Toets Algebra 3

28 oktober 2010, 09:00-12:00 uur, Zaal A1.10

Maak tenminste vijf van de volgende zes opgaven. Indien U er meer maakt worden de drie best gemaakte geteld.

1) Laat a, b, c complexe getallen zijn met

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 + X^2 + 3.$$

Laat $\alpha = b + c$, $\beta = a + c$ en $\gamma = a + b$. Bepaal een polynoom in $\mathbb{Z}[X]$ waarvan α, β en γ de nulpunten zijn.

2) Laat $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$ de lichaamsuitbreiding van $\mathbb{Q}$ zijn verkregen door de elementen $i = \sqrt{-1}$ en $\sqrt{5}$ te adjungeren.

- i) Laat zien dat $K/\mathbb{Q}$ een Galoisuitbreiding is.
- ii) Bepaal alle tussenlichamen van $K/\mathbb{Q}$.
- iii) Geef een element $\alpha \in K$ zodat $\mathbb{Q}(\alpha) = K$.
- iv) Bepaal het minimumpolynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ van α.

3) Laat $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ het n-de cyklotomische polynoom zijn.

- i) Ontbind $\Phi_5 \pmod 2$ en $\Phi_7 \pmod 2$ in $\mathbb{F}_2[X]$ in irreducibele factoren.
- ii) Geef voor beide polynomen $\Phi_5(\bmod\ 2)$ en $\Phi_7(\bmod\ 2)$ een ontbindingslichaam over $\mathbb{F}_2$ aan.

4) Laat L het ontbindingslichaam van $X^5 - 1$ over $\mathbb{Q}$ zijn.

- i) Ontbind f in $\mathbb{Q}[X]$ in irreducibele factoren.
- ii) Bepaal de graad $[L : \mathbb{Q}]$.
- iii) Bepaal alle tussenlichamen van $L/\mathbb{Q}$. Motiveer het antwoord.

5) Laat $f \in \mathbb{Q}[X]$ een irreducibel monisch polynoom van graad 3 zijn en laat D de discriminant van f zijn.

- i) Bewijs: f heeft één of drie reële nulpunten.
- ii) Bewijs: $D > 0$ dan en slechts dan als alle wortels van f reëel zijn.
- iii) Stel dat $D < 0$. Bewijs dat de Galoisgroep van het ontbindingslichaam van f over $\mathbb{Q}$ isomorf is met de symmetrische groep S_3.

6) Laat K een lichaam van karakteristiek 0 zijn en laat L een eindige normale lichaamsuitbreiding van K zijn. Met $\mathrm{Aut}(L/K)$ bedoelen we de groep van K-automorfismen van L. Laat α een element van L zijn met minimumpolynoom $g \in K[X]$ en laat

$$f(X) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)} (X - \sigma(\alpha)).$$

- i) Bewijs dat $f(X) \in K[X]$.
- ii) Bewijs dat f een macht van het minimumpolynoom g is.
- iii) Bewijs: $f = g$ dan en slechts dan als $L = K(\alpha)$.

Please do five of the following six exercises. If you do all the five best answers will be counted.

1) Let a, b, c be complex numbers satisfying

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 + X^2 + 3.$$

Define $\alpha = b + c$, $\beta = a + c$ and $\gamma = a + b$. Determine a polynomial in $\mathbb{Z}[X]$ of which α, β en γ are the zeros.

2) Let $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$ be the field extension of $\mathbb{Q}$ obtained by adjoining $i = \sqrt{-1}$ and $\sqrt{5}$.

i) Show that $K/\mathbb{Q}$ is a Galois extension.
ii) Determine all intermediate fields of $K/\mathbb{Q}$.
iii) Give an element $\alpha \in K$ with $\mathbb{Q}(\alpha) = K$.
iv) Determine the minimum polynomial $f \in \mathbb{Q}[X]$ of α.

3) Let $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ be the nth cyclotomic polynomial.

i) Factor $\Phi_5 \pmod 2$ and $\Phi_7 \pmod 2$ in $\mathbb{F}_2[X]$ in irreducible factors.
ii) Give the splitting field for $\Phi_5 (\mathrm{mod}\, 2)$ and $\Phi_7 (\mathrm{mod}\, 2)$ over $\mathbb{F}_2$.

4) Let L be the splitting field of $X^5 - 1$ over $\mathbb{Q}$.

i) Factor f in $\mathbb{Q}[X]$ in irreducible factors.
ii) Determine the degree $[L : \mathbb{Q}]$.
iii) Determine all intermediate fields of $L/\mathbb{Q}$. Motivate your answer.

5) Let $f \in \mathbb{Q}[X]$ be an irreducible monic polynomial of degree 3 and let D be the discriminant of f.

i) Prove: f has either one or three real roots.
ii) Prove: $D > 0$ if and only if all roots of f are real.
iii) Suppose that $D < 0$. Show that the Galois group of the splitting field of f over $\mathbb{Q}$ is isomorphic to the symmetric group S_3.

6) Let K be a field of characteristic 0 and let L be a normal field extension of K. We denote the group of K-automorphisms of L by $\mathrm{Aut}(L/K)$. Let α be an element of L with minimum polynomial $g \in K[X]$ and put

$$f(X) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)} (X - \sigma(\alpha)).$$

i) Show that $f(X) \in K[X]$.
ii) Show that f is a power of the minimum polynomial g.
iii) Show: $f = g$ if and only if $L = K(\alpha)$.