Opgaven Algebra3

November/december 2006

1) Laat K het lichaam $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ zijn.
 i) Bereken de graad $[K : \mathbb{Q}]$.
 ii) Bepaal de lichaamsautomorfismen van K.

2) Laat L het ontbindingslichaam van $X^5 - 1$ over $\mathbb{Q}$ zijn.
 i) Ontbind f in $\mathbb{Q}[X]$ in irreducibele factoren.
 ii) Bepaal de graad $[L : \mathbb{Q}]$.
 iii) Bepaal alle tussenlichamen van $L/\mathbb{Q}$. Motiveer het antwoord.

3) Laat $f \in \mathbb{Q}[X]$ een irreducibel monisch polynoom van graad 3 zijn en laat D de discriminant van f zijn.
 i) Bewijs: f heeft één of drie reële nulpunten.
 ii) Bewijs: $D > 0$ dan en slechts dan als alle wortels van f reëel zijn.
 iii) Stel dat $D < 0$. Bewijs dat de Galoisgroep van het ontbindingslichaam van f over $\mathbb{Q}$ isomorf is met de symmetrische groep S_3.

4) Laat $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ het n-de cyklotomische polynoom zijn.
 i) Ontbind $\Phi_5 \pmod 2$ en $\Phi_7 \pmod 2$ in $\mathbb{F}_2[X]$ in irreducibele factoren.
 ii) Geef voor beide polynomen $\Phi_5(\bmod 2)$ en $\Phi_7(\bmod 2)$ een ontbindingslichaam over $\mathbb{F}_2$ aan.

5) Laat K een lichaam van karakteristiek 0 zijn en laat L een eindige normale lichaamsuitbreiding van K zijn. Met $\mathrm{Aut}(L/K)$ bedoelen we de groep van K-automorfismen van L. Laat α een element van L zijn met minimumpolynoom $g \in K[X]$ en laat

$$f(X) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)} (X - \sigma(\alpha)).$$

 i) Bewijs dat $f(X) \in K[X]$.
 ii) Bewijs dat f een macht van het minimumpolynoom g is.
 iii) Bewijs: $f = g$ dan en slechts dan als $L = K(\alpha)$.

6) Laat $\alpha \in \mathbb{C}$ een nulpunt van het polynoom $f = X^6 + 3$ zijn.
 i) Bereken de graad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
 ii) Bewijs dat $\mathbb{Q}(\alpha)$ een primitieve zesdemachts eenheidswortel bevat.
 iii) Is $\mathbb{Q}(\alpha)$ het ontbindingslichaam van f over $\mathbb{Q}$? Motiveer het antwoord.

7)
 i) Laat G een eindige groep zijn en p een priemgetal. Laat verder S een p-Sylow-ondergroep van G zijn en N een normaaldeler van G. Bewijs dat $S \cap N$ een p-Sylow-ondergroep van N is.
 ii) Laat p en q twee priemgetallen zijn met $q > p$. Laat G een niet-abelse groep zijn van orde pq. Bewijs dat de q-Sylow-ondergroep van G een normaaldeler is. Bewijs dat p een deler is van $q - 1$.

8) Bepaal de Galoisgroep van de volgende polynomen in $\mathbb{Q}[X]$:

$$X^3 - 21 + 7, \quad X^3 + X + 1, \quad X^3 + X^2 - 2X + 1.$$

9) Laat K het ontbindingslichaam van $f = X^4 - 2X^2 - 1$ over $\mathbb{Q}$ zijn. Bewijs dat de Galoisgroep van f isomorf is met de diëdergroep van orde 8. Bepaal alle tussenlichamen.

10) Laat $K = \mathbb{Q}(\zeta_7)$ met $\zeta_7 = e^{2\pi i/7}$ een primitieve zevende-machts eenheidswortel in $\mathbb{C}$.

i) Bewijs: $K/\mathbb{Q}$ is een Galoisuitbreiding van graad 6.
ii Bewijs dat de Galoisgroep van K over $\mathbb{Q}$ cyklisch is.
iii Bereken de graad $[\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^6) : \mathbb{Q}]$.