

Koehandel

Auteur

Naam: Gijs Pannebakker
Student nummer: 0483648
Email: gpanneba@science.uva.nl

Begeleider

Dr. P. van Emde Boas

Curriculum details

Bachelor Project AI
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Datum

2006-06-30

Samenvatting

Koehandel is een soort kwartetspel. Kaarten komen in het spel door middel van een veilingsysteem en worden tussen spelers verhandeld met koehandels. In het onderzoek wordt met behulp van spel theorie een analyse verricht op het koehandelen.

Eerst worden de spelregels uitgelegd met de precieze afbakening van de te onderzoeken spelsituatie. Ook wordt een korte uitleg gegeven over de manier waarop de spel theorie is toegepast in de analyse van het spel. Hierin wordt besproken hoe het spel gezien kan worden als een zero-sum spel, een type spel waarvan de waarde kan worden uitgerekend.

De analyse van de te onderzoeken spelsituatie bestaat uit drie delen.

- Ten eerste wordt de structuur van de strategic form matrices van het spel volledig beschreven.
- Ten tweede wordt beschreven wat de eliminatie van gedomineerde strategieën voor effect heeft op de matrices. Het blijkt dat de matrices na eliminatie van gedomineerde strategieën eenzelfde vorm aannemen als in de Inspection Game, waarvan de waarde bekend is. Ook wordt de grootte van de gereduceerde matrix berekend.
- Ten derde wordt er gekeken naar partiële spelen, waarbij wordt aangetoond dat ze in gereduceerde vorm altijd de structuur van een Inspection Game type matrix zullen aannemen.

Tot slot wordt de conclusie gegeven van het onderzoek en worden mogelijkheden besproken voor toekomstig onderzoek.

Inhoudsopgave

1	Introductie.....	4
2	Het spel.....	5
	2.1 Onderdelen.....	5
	2.2 Doel van het spel.....	5
	2.3 Voorbereiding.....	5
	2.4 Spelverloop.....	5
	2.4.1 Het veilen.....	5
	2.4.2 Betalen.....	6
	2.4.3 De Koehandel.....	6
	2.5 De goudezel.....	6
	2.6 Einde van het spel.....	7
	2.7 In het project gebruikte situatie.....	7
3	Theoretische achtergrond.....	8
	3.1 Representatie van het spel in matrix vorm.....	8
	3.2 Waarde van een zero-sum spel.....	9
	3.3 Inspection Game.....	10
4	Analyse.....	12
	4.1 Hulpprogramma bij de analyse	12
	4.2 Structuur van de strategic form matrices.....	13
	4.3 Eliminatie van gedomineerde strategieën.....	16
	4.4 Het partiële spel.....	19
5	Conclusie.....	21
6	Toekomstig onderzoek.....	22
7	Referenties.....	24

1 Introductie

Ten behoeve van het afstudeerproject Bachelor AI aan de Universiteit van Amsterdam heb ik een onderzoek gedaan naar het spel Koehandel. Het doel van het project was om te onderzoeken welke strategieën de beide spelers in laatste fase van het spel kunnen toepassen en hoe goed deze strategieën zijn.

In het begin van het project was het onduidelijk wat er al aan onderzoek gedaan was op het gebied van het spel Koehandel (dat al 20 jaar oud is). Ik heb grondig gegoogled om hier achter te komen. Uiteindelijk vond ik maar één relevant item [1], te weten een project van twee studenten van de Rijks Universiteit Groningen uit 2003. Hun project bestond uit het maken van een java-applet die het spel simuleerde middels epistemische logica. Aangezien ik in mijn project het spel vanuit de spel theorie zou gaan benaderen (een totaal andere invalshoek), hoefden er geen aanpassingen gemaakt te worden.

Het document is als volgt opgedeeld:

In hoofdstuk 2 zijn de spelregels van Koehandel uitgelegd, en is aangegeven welke situatie binnen het spel van toepassing is op mijn opdracht.

