Tentamen Galoistheorie 2018/2019

Tijd: 3 uur. Alleen pen en papier zijn toegestaan. Elke opgave is 8 punten waard.

1. Bepaal de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(f)$ van het polynoom $f = X^4 - 4X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

2. Corrigeer de volgende foute stelling, en bewijs de gecorrigeerde stelling.

   Stelling.
   Stel K is een lichaam en $f \in K[X]$ is een polynoom met verzameling nulpunten $X = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \overline{K}$. Dan is de werking van $\mathrm{Gal}(f)$ *op X transitief.*

3. (a) Stel L is een willekeurig lichaam van karakteristiek verschillend van 2. Stel dat $a, b \in L$ twee elementen zijn die geen kwadraat zijn van een element in L. Bewijs dat b een kwadraat is in het lichaam $L(\sqrt{a})$ dan en slechts dan als ab een kwadraat is in L.

   Stel K is het lichaam $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

   (b) Laat zien dat $K/\mathbb{Q}$ een Galoisuitbreiding is en dat de afbeelding

   $$\varphi\colon \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \{\pm 1\}^3, \quad \sigma \mapsto \left(\frac{\sigma(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}, \frac{\sigma(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}, \frac{\sigma(\sqrt{5})}{\sqrt{5}} \right)$$

   een injectief morfisme van groepen is.

   (c) Laat zien dat $[K : \mathbb{Q}] = 2^3$ en leid af dat φ een surjectie is. (Aanwijzing: Definieer $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, en bepaal eerst alle deellichamen E van M die kwadratisch zijn over $\mathbb{Q}$.)

   (d) Laat zien dat $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ een primitief element van $K/\mathbb{Q}$ is.

4. Stel $\zeta \in \overline{\mathbb{Q}}$ is een primitieve 84-ste eenheidswortel.

   (a) Leg uit dat de uitbreiding $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ Galois is en laat zien dat de Galois groep isomorf is met de groep $(C_2)^3 \times C_3$ waar C_2 (resp. C_3) de cyclische groep van orde 2 (resp. 3) is.

   (b) Bepaal alle deellichamen van $\mathbb{Q}(\zeta)$ die kwadratisch zijn over $\mathbb{Q}$.

   (c) Beschouw het reële getal $\alpha = 2 \cdot \cos(2\pi/7) \in \mathbb{R}$. Is α algebraïsch over $\mathbb{Q}$? Zo ja, bepaal de graad van α over $\mathbb{Q}$.

   (d) Bepaal of de regelmatige 84-hoek in $\mathbb{C}$ met passer en liniaal construeerbaar is uitgaande van de deelverzameling $X = \{0, 1, \alpha\} \subset \mathbb{C}$.

5. (a) Geef een voorbeeld van een irreducibel polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ zó dat $\mathrm{Gal}(f) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

   (b) Geef een voorbeeld van een irreducibel polynoom $f \in \mathbb{F}_{p^2}[X]$ van graad p voor $p = 11$.

   (c) Bewijs of weerleg: Stel $f \in \mathbb{F}_{121}[X]$ is irreducibel en K is het breukenlichaam $Q(R)$ van de quotientring

   $$R = \frac{\mathbb{F}_{121}[X, Y]}{(Y^2 - f)}.$$

   Dan is elke eindige lichaamsuitbreiding van K separabel.

   (d) Bewijs of weerleg: Stel p is een willekeurig priemgetal en $f \in \mathbb{F}_p[X]$ is een irreducibel polynoom van oneven graad. Dan is de discriminant van f een kwadraat in $\mathbb{F}_p$.

Veel succes!