Tussentoets Galoistheorie

- Tijd: 3 uur.
- Aantal opgaven: 5.
- Alleen pen en papier toegestaan, dus geen boeken, aantekeningen, rekenmachines, telefoons, etc.

---

1. Laat $K \subset L$ een algebraïsche lichaamsuitbreiding zijn.
   (a) Bewijs dat voor $\alpha, \beta \in L$ geldt $[K(\alpha, \beta) : K] \leq [K(\alpha) : K] \cdot [K(\beta) : K]$.
   (b) Stel de graden $[K(\alpha) : K]$ en $[K(\beta) : K]$ zijn onderling ondeelbaar. Laat zien dat we nu gelijkheid hebben in onderdeel (a).

2. Corrigeer de volgende foute stelling, en geef een bewijs voor de gecorrigeerde stelling.

   Stelling. *Stel L/K is een lichaamsuitbreiding en $\alpha \in L$ is een element. Dan is er een uniek monisch en irreducibel polynoom $f_K^\alpha \in K[X]$ dat α als nulpunt heeft. Stel $K(\alpha) \subset L$ is het deellichaam voortgebracht door α. De afbeelding*

   $$K[X]/(f_K^\alpha) \xrightarrow{\sim} K(\alpha), \quad g \mod (f_K^\alpha) \mapsto g(\alpha)$$

   is een lichaamsisomorfisme en de graad $[K(\alpha) : K]$ is gelijk aan $\deg(f_K^\alpha)$.

3. Bepaal het minimumpolynoom van het element $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ over $\mathbb{Q}$.

4. Stel $f = X^4 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.
   (a) Laat zien dat het polynoom $f = X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreducibel is.
   (b) Schrijf $K = \mathbb{Q}[X]/(f)$. Ontbind het polynoom $X^4 - 4 \in K[X]$ in irreducibele factoren in $K[X]$.

5. Stel K is het breukenlichaam van de polynoomring $\mathbb{Q}[x, y, z]$ in drie variabelen x, y en z over $\mathbb{Q}$. Definieer de elementen

   $$\alpha = x + y + z, \quad \beta = x^2 + y^2 + z^2, \quad \gamma = x^3 + y^3 + z^3, \quad \in K,$$

   en beschouw het deellichaam $M = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) \subset K$ dat wordt voortgebracht door deze elementen.
   (a) Is het element $x \in K$ algebraïsch over M? Zo ja, bepaal het minimum polynoom $f_M^x \in M[X]$.
   (b) Bepaal de transcendentiegraad van M over $\mathbb{Q}$.