In hoofdstuk 3 staat de theoretische achtergrond van het onderzoek beschreven. Hierbij bespreek ik een deel van de Game Theorie die ik heb toegepast tijdens het project. Ook is er een korte uitleg van de Inspection Game, een spel dat overeenkomsten vertoont met de spelsituatie die ik onderzocht heb van Koehandel.

In hoofdstuk 4 is een analyse van de te onderzoeken spelsituatie gegeven.

Hoofdstuk 5 bevat de conclusie.

In Hoofdstuk 6 worden mogelijkheden voor toekomstig onderzoek besproken.

Hoofdstuk 7 bevat de referenties.

2 Het spel

Ik volg hier vrij letterlijk de spelregels uit [2].

2.1 Onderdelen

- 40 dierkaarten (10 dieren kwartetten)
- 55 geldkaarten (10 x waarde 0, 20 x waarde 10, 10 x waarde 50, 5 x waarde 100, 5 x waarde 200, 5 x waarde 500)
- 1 reserve kaart
- 1 kaartenbakje.

2.2 Doel van het spel

Drie tot vijf spelers proberen dieren met het hoogst mogelijke punten aantal te verwerven. Dit gebeurt door veilingen of door 'koehandels'. Bij dit laatste kan worden gebluft. Wie tot slot de meeste punten heeft, wint.

De prijs die voor een dier betaald wordt hoeft niet overeen te komen met de waarde. Wie geluk heeft en slim is, kan een waardevol dier voor de spotprijs van 10 verwerven. Het speelgeld is aan het eind van het spel niets meer waard, alleen de punten waarde van de dieren telt.

2.3 Voorbereiding

De dierkaarten worden goed geschud en met de rugzijde naar boven in de kaartenhouder gelegd. De geldkaarten worden naar hun waarden gesorteerd. Iedere speler ontvangt 2x0, 4x10 en 1x50. De 0 kaarten kunnen goede diensten bewijzen bij de 'koehandels'. De niet gebruikte geldkaarten worden apart gelegd; zij komen in het spel zodra een 'goudezel' geveild wordt.

De spelers beslissen, wie begint.

Het speelgeld moet, op tactische gronden, altijd verdekt in de hand verborgen worden gehouden.

2.4 Spelverloop

Wie aan de beurt is, pakt de kaartenhouder en heeft de keus tussen:

- het veilen van de bovenste kaart van de stapel dierkaarten
of
- het aanbieden van een koehandel aan een medespeler.

Zodra hij een van deze akties afgesloten heeft, geeft hij de kaartenhouder aan zijn linkerbuur waarmee deze aan de beurt is. In het begin van het spel kan er alleen geveild worden, omdat een koehandel nog niet mogelijk is. Voor het aanbieden van een koehandel is het vereist dat 2 spelers kaarten van eenzelfde diersoort hebben.

2.4.1 Het veilen

De veilingmeester (de speler die de kaart veilt) draait het bovenste dier van de dierstapel om. Vanaf nu mogen de overige spelers naar believen op dit dier bieden, waarbij ieder nieuw bod het vorige moet overtreffen. De veilingmeester mag zelf

niet meebieden.

Als niemand meer een hoger bod wil uitbrengen, geeft de veilingmeester de dierkaart aan de hoogste bieder, en krijgt van deze speler het geld. De veilingmeester houdt dit geld zelf.

Hiermee is de veiling afgesloten, tenzij de veilingmeester van zijn voorkeursrecht gebruik maakt. De veilingmeester heeft het recht om na afloop het dier zelf te kopen. Hij geeft het geld aan de speler terug en betaalt deze het door hem mondeling geboden bedrag. In ruil hiervoor krijgt hij het dier.

Dieren worden open en duidelijk zichtbaar voor de spelers op tafel gelegd.

2.4.2 Betalen

Heeft een speler geen passend geld om mee te betalen, dan zal deze meer moeten betalen. Indien de speler te weinig geld heeft, dan moet deze al zijn geldkaarten aan zijn medespelers tonen. Hierna wordt het dier van voren af aan geveild.

Als er niemand biedt, mag de veilingmeester het dier voor niets houden.

