Tussentoets Galoistheorie

- Tijd: 3 uuur.
- Aantal opgaven: 3. Er zijn bovendien 4 bonusopgaven (zoz).
- Alleen pen en papier toegestaan, dus geen boeken, aantekeningen, rekenmachines, telefoons, etc.
- Ingeval we om een tegenvoorbeeld vragen, verwachten we dat je ook **bewijst** dat je voorbeeld de betreffende uitspraak weerlegt.
- In dit tentamen is $p \in \mathbb{N}$ een willekeurig priemgetal.

---

1. (3×2 *punten*). Stel $f \in \mathbb{Z}[X]$ is het polynoom $X^5 + 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X + 70$.

   (a) Laat zien dat f irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$
   (***Aanwijzing**: Gebruik het morfisme* $\varphi\colon \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X], X \mapsto X+1$).

   (b) Laat zien dat het beeld van f in de ring $\mathbb{F}_{101}[X]$ splitst in lineaire factoren.

   (c) Stel $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \overline{\mathbb{Q}}$ zijn de nulpunten van f in een algebraïsche afsluiting $\overline{\mathbb{Q}}$ van $\mathbb{Q}$. Bepaal de uitdrukking
   $$\sum_{i,j=1, i\neq j}^{5} \alpha_i^2 \alpha_j \in \mathbb{Q}.$$

2. ($3 \times 2 + 4$ *punten*).

   (a) Bewijs dat het p-de cyclotomische polynoom
   $$\Phi_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$
   irreducibel is.

   (b) Stel $\zeta_p \in \mathbb{C}$ is een primitieve p-de eenheidswortel. Bewijs dat de graad $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}]$ gelijk is aan $p - 1$.

   (c) Stel K is een lichaam, L/K is een eindige lichaamsuitbreiding, en $M_1, M_2 \subset L$ zijn twee deellichamen die K omvatten. Schrijf $m_1 = [M_1 : K]$, $m_2 = [M_2 : K]$ en stel dat m_1 en m_2 copriem zijn. Laat zien dat $[M_1M_2 : K] = m_1m_2$, waarbij $M_1M_2 \subset L$ het compositum is van M_1 en M_2 in L.

   (d) Bepaal voor elk van de volgende 3 polynomen f_i de graad van een ontbindingslichaam $\Omega_{f_i}/\mathbb{Q}$ van f_i over $\mathbb{Q}$ (en geef een bewijs voor je antwoord!):
   $$f_0 = X^p - 1, \quad f_1 = X^p - p, \quad f_2 = X^p - p^2 \in \mathbb{Q}[X].$$
   (***Aanwijzing**: Doe het geval* $p = 2$ *apart!*)

3. (3×2 *punten*). Geef voor elk van de volgende uitspraken aan of hij waar of niet waar is, en geef een **volledig argument** of **tegenvoorbeeld**:

   (a) Het aantal elementen van een eindig lichaam is een priemmacht.

   (b) Voor alle lichamen K van karakteristiek ongelijk aan 2 zijn alle kwadratische uitbreidingen L/K van de vorm $L = K(\sqrt{\alpha})$ met $\alpha \in K$.

   (c) Voor alle lichamen K van karakteristiek ongelijk aan 3 zijn alle cubische uitbreidingen L/K van de vorm $L = K(\sqrt[3]{\alpha})$ met $\alpha \in K$.

Bonusopgaven

Als je klaar bent met opgaven 1 t/m 3 kan je één van de volgende bonusopgaven uitkiezen, maken en inleveren voor extra punten.

Let op: Als je meerdere bonusopgaven inlevert zullen we slechts voor één van deze opgaven punten geven. We kiezen dan voor de opgave met het hoogste nummer.

4. (2 *punten*). Bewijs het criterium van Artin-Schreier: Stel $f \in \mathbb{F}_p[X]$ is een polynoom van de vorm $X^p - X + a$ voor $a \in \mathbb{F}_p$ met $a \neq 0$. Dan is het polynoom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ irreducibel.

5. (2 *punten*). Stel $f \in \mathbb{F}_p[X]$ is een monisch polynoom van graad $n > 2$. Waar of niet waar? Het polynoom f is irreducibel in $\mathbb{F}_p[X]$ dan en slechts dan als f irreducibel is in $\mathbb{F}_{p^{n-1}}[X]$.
(Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld).

6. (3 *punten*). Stel q is een macht van p en $\mathbb{F}_q$ is een eindig lichaam met q elementen. Stel $f \in \mathbb{F}_q[X]$ is een polynoom van de vorm $X^p - X + a$ voor $a \in \mathbb{F}_q$ met $a \neq 0$. Bepaal de graad van de irreducibele factoren van f in termen van a en q.

7. (4 *punten*). Waar of niet waar? Elke lichaamsuitbreiding L/K van graad 2018 is primitief.
(Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld. Trouwens, 1009 is een priemgetal).