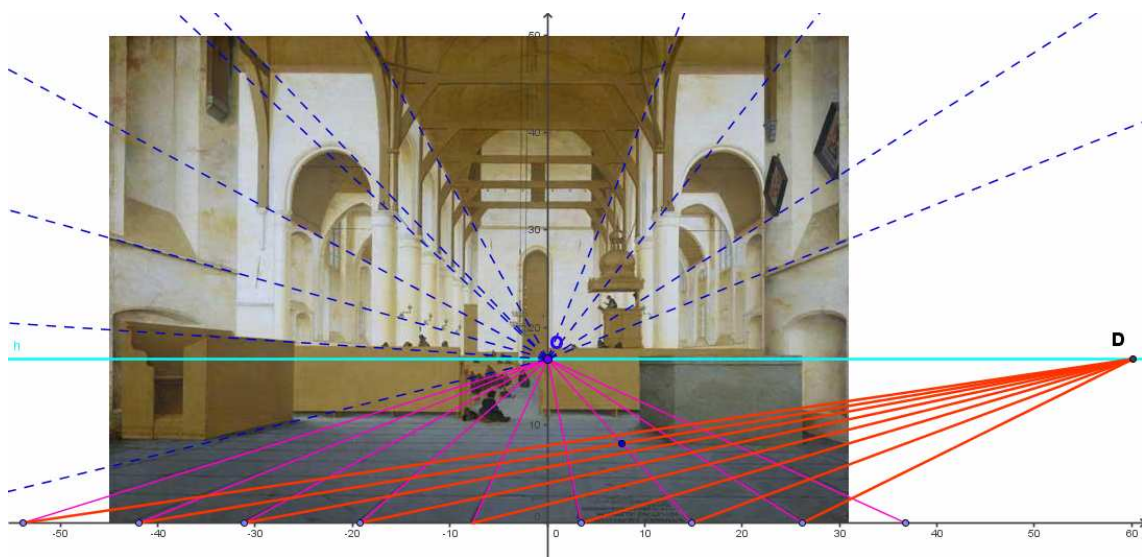
1. Kies een vierkant in het uitgebreide rooster, markeer de vier hoekpunten en verbind ze onderling met lijnstukken.
2. Construeer de middens van de lijnstukken die de gemarkeerde hoekpunten verbinden.
3. Verbind de in de vorige stap gevonden punten met lijnstukken: je hebt nu een kopie van het oorspronkelijke perspectiefvierkant geconstrueerd.
4. Kies in de kopie van het oorspronkelijke perspectiefvierkant een kwadrant, zeg rechtsboven, en herhaal de eerste drie stappen voor dit vierkant. Je hebt nu een perspectiefvierkant geconstrueerd dat tweemaal zo klein is als het perspectiefvierkant waar je mee begon.



**Figuur 5.** Verfijning van het rooster.

Het is eigenlijk wel aardig dat de moderne toepassing van wiskunde in forensisch onderzoek teruggrijpt op de wiskunde van het perspectief zoals die in de Renaissance voor schilderkunst ontwikkeld is. Leerlingen zouden met precies dezelfde middelen, d.w.z. projectieve meetkunde en computergebruik, perspectief in kunst kunnen bestuderen. Een interessante link