2.4.3 De Koehandel

Zodra twee spelers dieren van hetzelfde kwartet bezitten, mag de speler die aan de beurt is, de andere speler een koehandel aanbieden. Hebben meerdere spelers hetzelfde dier, dan kan hij beslissen aan wie hij de koehandel aanbiedt.

De koehandel begint met een verdekt aanbod van speler A (de uitdager) aan speler B (de uitgedaagde), door nul of meer kaarten onder zijn hand met de waarde naar beneden op tafel te leggen, en te zeggen, welk dier hij daarvoor hebben wil. Bij dit aanbod mag gebluft worden. De speler mag geldkaarten met waarde 0 in zijn bod opnemen en het aantal kaarten laten zien, of helemaal geen kaarten onder zijn hand op tafel leggen.

Als het aanbod van de uitdager op tafel ligt, dan moet speler B, de uitgedaagde, beslissen of hij dit aanbod aanneemt of een tegenbod wil doen. Accepteert speler B het aanbod, dan neemt speler B alle aangeboden geldkaarten aan en staat het dier aan de uitdager af. De koehandel is daarmee beëindigd.

Als speler B een tegenbod wil doen, dan legt hij eveneens een aantal geldkaarten gedekt op tafel. Beide spelers tellen het hun door de ander aangeboden bedrag, en houden dit geld. De speler die het hoogste bedrag aan de ander betaald heeft, krijgt van de andere speler het dier.

Als beide spelers hetzelfde bedrag geboden hebben, moet speler A een nieuw aanbod doen. Speler B mag opnieuw kiezen tussen accepteren en een tegenbod doen. Als beiden wederom hetzelfde bedrag bieden, dan krijgt de uitdager het dier.

Als beide spelers 2 dieren van hetzelfde kwartet bezitten, dan betreft het aanbod altijd beide dieren. Bezit een speler slechts één dier, dan wordt altijd om maar één dier gespeeld.

2.5 De goudezel

Zodra de eerste ezel gedraaid wordt, ontvangt iedere speler nog voor het veilen begint, een 50-geldkaart uit de pot. Bij de tweede ezel krijgt iedere speler 100, bij de derde 200, en bij de vierde goudezel 500.

2.6 Einde van het spel

Wanneer alle dierkaarten geveild zijn is het aanbieden van een koehandel verplicht. Wie nu alleen nog complete dierkwartetten heeft, wordt overgeslagen.

Wanneer alle dierkwartetten compleet zijn, is het spel afgelopen. Iedere speler telt zijn punten: de waarde op de dierkaarten maal het aantal kwartetten. Het speelgeld is dan is niets meer waard.

Wie aan het eind de meeste punten heeft, wint het spel.

2.7 In het project gebruikte situatie

Aan het einde van het spel zal de stapel op zijn en zullen er dus geen dieren meer geveild kunnen worden, waardoor beurten enkel zullen bestaan uit het doen van koehandel. Gezien de gecompliceerdheid van het spel, heb ik me beperkt tot de situatie van de laatste beurt, waarin er nog één kwartet moet worden verhandeld tussen twee spelers. Deze situatie is alleen interessant indien één van deze spelers drie kaarten heeft en de andere één: in een twee-twee situatie zetten beide spelers al hun geld in en wint degene met het meeste geld. De speler met één kaart zal ik Speler 1 noemen en degene met drie kaarten Speler 3. Bij het één-drie spel zijn er twee mogelijkheden:

1. Speler 3 zet meer in dan Speler 1 en krijgt het kwartet,
2. Speler 1 zet meer in dan Speler 3, en krijgt één kaart, waardoor het spel in een twee-twee situatie komt. De volgende beurt zullen beide spelers dus al hun geld inzetten om te winnen. Merk op dat hierbij het initiatief is verschoven naar de speler die aanvankelijk niet het initiatief had (de speler met initiatief kiest om welke kaart van een speler 'gekoehandeld' gaat worden).

Zoals eerder beschreven is in de spelregels, is het zo dat als de spelers twee keer achterelkaar hetzelfde bedrag inzetten bij koehandel, de speler met het initiatief wint. Ik heb in mijn onderzoek aangenomen dat de initiatiefnemer wint na één keer dezelfde inzet van beide spelers. Dit is een simplificatie die niet af doet aan het onderzoek omdat er met de originele spelregels na één keer inzet in feite niets is veranderd aan de spelsituatie.

