1. Bepaal de Galoisgroep van het polynoom $f = X^4 + 20 \in \mathbb{Q}[X]$.

2. Laat n een positief geheel getal zijn, en $\zeta_n \in \mathbb{C}$ een primitieve n-de eenheidswortel.

   (a) Geef de definitie van een isomorfisme $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

   Let op: Het gaat hier om de afbeelding te definiëren, je hoeft niet te bewijzen dat de afbeelding inderdaad een isomorfisme is.

   (b) Beschouw de volgende foute stelling:

   Stelling. *Stel* $H \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ *is een ondergroep. Dan geldt* $\mathbb{Q}(\zeta_n)^H = \mathbb{Q}(\eta_H)$, *waarbij* $\eta_H = \sum_{\sigma \in H} \sigma(\zeta_n)$

   Corrigeer de stelling, en geef het bewijs van de gecorrigeerde stelling.

3. Beschouw het lichaam $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, en het polynoom $f = X^5 - 5 \in K[X]$. Laat $\Omega_f \subset \mathbb{C}$ het ontbindingslichaam van f in $\mathbb{C}$ zijn.

   (a) Laat zien dat Ω_f graad 10 heeft over K.

   (b) Bepaal een expliciet isomorfisme $D_5 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\Omega_f/K)$, waarbij D_5 de 5-de diëdergroep[1] is.

   (c) Bepaal alle tussenlichamen $K \subset L \subset \Omega_f$, waarbij L kwadratisch is over K. (Geef voor elke L een primitief element over K.)

   (d) Bepaal de verzameling van complexe getallen $z \in \Omega_f$, zó dat z met passer en lineaal geconstrueerd kan worden, uitgaande van de verzameling $\{0, 1\}$.

4. (a) Geef een voorbeeld van een irreducibel polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ met Galoisgroep $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

   (b) Geef een expliciet tegenvoorbeeld voor de genoemde stelling in Opgave 2b.

   (c) Zij $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Geef een voorbeeld van een algebraïsch getal $z \in \mathbb{C}$ zó dat $K(z)/K$ een Galois uitbreiding is met $\mathrm{Gal}(K(z)/K) \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

   (d) Zij $K = \mathbb{F}_3[T]/(T^3 - T + 1)$. Geef een voorbeeld van een expliciet polynoom $f \in K[X]$ dat irreducibel is van graad 13.

2* Deze bonusopgave gaat door met opgave 2, en is 2 extra punten waard

Beschouw de polynomen $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$), die inductief gedefinieerd zijn door de volgende voorwaarden: $\Phi_1 = X - 1$ en $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$. Beschouw de volgende uitspraak:

($\star$) *Het polynoom* Φ_n *is irreducibel in* $\mathbb{Q}[X]$.

Bewijs, uitgaande van uitspraak ($\star$), dat de afbeelding in opgave 2a inderdaad een isomorfisme is. (Je hoeft ($\star$) niet aan te tonen.)

Veel succes!

[1] De 5-de diëdergroep is de symmetriegroep van de regelmatige vijfhoek: De groep wordt voorgebracht door 2 elementen ρ en τ, waarbij ρ een rotatie van orde 5 is, en τ een spiegeling. Dus $D_5 = \langle \rho, \tau \mid \rho^5 = 1, \tau^2 = 1, \tau\rho\tau = \rho^{-1} \rangle$.

1. Determine the Galois group of the polynomial $f = X^4 + 20 \in \mathbb{Q}[X]$.

2. Let n be a positive integer, and let $\zeta_n \in \mathbb{C}$ be a primitive n-th root of unity.
   (a) Give the definition of an isomorphism $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

   Beware: We are asking you to define the map, you do not have to prove that your map is indeed an isomorphism.

   (b) Consider the following wrong theorem:

   Theorem. *Let $H \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ be a subgroup. Then we have $\mathbb{Q}(\zeta_n)^H = \mathbb{Q}(\eta_H)$, where $\eta_H = \sum_{\sigma \in H} \sigma(\zeta_n)$*

   Correct the statement of the theorem, and prove this corrected theorem.

3. Consider the field $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ and the polynomial $f = X^5 - 5 \in K[X]$. Let $\Omega_f \subset \mathbb{C}$ be the decomposition field of f in $\mathbb{C}$.
   (a) Prove that Ω_f has degree 10 over K.
   (b) Give an explicit isomorphism $D_5 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\Omega_f/K)$, where D_5 is the 5-th dihedral group[2].
   (c) Determine all intermediate fields $K \subset L \subset \Omega_f$, where L is quadratic over K. (Give a primitive element over K for every L).
   (d) Determine the set of complex numbers $z \in \Omega_f$, such that z can be constructed by ruler and compass, starting from the set $\{0, 1\}$.

4. (a) Give an example of an irreducible polynomial $f \in \mathbb{Q}[X]$ with Galois group $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
   (b) Give an explicit counter example to the stated theorem in Problem 2b.
   (c) Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Give an example of an algebraic number $z \in \mathbb{C}$ such that $K(z)/K$ is a Galois extension with $\mathrm{Gal}(K(z)/K) \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
   (d) Let $K = \mathbb{F}_3[T]/(T^3 - T + 1)$. Give an example of an explicit polynomial $f \in K[X]$, which is irreducible of degree 13.

2* This bonus problem continues with Problem 2, and is worth 2 extra points.

Consider the polynomials $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$), which are inductively defined by the following conditions: $\Phi_1 = X - 1$ and $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$. Consider the following statement:

($\star$) *The polynomial Φ_n is irreducible in $\mathbb{Q}[X]$.*

Prove, starting from statement ($\star$), that the mapping in Problem 2a is indeed an isomorphism. (You do not have to prove ($\star$).)

Good luck!

[2]The 5-th dihedral group is the group of symmetries of the regular 5-gon. This group is generated by 2 elements ρ and τ, where ρ is a rotation of order 5 and τ is a reflection. Thus $D_5 = \langle \rho, \tau \mid \rho^5 = 1, \tau^2 = 1, \tau\rho\tau = \rho^{-1} \rangle$.