Hertentamen Galoistheorie

Tijd: 3 uur.

Alleen pen en papier zijn toegestaan - geen boeken, aantekeningen, rekenmachines, telefoons, etc.

$p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ is in alle opgaven (als hij voorkomt) een willekeurig priemgetal.

Cijfer: $1 + \frac{1}{4} \times$ (aantal punten).

1. ($8 = 4 \times 2$ *punten*). Bepaal de graad over $\mathbb{Q}$ van ontbindingslichamen van de volgende polynomen:

$$X^2 + X - 2, \quad X^2 + 2X - 2, \quad X^3 + 2X - 2, \quad X^4 + 2X^2 + 2.$$

2. ($8 = 2 + 2 + 2 + 2$ *punten*). In deze opgave bestuderen we de lichaamsuitbreiding $\mathbb{Q}(\zeta_{15})/\mathbb{Q}$.
   (a) Leg uit dat de uitbreiding $\mathbb{Q}(\zeta_{15})/\mathbb{Q}$ normaal is, geef de graad van $\mathbb{Q}(\zeta_{15})/\mathbb{Q}$, geef de Galoisgroep G, en leg uit hoe de Galoisgroep G werkt op de elementen van het lichaam $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$.
   (b) Stel f is het minimum polynoom van ζ_{15} over $\mathbb{Q}$. Geef een uitdrukking voor f als quotient van twee expliciete polynomen.
   (c) Leg uit dat alle deellichamen K van $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$ Galois zijn over $\mathbb{Q}$.
   (d) Leg uit dat precies één van deze deellichamen K Galoisgroep $V_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ heeft over $\mathbb{Q}$ en geef een primitief element van $K/\mathbb{Q}$.

3. ($8 = 6 + 2$ *punten*).
   (a) Stel $f_2, f_4 \in \mathbb{F}_p[X]$ zijn polynomen van graad 2 en 4 respectievelijk. We nemen aan dat $f_2(u) \neq 0$ voor alle $u \in \mathbb{F}_p$. Bewijs dat f_4 reducibel is in $\mathbb{F}_p[X]$ dan en slechts dan als er $a, b \in \mathbb{F}_p$ bestaan, zó dat het polynoom f_2 een deler is van het polynoom $f_4(aX + b)$.
   (b) Geldt bovenstaande uitspraak ook voor polynomen $f_3, f_9 \in \mathbb{F}_p[X]$ van graad respectievelijk 3 en 9?

4. ($4 = 2 + 2$ *punten*).
   (a) Bepaal het kleinste positieve gehele getal $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, zó dat de primitieve $(254 + m)$-de eenheidswortels $\zeta_{254+m} \in \mathbb{C}$ niet construeerbaar zijn met passer en liniaal uit de deelverzameling $\{0, 1\} \subset \mathbb{C}$.
   (b) Geef een voorbeeld van een monisch polynoom $f \in \mathbb{F}_5[X]$ van graad 30 waarvan het ontbindings lichaam isomorf is met het eindige lichaam $\mathbb{F}_{5^{30}}$.

5. (8 *punten*). Stel f is het polynoom $X^9 - 2X^7 + 3X^2 - 6 \in \mathbb{Q}[X]$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ is het ontbindingslichaam van f, en stel $\Omega^{\text{constr}} \subset \Omega$ is het deellichaam van elementen $x \in \Omega$ die construeerbaar zijn met passer en liniaal uit de deelverzameling $\{0, 1\} \subset \mathbb{C}$. Bepaal een primitief element van $\Omega^{\text{constr}}/\mathbb{Q}$.

Veel succes!

(z.o.z. voor bonusopgaven)

Bonusopgaven

Als je klaar bent met opgaven 1 t/m 5 kan je één van de volgende bonusopgaven uitkiezen, maken en inleveren voor extra punten. **Let op:** Als je meerdere bonusopgaven inlevert zullen we slechts voor één van deze opgaven punten geven.

1. (*6 punten*). Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $f = X^6 - 3X^3 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$.
2. (*2 + 2 punten*).
   (a) Geef een voorbeeld van een lichaamsuitbreiding L/K van graad 12 die geen primitief element heeft.
   (b) Bestaan er lichaamsuitbreidingen L/K van graad 10 zonder primitief element?
3. (*3 punten*). Stel K is een lichaam. Bepaal de automorfismen groep $\mathrm{Aut}_K(K(X))$.
4. (*3 punten*). Bepaal het aantal monische irreducibele polynomen van graad 6 over het lichaam $\mathbb{F}_2$.
5. (*3 + 2 punten*). Stel $p_1, p_2, \ldots, p_t$ is een rij van $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ verschillende priemgetallen, en beschouw het lichaam $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_t})$.
   (a) Bepaal de Galoisgroep van K over $\mathbb{Q}$.
   (b) Geef een primitief element van K over $\mathbb{Q}$.
6. (*3 punten*). Stel K is een lichaam van karakteristiek verschillend van p, en stel dat $a \in K$. Bewijs dat het polynoom $f = X^p - a \in K[X]$ òf irreducibel is, òf volledig splitst in lineaire factoren.
7. (*1 + 1 + 3 punten*). Stel het priemgetal p is verschillend van 2. Beschouw de lichaamsuitbreiding $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})/\mathbb{Q}$, waarbij ζ_{p^2} een primitieve p^2-de eenheidswortel is.
   (a) Laat zien dat er een deellichaam $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_{p^2})$ bestaat met $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   (b) Laat zien dat K totaal reëel is, ofwel elke inbedding $\varphi\colon K \to \mathbb{C}$ heeft beeld in $\mathbb{R}$: Er geldt $\varphi(K) \subset \mathbb{R}$.
   (c) Geef een primitief element van K over $\mathbb{Q}$.