Ik zal naar de één-drie situatie refereren als sI (spelsituatie 1).

3 Theoretische achtergrond

3.1 Representatie van het spel in matrix vorm

S1 is te zien als een spel met twee spelers met één of meer pure strategieën afhankelijk van de mogelijke geldbedragen die ze kunnen inzetten. Een pure strategie is een specificatie van een actie van een speler op elk punt in het spel waar de speler een actie kan doen.

Stel, Speler 1 heeft 8 briefjes van tien, en Speler 3 heeft 5 briefjes van tien. Als Speler 1 bij een koehandel 30 inzet, terwijl Speler 3 10 inzet, dan zal Speler 1 een dierkaart van Speler 3 krijgen, waardoor beide spelers twee dierkaarten hebben. De spelers krijgen elkaars inzet, wat betekent dat Speler 1 nu een totaalbedrag 60 heeft en Speler 3 een totaalbedrag van 70. Als de spelers de volgende beurt weer koehandelen om dezelfde dierkaarten, dan zullen zij alles inzetten (het is immers de laatste beurt) en dus zal Speler 3 winnen.

Omdat de tweede beurt altijd het totaalbedrag zal worden ingezet, kan de uitkomst van het spel worden bepaald aan de hand van de inzet van de spelers én welke speler het initiatief heeft in de eerste beurt. Kennis van de initiatiefnemer is benodigd omdat de speler die aan de beurt is de beurt wint indien hetzelfde bod wordt uitgebracht. In het voorbeeld had Speler 1 in de eerste beurt beschikking over acht pure strategieën: 10 inzetten, 20 inzetten, ... , 80 inzetten. Zo had Speler 3 beschikking over 5 pure strategieën. Er zijn dus $8 \times 5 = 48$ combinaties waarvoor de uitkomst van het spel te berekenen is. Dit is gerepresenteerd in matrix 3.1, waarbij is aangenomen dat Speler 1 de initiatiefnemer was. De meest linkse kolom geeft de strategieën van Speler 1 aan, de bovenste rij de strategieën van Speler 3. Een 1 betekent dat Speler 1 het spel wint, een 3 betekent dat Speler 3 wint.

$$\begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrix 3.1

$$\begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrix 3.2

$$\begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrix 3.3

Had Speler 3 initiatiefnemer geweest in het voorbeeld, dan had de matrix er zo uitgezien als matrix 3.2. Matrices 3.1 en 3.2 zijn in één matrix te representeren als matrix 3.3. In deze matrix is het getal 2 gebruikt indien de initiatiefnemer wint.

De submatrix die ontstaat als de eerste rij en kolom weggelaten worden is in feite een strategic form matrix uit de game theorie. Hierin zou Speler 1 aan de waarde 1 een payoff van $+\pi$ toekennen en aan de waarde 3 een payoff van $-\pi$, waarbij π het aantal te behalen punten is dat het kwartet oplevert. Zo zou Speler 3 aan de waarde 3 een payoff van $+\pi$ toekennen en aan de waarde 1 een payoff van $-\pi$. Hoewel ik

verder in ga op de theorie achter strategic form matrices, zal ik de matrices blijven representeren met de cijfers 1, 2 en 3 omdat dit overzichtelijker is.

3.2 Waarde van een zero-sum spel

Een uitgebreidere uitleg over dit onderwerp is te vinden in hoofdstuk 6 van [3].

Een zero-sum spel is een spel waarbij de payoffs altijd tot 0 sommeren. S1 is ook een zero-sum spel: het aantal punten dat Speler 1 voorloopt op Speler 3 loopt Speler 3 achter op Speler 1.