tussen wiskunde en het schoolvak Kunst (beeldende vormgeving) is te realiseren; het Zebra-boekje *Perspectief, hoe moet je dat zien?*<sup>[10]</sup> is hierbij uitermate nuttig. Een meer veelzijdige toepassing van dezelfde wiskunde is haast niet denkbaar. Met ICT-ondersteuning in de vorm van een dynamisch meetkundepakket en gebruikmakend foto's van schilderijen kunnen leerlingen zelfstandig onderzoek naar het gebruik van perspectief in de schilderkunst uitvoeren. Het is dan wel relevant dat in de gebruikte schilderijen duidelijke aanwijzingen te vinden zijn van gebruik van perspectiefleer omdat anders ligt het gevaar van "wishful thinking" op de loer ligt. In Figuur 6 is te zien hoe de distantiepunt methode gebruikt is om een schilderij van Pieter Jansz. Saenredam (1597-1665) te analyseren. De tegelvloer is gebruikt om het oogpunt O en het distantiepunt D op de horizon te bepalen. Het assenstelsel is zodanig gekozen dat de oorsprong met het punt O samenvalt en de schaling van de assen past bij de werkelijke afmetingen van het schilderij (76x50 cm). Tussen twee haakjes, het schilderij betreft een olieverf op paneel uit 1649, getiteld *Interieur van de Sint-Odulphuskerk te Assendelft*. Het schilderij maakt onderdeel uit van de collectie van het Rijksmuseum te Amsterdam. Stippellijnen in onderstaande figuur illustreren dat de schilder, zoals altijd, in eenpunts perspectief gewerkt heeft. Om in de sfeer van een wiskundige thriller terug te keren, kun je de vraag stellen of met de kennis van het distantiepunt dat bij het schilderij past te achterhalen is of de schilder wel in staat geweest kan zijn om fysiek binnen in de kerk op het oog aan het schilderij te werken of dat hij gebruik gemaakt heeft van zijn artistieke vrijheid. Welke gegevens van de werkelijkheid zouden dan nog meer bekend moeten zijn? Hans de Rijk heeft in een aantal columns die in 2002 verschenen zijn in *Ars et Mathesis*<sup>[11]</sup> voorbeelden gegeven van schilderijen en tekeningen waarin het perspectief "liegt" en de schilder wel stiekem het oogpunt verplaatst moet hebben om een deel van de omgeving scherp te kunnen zien en te schilderen. Dergelijke studies zijn een spannende speurtocht voor de liefhebber.

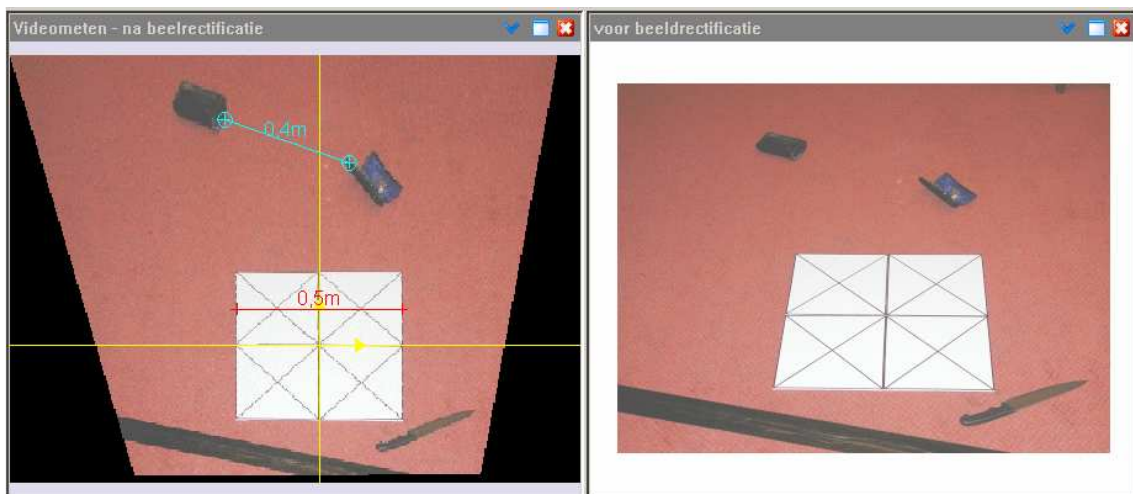


**Figuur 6.** Pieter Jansz. Saenredam, *Interieur van de Sint-Odulphuskerk te Assendelft* (Rijksmuseum, Amsterdam). Hulplijnen toegevoegd.

Laten we terugkeren naar de situatie van de analyse van een plaats delict. Vanzelfsprekend wordt tegenwoordig de distantiepunt methode niet meer met de hand door een forensisch onderzoeker gedaan, maar is deze ingebouwd en geautomatiseerd in computerprogramma's zodat direct op digitale foto's gemeten kan worden en posities van objecten te bepalen zijn. Projectieve meetkunde is bij de computerimplementatie van deze methoden de broodnodige fundering.

