Tentamen Galoistheorie

Tijd: 3 uuur.

Alleen pen en papier zijn toegestaan - geen boeken, aantekeningen, rekenmachines, telefoons, etc.

$p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ is in alle opgaven (als hij voorkomt) een willekeurig priemgetal.

Cijfer: $1 + \frac{1}{4} \times$ (aantal punten).

1. (8 *punten*). Beschrijf het rooster van alle tussenlichamen van de lichaamsuitbreiding $\mathbb{Q}(\zeta_{11})/\mathbb{Q}$ en geef voor elk tussenlichaam een primitief element.

2. (8 *punten*). Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $X^4 - 3X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

3. ($8 = 4 \times 2$ *punten*).

   (a) Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $f = X^{2018} + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. (*Je kan zonder bewijs gebruiken dat* 1009 *een priemgetal is*).

   (b) Laat $\Omega \subset \mathbb{C}$ het deellichaam voortgebracht door de nulpunten van f, en $C \subset \mathbb{C}$ de deelverzameling bestaande uit de complexe getallen die in een eindig aantal stappen met passer en liniaal geconstrueerd kunnen worden uit de verzameling $\{0, 1\} \subset \mathbb{C}$. Leg uit waarom $K = \Omega \cap C$ een lichaam is, en ook waarom $K/\mathbb{Q}$ een Galoisuitbreiding is.

   (c) Bepaal de graad $[\Omega \cap \mathbb{Q}^{\text{const}} : \mathbb{Q}]$.

   (d) Bepaal de Galoisgroep $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

4. ($12 = 6 \times 2$ *punten*). Geef een expliciet voorbeeld van

   (a) Een irreducibel polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ waarvan de Galoisgroep $\text{Gal}(f)$ isomorf is met de viergroep van Klein $V_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

   (b) Een polynoom $f \in \mathbb{F}_5[X]$ van graad 10 zó dat het ontbindingslichaam van f isomorf is met $\mathbb{F}_{5^{10}}$.

   (c) Een vierde graads polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ waarvan geen enkel nulpunt in $\mathbb{C}$ met passer en liniaal geconstrueerd kan worden.

   (d) Een irreducibel polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ die geen oplossing in radicalen heeft.

   (e) Een Galoisuitbreiding $K/\mathbb{Q}$ met $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

   (f) Een inseparabele lichaamsuitbreiding L/K zó dat L/K oneindig veel verschillende tussenlichamen $K \subset M \subset L$ heeft.

   Let op: *Geef voor elk voorbeeld een volledig bewijs!*

Veel succes!

(z.o.z. voor bonusopgaven)

Bonusopgaven

Als je klaar bent met opgaven 1 t/m 4 kan je één van de volgende bonusopgaven uitkiezen, maken en inleveren voor extra punten. **Let op:** Als je meerdere bonusopgaven inlevert zullen we slechts voor één van deze opgaven punten geven.

1. (2 *punten*). Schrijf een opstel waarin je uitlegt aan een middelbare scholier waar Galoistheorie over gaat. Leg hierin uit wat een Galoisgroep van een polynoom f met rationale coëfficiënten is zonder technische concepten als ring en lichaam te gebruiken. Het gaat hier wel om een scholier die weet wat complexe getallen $a + bi$ zijn, en hoe je hiermee rekent.
2. (2 *punten*). Stel K is een eindig lichaam en $f \in K[X]$ is een irreducibel polynoom van oneven graad met discriminant δ. Laat zien dat $\sqrt{\delta} \in K$.
3. (3 *punten*). Stel q is een macht van p en $\mathbb{F}_q$ is een eindig lichaam met q elementen. Stel $f \in \mathbb{F}_q[X]$ is een polynoom van de vorm $X^p - X + a$ voor $a \in \mathbb{F}_q$ met $a \neq 0$. Bepaal de graad van de irreducibele factoren van f in termen van a en q.
4. (4 *punten*). Stel $a \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, is een positief geheel getal. Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $f = X^4 + X^2 + a \in \mathbb{Q}[X]$ in termen van a.
5. (4 *punten*). Stel $K \subset \mathbb{C}$ is een eindige lichaamsuitbreiding van $\mathbb{Q}$ en $f \in K[X]$ is een monisch en irreducibel polynoom van oneven graad. Laat zien dat de nulpunten van f in $\mathbb{C}$ niet met passer en liniaal geconstrueerd kunnen worden.
6. (4 *punten*). Laat zien dat elke lichaamsuitbreiding L/K van graad 2018 een primitief element heeft.
7. (4 *punten*). Stel K is een lichaam van karakteristiek verschillend van p zó dat K een primitieve p-de eenheidswortel ζ_p bevat. Stel $a, b \in K$ zijn twee elementen die geen p-de macht zijn en stel $\alpha \in \overline{K}$ (resp. $\beta \in \overline{K}$) is nulpunt van het polynoom $X^p - a \in K[X]$ (resp. $X^p - b \in K[X]$). Laat zien dat
$$K(\alpha) = K(\beta) \iff \alpha^k \beta \in K \text{ voor zekere } k \in \{1, 2, \dots, p-1\}.$$
8. (6 *punten*). Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $X^6 - 2X^3 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.