Een gemixte strategie is een strategie die pure strategieën combineert. Elke pure strategie heeft een kans om gebruikt te worden. Een gemixte strategie is dus te schrijven als een vector met voor elke pure strategie de bijbehorende waarschijnlijkheid dat deze uitgevoerd wordt. De verwachte payoff waarde van een gemixte strategie, gegeven de strategie van de tegenstander, is dus gelijk aan de som van de waarschijnlijkheden maal de payoff waarden van de pure strategieën waaruit de gemixte strategie bestaat.

Strategie a domineert strategie b indien voor alle strategieën die de tegenstander kan doen $u(a) > u(b)$. Het kan voorkomen dat een pure strategie niet gedomineerd wordt door andere pure strategieën maar wel door één of meerdere gemixte strategieën.

Laat M een strategic form matrix van een zero-sum spel zijn. Laat vervolgens S de set van rijen en T de set van kolommen in M zijn, en $\pi(s, t)$ de waarde van de cel in M op punt (s, t) . Dan is de minimax waarde gelijk aan:

$$\bar{m} = \min_{t \in T} \max_{s \in S} \pi(s, t)$$

De maximin waarde is dan gelijk aan:

$$\underline{m} = \max_{s \in S} \min_{t \in T} \pi(s, t)$$

Als er gemixte strategieën zijn die pure strategieën domineren, dan ligt het berekenen van minimax en maximin iets gecompliceerder. Laat P de set van gemixte strategieën van Speler 1 zijn en Q de set van gemixte strategieën van Speler 3. $\Pi(p, q)$ representeert de verwachte payoff van een speler als Speler 1 gemixte strategie p speelt en Speler 3 gemixte strategie q . Indien M de payoff matrix van Speler 1 is, dan is de verwachte payoff functie gedefinieerd door:

$$\Pi(p, q) = p^T M q$$

De minimax waarde is nu gelijk aan:

$$\bar{v} = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} \Pi(p, q)$$

De maximin waarde is gelijk aan:

$$v = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \Pi(p, q)$$

De Minimax Theorem van Von Neumann zegt dat $v = \bar{v}$.

Het security level van een speler is de grootst te verwachten payoff die de speler kan garanderen, ongeacht wat andere spelers doen. Deze payoff is te behalen door een zogeheten security strategie uit te voeren. In het spel dat volgt uit s1 zal het security level van een speler p zijn als er een altijd winnende strategie is voor de speler.

Het security level van Speler 1, wat de speler is wiens strategieën per rij vertegenwoordigd worden, is gelijk aan v . Dit is de maximale waarde de Speler 1 kan verwezelijken als hij er vanuit gaat dat Speler 3 zijn payoff probeert te minimaliseren.

Een eindige twee speler zero-sum game heeft een waarde $v = v = \bar{v}$. Elke speler kan garanderen dat hij minimaal een payoff heeft van v ongeacht de strategie van de tegenstander, en iedere speler kan ervoor zorgen dat de tegenstander geen hogere payoff heeft dan deze waarde. Om er zeker van te zijn dat hij een expected payoff krijgt van op z'n minst v, kan een speler een van zijn security strategieën gebruiken.

In hoofdstuk 4, de analyse, wordt besproken hoe de waarde van het spel s1 berekend kan worden.

3.3 Inspection Game

De Inspection Game is een zero-sum spel dat overeenkomsten vertoont met de spelsituatie die ik onderzocht heb van Koehandel. Ik zal hier een korte uitleg van het spel geven. Een uitgebreidere bespreking is te vinden in [3], vanaf pagina 257.

De Inspection Game telt twee spelers: Een firma die illegaal afval wil lozen in een rivier en een milieu organisatie die de firma op heterdaad probeert te betrappen. De firma loost al het afval op één dag. De milieu organisatie weet dat de firma de komende n dagen moet één keer moet lozen maar kan wegens gebrek aan mankracht maar één dag controleren gedurende die tijd.

We nemen aan dat de milieu organisatie het spel wint (+1) als beide spelers op dezelfde dag in actie komen, en dat de firma in alle andere gevallen wint (-1). Dit is te vatten in een n bij n matrix met de structuur van figuur 3.1.1, waarbij de cellen op de hoofddiagonaal de waarde 1 krijgen en de andere cellen waarde -1.

