Tentamen Galoistheorie 2016/2017
1 juni 2017, 13-16, SP C1.110

Dit tentamen is een gesloten boek tentamen. Hulpmiddelen anders dan een pen zijn niet toegestaan. Geef bij elk antwoord een volledige redenatie. De laatste opgave is een bonusopgave. Je wordt aangeraden pas aan deze opgave te beginnen als je de eerste 5 opgaven hebt uitgewerkt.

Opgave 1 (2+2+2+2 punten). Geef van elk van de volgende lichaamsuitbreidingen aan of hij normaal, separabel en/of Galois is.

(a) De uitbreiding $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ van $\mathbb{Q}$.
(b) De uitbreiding $\mathbb{F}_7(t)[X]/(X^7 - t)$ van het lichaam $\mathbb{F}_7(t)$ van rationale functies in de variabele t over $\mathbb{F}_7$.
(c) De uitbreiding van het lichaam $\mathbb{Q}(\alpha)$ van $\mathbb{Q}$, waar $\alpha \in \mathbb{C}$ een keuze is van een kwadratische wortel van het element $1 + \sqrt{3} \in \mathbb{R}_{>0}$.
(d) De uitbreiding $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{5})$ van $\mathbb{Q}$.

Opgave 2 (3+3+3 punten). Bepaal de Galoisgroep van de volgende polynomen

(a) $f = X^3 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.
(b) $f = X^4 - X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.
(c) $f = X(X^2 - 10)(X^2 + 10) + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

Opgave 3 (3+3+3 punten). Geef van elk van de volgende polynomen $f \in \mathbb{Q}[X]$ aan of de nulpunten van f in $\mathbb{C}$ geconstrueerd kunnen worden met passer en lineaal.

(a) $f = X^{85} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$
(b) $f = X^6 + X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.
(c) $f = X^5 - 100 \in \mathbb{Q}[X]$.

Opgave 4 (4+3 punten).

(a) Geef een voorbeeld van een polynoom $f \in \mathbb{Q}[X]$ zó dat de Galoisgroep van f isomorf is met $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
(b) Laat zien dat de nulpunten van alle dergelijke polynomen $f \in \mathbb{Q}[X]$ reëel zijn.

Opgave 5 (3+3 punten).

(a) Formuleer de derde stelling van Sylow.
(b) Zij G een eindige groep van orde 148. Laat zien dat G niet simpel is door te bewijzen dat G precies één 37-Sylow ondergroep heeft.

Bonusopgave 6 (5 punten). Stel $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ zijn de vier nulpunten van het polynoom $X^4 - X^3 + X^2 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Bepaal de waarde van het rationale getal $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \in \mathbb{Q}$.

Veel succes!