Hertentamen Galoistheorie 2016/2017
10 juli 2017

Dit hertentamen is een gesloten boek tentamen. Hulpmiddelen anders dan een pen zijn niet toegestaan. Geef bij elk antwoord een volledige redenatie. De laatste opgave is een bonusopgave. Je wordt aangeraden pas aan deze opgave te beginnen als je de eerste 5 opgaven hebt uitgewerkt.

Opgave 1 (2+2+2 punten). Bepaal de Galoisgroepen van de volgende polynomen

$$f = X^3 + X + 1, \quad g = X^5 + 5X^3 + 5X^2 + 4X + 1, \quad h = X^4 - 5X^2 + 6 \quad \in \mathbb{Q}[X].$$

Aanwijzing, er geldt: $X^5 + X^3 + X^2 + 1 \equiv (X+1)^3 \cdot (X^2 + X + 1) \mod 2$.

Opgave 2 (2+2+2+2 punten). Beschouw het lichaam $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ waarbij $i \in \mathbb{C}$ een primitieve vierde eenheidswortel is en $\sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ de reële vierde machts wortel van 2.

(a) Formuleer de hoofdstelling van Galoistheorie.
(b) Leg uit dat de lichaamsuitbreiding $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$ Galois is, bepaal de graad van de uitbreiding en bepaal de Galoisgroep G.
(c) Laat zien dat K een primitieve achtste eenheidswortel ζ_8 bevat.
(d) Bepaal alle deellichamen van $K/\mathbb{Q}$ van graad 4 over $\mathbb{Q}$. Geef voor elk van deze lichamen een primitief element. Je hoeft voor slechts één van deze deellichamen naar keuze een volledig bewijs te geven dat je antwoord correct is. (Aanwijzing: Gebruik dat $\zeta_8 \in K$!)

Opgave 3 (2+2+2 punten). Stel p is een priemgetal met $p \equiv 5 \mod 8$ en $p > 5$. Laat $\zeta \in \mathbb{C}$ een primitieve p-de eenheidswortel zijn.

(a) Bewijs dat de regelmatige p-hoek niet construeerbaar is.
(b) Laat K de deelverzameling van $\mathbb{Q}(\zeta)$ zijn die bestaat uit alle elementen $x \in \mathbb{Q}(\zeta)$ zó dat x construeerbaar is met passer en lineaal. Leg uit dat K een lichaam is en dat $K/\mathbb{Q}$ Galois is.
(c) Bepaal de graad van K over $\mathbb{Q}$.

Opgave 4 (2+2+2 punten). Geef een voorbeeld van

(a) Een polynoom $f \in \mathbb{F}_2[X]$ waarvan de Galoisgroep isomorf is met $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
(b) Een element $\xi \in \mathbb{C}$ zó dat $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ Galois is met Galoisgroep $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
(c) Een polynoom $f \in \mathbb{F}_7[X]$ van graad 7 met Galoisgroep $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Bonusopgave 5 (4 punten). Stel $\zeta \in \mathbb{C}$ is een primitieve 13-de eenheidswortel. Beschouw het element

$$\xi = \zeta + \zeta^5 + \zeta^8 + \zeta^{12} \in \mathbb{C}.$$

Bepaal de graad van het minimumpolynoom van ξ over $\mathbb{Q}$.