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & +1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & +1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Figuur 3.1.1

De waardes in elke kolom sommeren tot $-(n-2)$. Als de milieu organisatie zijn pure strategieën met dezelfde waarschijnlijkheid gebruikt, dan betekent dit een verwachte payoff van $-(n-2)/n$ ongeacht wat de firma zal doen. Gezien de symmetrie in de matrix, zal de firma dus een verwachte payoff hebben van $(n-2)/n$ ongeacht wat de milieu organisatie zal doen. Het is een security strategie voor elke speler om elk van hun strategieën met evenveel waarschijnlijkheid te gebruiken. Dit is inductief bewezen in [3]. De waarde van het spel is te schrijven als het security level van de milieu organisatie:

$$v_n = -(n-2)/n = -1 + \frac{2}{n}$$

4 Analyse

4.1 Hulpprogramma bij de analyse

Om inzicht te krijgen in de structuur van de strategic form matrices, leek het me handig om snel veel verschillende matrices te kunnen genereren. Dit bracht me ertoe het programma Matrix.py (in Python) te schrijven. Het programma gaat uit van twee spelers, een met 1 kaart en een met 3 kaarten. Het berekent een strategic form matrix gegeven twee geld-mogelijkheid-lijsten en gegeven wie de initiatiefnemer is.

In Matrix.py wordt de matrix samengesteld door voor elke combinatie van inzetten van de spelers de *getValue* functie aan te roepen. Hierin wordt vervolgens de waarde (1 of 3) uitgerekend die, gegeven de inzetten (money1 en money3), de totaalbedragen (total_money1 en total_money3), de hoeveelheid kaarten van de spelers (cards1 en cards3), de hoeveelheid keren dat er al een gelijke inzet is geweest (count_equal) en de initiatiefnemer (initiative) de juiste waarde teruggeeft. De pseudocode van *getValue* is als volgt:

```
functie getValue(money1, money3, cards1, cards3, total_money1, total_money3, count_equal, initiative):  
    total_money1 += money3 - money1  
    total_money3 += money1 - money3  
  
    Als cards1 = 0 en cards3 = 4 dan:  
        return 3  
  
    Anders: als cards1 = 4 en cards3 = 0 dan:  
        return 1  
  
    Anders: als cards1 = 1 en cards3 = 3 dan:  
  
        Als money1 > money3 dan:  
            cards1 += 1  
            cards3 -= 1  
  
            Als initiative = 1 dan:  
                initiative = 3  
            Anders: als initiative = 3 dan:  
                initiative = 1  
  
            return getValue(total_money1, total_money3, cards1, cards3, total_money1, total_money3,  
                             count_equal, initiative)  
  
        Anders: als money1 < money3 dan:  
            cards1 -= 1  
            cards3 += 1  
  
            Als initiative = 1 dan:  
                initiative = 3  
            Anders: als initiative = 3 dan:  
                initiative = 1  
  
            return getValue(total_money1, total_money3, cards1, cards3, total_money1, total_money3,  
                             count_equal, initiative)  
  
        Anders: als money1 = money3 dan:  
  
            Als initiative = 1 dan:  
  
                cards1 += 1  
                cards3 -= 1  
                initiative = 3  
                count_equal += 1  
  
                return getValue(total_money1, total_money3, cards1, cards3, total_money1,  
                                 total_money3, count_equal, initiative)  
  
            Anders: als initiative = 3 dan:  
                return initiative  
  
    Anders: als cards1 = 2 en cards3 = 2 dan:  
  
        Als money1 > money3 dan:  
  
            Als initiative = 1 dan:  
                initiative = 3  
            Anders: als initiative = 3 dan:  
                initiative = 1
```

```

cards1 += 2
cards3 -= 2
return getValue(total_money1, total_money3, cards1, cards3, total_money1, total_money3,
                count_equal, initiative)

Anders: als money1 < money3 dan:

  Als initiative = 1 dan:
    initiative = 3
  Anders: als initiative = 3 dan:
    initiative = 1

  cards1 -= 2
  cards3 += 2
  return getValue(total_money1, total_money3, cards1, cards3, total_money1, total_money3,
                  count_equal, initiative)

Anders: als money1 = money3 dan:

  Als initiative = 1 dan:

    cards1 += 1
    cards3 -= 1
    initiative = 3
    count_equal += 1

    return getValue(money1, money3, cards1, cards3, total_money1, total_money3,
                    count_equal, initiative)

Anders: als initiative = 3 dan:
  return initiative