## Gebruik van het perspectiefvierkant voor beeldrectificatie

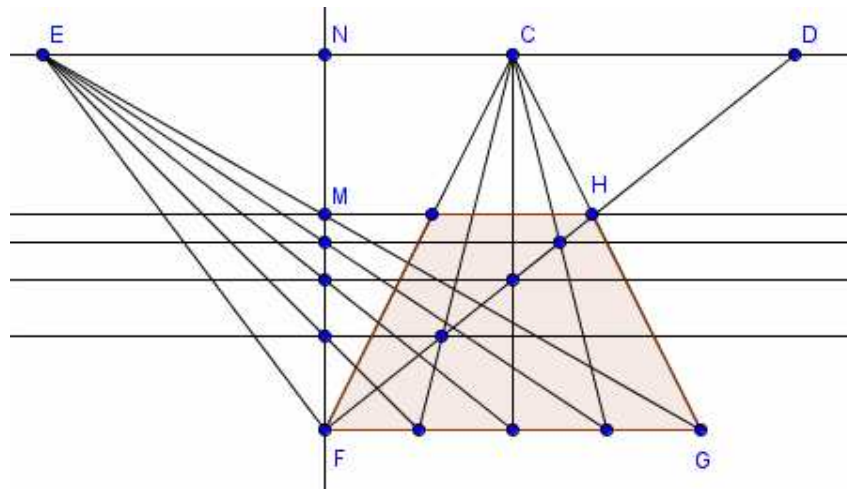
Het grootste probleem met het meten van posities en afstanden op de foto van de plaats delict is zogezeegd de perspectivische vervorming. Een alternatief voor de eerder beschreven meetkundige aanpak van het probleem is om voorafgaand aan het opmeten van foto's en video-clips het digitale beeldmateriaal dusdanig te bewerken dat de perspectivische vertekening van objecten verdwijnt. Het is mogelijk om een projectieve transformatie toe te passen op de foto die de perspectivische vertekening van het perspectiefvierkant ongedaan maakt en een foto oplevert vanuit frontaal-parallel gezichtspunt. Het resultaat, dat verkregen is met de computerwerkomgeving Coach, is in Figuur 7 te zien. Dit herstel van rechte hoeken en parallelle lijnen in het grondvlak is een voorbeeld van beeldrectificatie. Hierna kunnen posities en afstand direct gemeten worden op de bewerkte foto t.o.v. een zelfgekozen assenstelsel. De gebruikersinterface is door iedere leerling en leraar te hanteren: op de oorspronkelijke foto leg je een vierhoek zodanig neer dat de hoekpunten overeenstemmen met de hoekpunten van een object dat in werkelijkheid een rechthoek is. De software rekent de projectieve afbeelding die de geselecteerde vierhoek in een rechthoek transformeert uit en past deze afbeelding op de digitale foto toe. In dit geval wordt het perspectiefvierkant als rechthoek aangewezen. Hierna is het slechts een kwestie van vergroten of verkleinen in beide richtingen (en eventueel verschuiven van het zichtbare gedeelte van de foto) om uiteindelijk tot een foto met het vierkant en de objecten in beeld te komen. Met een digitale liniaal is dan op de gerectificeerde foto direct te achterhalen dat de werkelijke afstand tussen brillendoos en portemonnee gelijk is aan 40 cm en dat het mes in werkelijkheid 32 cm lang is. Het eerste resultaat stemt goed overeen met de eerdere ruwe schatting op basis van roosterverfijning. Voor meer details en andere toepassingen van beeldrectificatie met Coach verwijs ik naar een eerder artikel verschenen in de *Nieuwe Wiskrant*.<sup>[12]</sup> De in dit artikel beschreven toepassing kan dienen als uitbreiding van de gecertificeerde NLT module *Forensisch onderzoek, every contact leaves a trace* voor havo waarin momenteel slechts 3 pagina's gewijd worden aan wiskunde (forensische statistiek).



