Hertentamen Galoistheorie 2018/2019

Tijd: 3 uur. Alleen pen en papier zijn toegestaan. Elke opgave is 8 punten waard.

1. Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $f = X^4 - 5X^2 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

2. Beschouw de volgende foute stelling:

   Stelling. *Zij p een priemgetal en $\zeta_p \in \mathbb{C}$ primitieve p-de eenheidswortel. Dan is er voor ieder element $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ een uniek automorfisme $\sigma_k \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$ met $\sigma_k(\zeta_p) = \zeta_p^k$, en de afbeelding*

   $$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \sigma_k \mapsto k$$

   is een isomorfisme van cyclische groepen.

   (a) Leg uit waarom de stelling zo niet klopt. Corrigeer de stelling.

   (b) Bewijs de gecorrigeerde stelling.

3. (a) Stel $f = X^9 + 5X^5 + X^4 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Bepaal de graad van een ontbindingslichaam van f over $\mathbb{Q}$.

   (b) Stel $\sqrt[3]{2} \in \overline{\mathbb{Q}}$ (resp. $\sqrt[3]{3} \in \overline{\mathbb{Q}}$) is een derde-machts wortel van 2 (resp. 3). Laat zien dat de uitbreiding $\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}(\zeta_3)$ Galois is, en bepaal de Galoisgroep.

4. Bepaal alle natuurlijke getallen n zo dat de regelmatige n-hoek in $\mathbb{C}$ construeerbaar is uitgaande van de deelverzameling $\{0, 1, \zeta_{11}\} \subset \mathbb{C}$.

5. (a) Geef een voorbeeld van een lichaamsuitbreiding L/K van graad 4 met oneindig veel verschillende tussenlichamen $K \subset M \subset L$.

   (b) Bewijs of weerleg: Stel $K, L/\mathbb{Q}$ zijn twee Galoisuitbreidingen van graad 5. Dan geldt: $K \cong L$.

   (c) Bewijs of weerleg: Het polynoom $X^4 + X + 1$ deelt het polynoom $X^{27} - X$ in $\mathbb{F}_3[X]$.

   (d) Bewijs of weerleg: Het lichaam $M = \mathbb{Q}(\zeta_7, \sqrt[7]{2})$ heeft precies één deellichaam $K \subset M$ met $[K : \mathbb{Q}] = 6$.

Veel succes!