```

4.2 Structuur van de strategic form matrices

Als Speler 1 meer geld heeft dan Speler 3 dan ontvouwt zich een structuur:

$$\begin{pmatrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrix 4.1.1

$$\begin{pmatrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrix 4.1.2

$$\begin{pmatrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrix 4.1.3

$$\begin{pmatrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrix 4.1.4

	0	1	2	3	4	5
0	2	3	3	3	3	3
1	1	2	3	3	3	3
2	3	1	2	3	3	3
3	3	3	1	2	3	3
4	3	3	3	1	2	3
5	3	3	3	3	1	2
6	3	3	3	3	3	1
7	3	3	3	3	3	3
8	3	3	3	3	3	3
9	3	3	3	3	3	3

Matrix 4.1.5

	0	1	2
0	2	3	3
1	1	2	3
2	1	1	2
3	1	1	1
4	3	1	1
5	3	3	1
6	3	3	3
7	3	3	3
8	3	3	3
9	3	3	3

Matrix 4.1.6

Als Speler 3 gelijk of meer totaal-geld heeft dan Speler 1 dan wint Speler 3 altijd.

	0	1	2	3	4	5	6
0	3	3	3	3	3	3	3
1	3	3	3	3	3	3	3
2	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3
4	3	3	3	3	3	3	3
5	3	3	3	3	3	3	3

Matrix 4.1.7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Matrix 4.1.8

Er vindt geen structurele verandering plaats als er verschillende mogelijke geldsommen worden weggelaten bij Speler 1; er zijn in feite alleen wat rijen weggelaten.

	0	1	2	3	4	5
2	3	3	2	3	3	3
4	3	3	3	3	2	3
6	3	3	3	3	3	3

Matrix 4.1.9

	0	1	2
3	1	1	1
6	3	3	3
9	3	3	3

Matrix 4.1.10

Ook zorgt het weglaten van verschillende mogelijke geldsommen bij speler 3 niet voor structurele verandering; er zijn in feite alleen enkele kolommen weggelaten.

	0	2	4	6	8
0	2	3	3	3	3
1	3	3	3	3	3
2	3	2	3	3	3
3	3	3	3	3	3
4	3	3	2	3	3
5	3	3	3	3	3
6	3	3	3	2	3
7	3	3	3	3	3
8	3	3	3	3	2
9	3	3	3	3	3

Matrix 4.1.11

	0	2	4	6	8
0	2	3	3	3	3
2	3	2	3	3	3
4	3	3	2	3	3
6	3	3	3	2	3
8	3	3	3	3	2
10	3	3	3	3	3

Matrix 4.1.12

Aan de hand van deze voorbeelden is een duidelijke structuur te zien:

$i1$ = inzet speler 1

$i3$ = inzet speler 3

$t1$ = het totale mogelijke in te zetten bedrag van speler 1 in $s1$

$t3$ = het totale mogelijke in te zetten bedrag van speler 3 in $s1$

- De laatste rij bestaat altijd uit enkel drieën
- Als $t3 \geq t1$, dan zal de matrix uit enkel drieën bestaan
- Als $t3 < t1$, dan zijn er verschillende interessante observaties:
 - Op de diagonale lijn waarbij $i1 = i3$ geldt dat de speler met initiatief wint ("speler 2")
 - Alles boven de diagonale lijn (dus als $i1 < i3$) wordt gewonnen door speler 3
 - Als speler 1 het initiatief heeft dan heeft cel $(i1, i3)$ van de matrix waarde 1 indien geldt:

$$i3 < i1 < \frac{t1 - t3}{2} + i3 \quad ,$$

anders heeft de cel waarde 3.