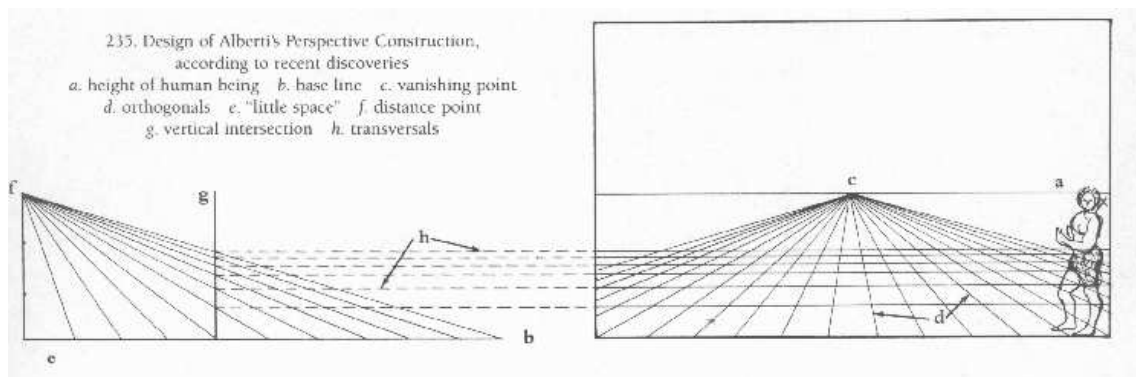
Figuur 7. Beeldrectificatie in Coach 6.

## Alberti's tegelvloerconstructie versus de distantiepunt methode

Tot slot, als wiskundig toetje, een bewijs van de equivalentie van de perspectiefconstructie van Alberti en de distantiepunt methode. Dit zou ook een aardige opdracht voor leerlingen zijn om zelf te doen. Figuur 8 toont een superpositie van beide constructiemethoden. Enkele labels van punten die een rol spelen in het bewijs zijn toegevoegd. Hierin is Alberti's twee-staps-constructiemethode zoals weergegeven in Figuur 9 (zie ook referentie [8]) in één figuur geplaatst.



**Figuur 8.** Superpositie van Alberti's methode en de distantiepunt methode.

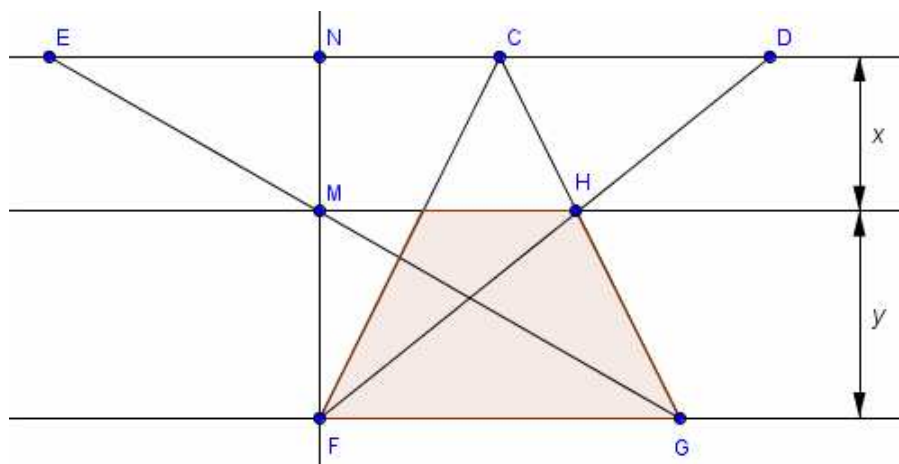


**Figuur 9.** Alberti's constructie van een tegelvloer in perspectief.

Figuur 8 is ontstaan door eerst Alberti's methode toe te passen en dan het punt D te construeren dat bij toepassing van de distantiepunt methode dezelfde tegelvloer zou opleveren. Eerst wordt een hulplijn loodrecht op de basislijn FG getrokken. Laat N het snijpunt van deze lijn met de horizon door C zijn. Kies links van N het punt E zodanig dat het lijnstuk NE een lengte heeft die gelijk is aan de gewenste afstand van het oog tot het tafereel. Verbind E met de equidistant uitgezette punten op het basislijnstuk FG. Teken door de snijpunten van deze lijnen met de lijn FN horizontale lijnen (dus parallel met de basislijn en de horizon). De snijpunten van deze horizontale lijnen met de lijnen vertrekkend uit C naar de equidistante punten op de basis vormen de hoekpunten van de tegels op de vloer. Kies als punt D nu het snijpunt van de diagonaal FH van de tegelvloer met de horizon. Ik toon aan dat de afstand CD gelijk is aan de afstand NE, d.w.z. gelijk aan de gewenste afstand van het oog tot het tafereel.

