Hertentamen Galoistheorie 2019/2020

1. Bewijs: $f = X^4 + 2$ is irreducibel in $\mathbb{F}_{125}[X]$. Is f irreducibel over $\mathbb{F}_{5^n}$ voor alle oneven n?

2. Beschouw de volgende foute stelling:

   Stelling. *Laat K een lichaam zijn, en $\overline{K}/K$ een algebraische afsluiting zijn. Zij $f \in K[X]$ een polynoom met nulpunten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$, en vat $G = \mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/K)$ via zijn werking op de nulpunten van f op als ondergroep van S_n. Dan is G transitieve ondergroep van S_n, en $\#G$ is een deler van $n!$ die deelbaar is door n.*

   Corrigeer de stelling, en geef het bewijs van de gecorrigeerde stelling.

3. Beschouw het polynoom $f = X^4 - 24 \cdot X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$.
   (a) Laat zien dat f irreducibel is.
   (b) Zij $\Omega_f \subset \mathbb{C}$ een ontbindingslichaam van f. Bepaal de graad $[\Omega_f : \mathbb{Q}]$.
   (c) Bepaal de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(f)$ van f.
   (d) Beschrijf het rooster van deellichamen $K \subset \Omega_f$, en geef voor elk deellichaam een primitief element.
   (e) Bepaal de verzameling $z \in \Omega_f$ die met passer en liniaal construeerd kunnen worden uitgaande van $\{0, 1\} \subset \mathbb{C}$.

4. (a) Geef een voorbeeld van een Galois uitbreiding L/K met $\mathrm{Gal}(L/K) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.
   (b) Geef een voorbeeld van een lichaamsuitbreiding L/K van graad 2020 met oneindig veel tussenlichamen M met $K \subset M \subset L$.
   (c) Bewijs of weerleg: Het polynoom $f = X^4 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ heeft een nulpunt in het lichaam $\mathbb{F}_{p^2}$, voor elk priemgetal p.
   (d) Bewijs of weerleg: De ringen $\mathbb{F}_7[X]/(X^7 - X - 1)$ en $\mathbb{F}_7[X]/(X^7 + X - 1)$ zijn isomorf.

Veel succes!

Retake Galois theory 2019/2020

1. Prove: $f = X^4 + 2$ is irreducible in $\mathbb{F}_{125}[X]$. Is the polynomial f irreducible over $\mathbb{F}_{5^n}$ for all odd n?

2. Consider the following wrong theorem:

   Theorem. *Let K be a field, and $\overline{K}/K$ an algebraic closure of K. Let $f \in K[X]$ be a polynomial with roots $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{K}$, , and consider $G = \mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)/K)$ via its action on the roots of f as a subgroup of S_n. Then G is transitive, and $\#G$ is a divisor of $n!$, which is divisible by n.*

   Correct the theorem, and give a proof of the corrected theorem.

3. Consider the polynomial $f = X^4 - 24 \cdot X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$.
   (a) Show that f is irreducible.
   (b) Let $\Omega_f \subset \mathbb{C}$ be a decomposition field of f. Determine the degree $[\Omega_f : \mathbb{Q}]$.
   (c) Determine the Galoisgroup $\mathrm{Gal}(f)$ of f.
   (d) Describe the lattice of subfields $K \subset \Omega_f$, and give for each subfield a primitive element.
   (e) Determine the set of $z \in \Omega_f$ which can be constructed with ruler and compass, starting from the subset $\{0, 1\} \subset \mathbb{C}$.

4. (a) Give an example of a Galois extension L/K with $\mathrm{Gal}(L/K) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.
   (b) Give an example of a field extension L/K of degree 2020 with infinitely many intermediate fields M with $K \subset M \subset L$.
   (c) Prove or disprove: The polynomial $f = X^4 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ has a root in the field $\mathbb{F}_{p^2}$, for every prime number p.
   (d) Prove or disprove: The rings $\mathbb{F}_7[X]/(X^7 - X - 1)$ and $\mathbb{F}_7[Y]/(Y^7 + Y - 1)$ are isomorphic.

Good luck!