Tussentoets Galoistheorie

- Tijd: 3 uur.
- Aantal opgaven: 4.
- Alleen pen en papier toegestaan, dus geen boeken, aantekeningen, rekenmachines, telefoons, etc.

---

1. Laat $K \subset L \subset M$ een willekeurige toren van lichamen zijn.

   Beschouw de volgende uitspraak

   $K \subset M$ is algebraïsch $\Longleftrightarrow$ $K \subset L$ en $L \subset M$ zijn algebraïsch.

   (a) Is deze uitspraak correct?

   (b) Zo ja: Geef een bewijs. Zo niet: Corrigeer de uitspraak, en geef een bewijs.

2. Zoals gebruikenlijk noteren we $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3} \in \mathbb{R}$ voor de reële, positieve wortels van $X^2 - 2$ en $X^3 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Toon aan dat geldt

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}).$$

3. In deze opgave mag je gebruik maken van het volgende rekenkundige feit dat je **niet** hoeft na te gaan:

   Het element $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ is een nulpunt van het polynoom

$$f = X^8 - 40X^6 + 352X^4 - 960X^2 + 576 \in \mathbb{Q}[X].$$

   (a) Toon aan dat $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   (b) Toon aan dat $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

   (c) Toon aan dat $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 8$.

   (d) Laat zien dat $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

   Suggestie: Laat zien dat $\# \operatorname{Hom}(\mathbb{Q}(\alpha), \overline{\mathbb{Q}}) \geq 8$.

   (e) Toon aan dat het polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreducibel is.

4. Het getal $p = 2^{16} + 1$ is een priemgetal. Bepaal de graden van de irreducibele factoren van het polynoom

$$f = X^p - 2X + 1 \in \mathbb{F}_p[X].$$

   Suggestie: Kies $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ een nulpunt van f, en bestudeer de vergelijking $\alpha^{p^r} \overset{?}{=} \alpha$ voor alle $1 \leq r \leq p - 1$.

Midterm Galoistheory

- Time: 3 hours.
- Number of exercises: 4.
- Only pen and paper are allowed, so no books, notes, calculators, phones, etc.

1. Let $K \subset L \subset M$ be a tower of fields.

   Consider the following statement

   $K \subset M$ *is algebraic* $\Longleftrightarrow K \subset L$ *and* $L \subset M$ *are algebraic.*

   (a) Is this statement correct?

   (b) If yes, give a proof. If not: Correct the statement, and prove it.

2. As usual we denote $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3} \in \mathbb{R}$ for the real positive roots of $X^2 - 2$ and $X^3 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Prove that
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}).$$

3. In this exercise you may use the following fact, that you do **not** need to prove:

   The element $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ *is a root of the polynomial*
$$f = X^8 - 40X^6 + 352X^4 - 960X^2 + 576 \in \mathbb{Q}[X].$$

   (a) Prove that $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

   (b) Prove that $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

   (c) Prove that $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 8$.

   (d) Show that $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

   Suggestion: Prove that $\# \operatorname{Hom}(\mathbb{Q}(\alpha), \overline{\mathbb{Q}}) \geq 8$.

   (e) Prove that the polynomial $f \in \mathbb{Q}[X]$ is irreducible.

4. The number $p = 2^{16} + 1$ is prime. Compute the degrees of the irreducible factors of the polynomial
$$f = X^p - 2X + 1 \in \mathbb{F}_p[X].$$

   Suggestion: Choose $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ a root of f, and study the equation $\alpha^{p^r} \stackrel{?}{=} \alpha$ for all $1 \leq r \leq p-1$.