Voor het meetkundige bewijs is de in Figuur 10 getekende versoberde weergave van Figuur 8 handig. Het bewijs gaat als volgt: Omdat de basislijn en de horizon parallel lopen zijn de lijnstukken DC en FG ook parallel en de driehoeken CDH en FGH dientengevolge gelijkvormig. De hoogtes vanuit H naar de basis CD resp. FG van de driehoek CDH resp. FGH hebben een lengteverhouding  $x : y$  en ook geldt dezelfde lengteverhouding voor de basislijnstukken van deze twee driehoeken:  $CD / FG = x / y$ . Ook zijn de driehoeken MNE en MFG gelijkvormig zodat de volgende gelijkheid geldt:  $NE / FG = MN / MF$ . Omdat per definitie  $MN = x$  en  $MF = y$  geldt:  $CD / FG = NE / FG$ . Met andere woorden, de afstand CD is inderdaad gelijk aan de afstand NE. Klaar met het bewijs! Voor een "drie-dimensionaal bewijs", met bijpassend fysiek model, wordt de geïnteresseerde lezer verwezen naar een

projectverslag van Heng Ser Guan.<sup>[13]</sup> De constructie van een fysiek model dat deze meetkundige constructie illustreert zou in het kader van een praktische opdracht passen.



**Figuur 10.** Illustratie bij het meetkundige bewijs van equivalentie van tegelvloerconstructies.

## Materialen

Op de website van de NWD 2008<sup>[1]</sup> zijn lesmaterialen, te weten GeoGebra en Coach activiteiten, alsmede een online artikel over meten op foto's<sup>[14]</sup> beschikbaar gesteld.

## Referenties

- [1] [www.fi.uu.nl/nwd](http://www.fi.uu.nl/nwd)
- [2] [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)
- [3] [www.cma.science.uva.nl](http://www.cma.science.uva.nl)
- [4] Robinson, E. M. (2007). *Crime Scene Photography*. Academic Press/Elsevier.
- [5] Field, J.V. (2005). *Piero della Francesca. A Mathematician's Art*. Yale University Press.
- [6] Edgerton Jr., S.Y. (1966). Alberti's Perspective: A New Discovery and a New Evaluation. *The Art Bulletin*, **48** (3/4) 367-378.
- [7] Elkins, J. (1987). Piero della Francesca and the Renaissance Proof of Linear Perspective. *The Art Bulletin*, **69** (2) 220-230.
- [8] de Rijk, H. (2004). Perspectiefregels volgens Leon Battista Alberti. *Euclides*, **79** (5) 214-217.
- [9] Pélerin, J. (1505). *De Artificiali Perspectiva*. 3<sup>de</sup> editie uit 1521. Online beschikbaar op: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1050945/f1.item>
- [10] Verweij, A. & Kindt, M. (1999). *Perspectief, hoe moet je dat zien?* Zebra-reeks deel 2, Epsilon Uitgaven, Utrecht.
- [11] de Rijk, H. (2002). [www.arsetmathesis.nl/brunoindex.htm](http://www.arsetmathesis.nl/brunoindex.htm)
- [12] Heck, A. (2004). Met een schuine blik *Nieuwe Wiskrant*, **23**(3) 29-32.
- [13] Heng Ser Guan, K. (2001). *Perspective in Mathematics and Art*. Projectverslag, Undergraduate Research Opportunities in Science Programme, National University of Singapore. Online beschikbaar op: [www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/kh2-urops.pdf](http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects/kh2-urops.pdf)
- [14] Heck, A. (2008). Mathematical Brooding over an Egg. Aangeboden aan *The Journal of Online Mathematics and its Applications*. De meest recente versie is online beschikbaar op: [www.science.uva.nl/~heck/research/egmath/](http://www.science.uva.nl/~heck/research/egmath/)

## Over de auteur

André Heck is projectmanager aan het AMSTEL Instituut van de Universiteit van Amsterdam op het gebied van ICT-toepassingen in onderwijs bij wiskunde en natuurwetenschappen.