- Als speler 3 het initiatief heeft dan heeft cel $(i1, i3)$ van de matrix waarde 1 indien geldt:

$$i3 \leq i1 < \frac{t1 - t3}{2} + i3 \quad ,$$

anders heeft de cel waarde 3.

Voorbeeld: In matrix (6) moet speler 3 als hij 0 inzet hopen dat speler 1 gelijk of meer dan $((9 - 2) / 2) + 0 = 3,5$ inzet. De schuine lijn begint verticaal gezien altijd op $i3$.

Bewijs voor deze formule is als volgt. Als speler 1 wint dan moet er gelden dat:

$$\begin{aligned} t1 + i3 - i1 &> t3 - i3 + i1 \\ i3 - i1 &> t3 - i3 + i1 - t1 \\ 2i3 - 2i1 &> t3 - t1 \\ i3 - i1 &> (t3 - t1) / 2 \\ i1 &< (t3 - t1) / 2 + i3 \end{aligned}$$

Een rij met enen betekent een altijd winnende strategie voor speler 1. Uit de formule $i3 < i1 < ((t1 - t3) / 2) + i3$ volgt dat speler 1 meer dan 3 keer zoveel geld moet hebben als speler 3 om een altijd winnende strategie te krijgen. Dit komt namelijk voor als cel $(t3, 0)$ waarde 1 heeft als speler 1 het initiatief heeft, of als cel $(t3 + 1, 0)$ waarde 1 heeft als speler 3 het initiatief heeft. Dit heb ik als volgt afgeleid:

Initiatief speler 1:

$$\begin{aligned} (t1 - t3) / 2 &> t3 \\ t1 - t3 &> 2t3 \\ t1 &> 3t3 \end{aligned}$$

Initiatief speler 3:

$$\begin{aligned} (t1 - t3) / 2 &> t3 + 1 \\ t1 - t3 &> 2t3 + 2 \\ t1 &> 3t3 + 2 \end{aligned}$$

4.3 Eliminatie van gedomineerde strategieën

Laat een inspection-matrix een n bij n matrix zijn waarvan de hoofddiagonaal uit enen bestaat en de rest van de matrix gevuld is met drieën. Bij het wegstrepen van gedomineerde strategieën uit matrices, waarin geldt dat $t1 > t3$ (als Speler 1 het initiatief heeft, $t1 > t3 + 1$ als Speler 3 het initiatief heeft), viel op dat als alle gedomineerde strategieën weggehaald waren er altijd een inspection-matrix ontstond. De waarde van een spel met de inspection-matrix van n bij n als strategie form is gedefinieerd in paragraaf 3.1. De waarde van het spel in $s1$ is dus te berekenen als er aangetoond kan worden dat dergelijke matrices altijd een Inspection Game patroon vertonen en als de grootte van de inspection-matrix kan worden berekend.

Laat M een matrix zijn met $r = t1 + 1$ rijen en $k = t3 + 1$ kolommen. Laat $M(i1, i3)$ de inhoud weergeven van de cel op de $i1$ -de rij en de $i3$ -de kolom. In het bijzonder geldt dat elke cel $M(i1, i3)$ de waarde 1 of 3 heeft.

Als M de eigenschap heeft dat $t1 > t3$ en Speler 1 heeft het initiatief, dan geldt dat er een diagonale 'band' van enen door M loopt, en dat de rest van M uit drieën bestaat. Dit volgt uit de bewezen stelling dat

- Als speler 1 het initiatief heeft dan heeft $M(i1, i3)$ van de matrix waarde 1 indien geldt:

$$i3 < i1 < \frac{t1 - t3}{2} + i3$$

anders heeft de cel waarde 3.

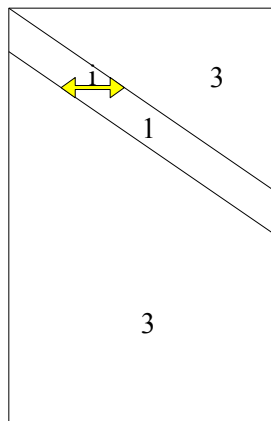
- Als speler 3 het initiatief heeft dan heeft $M(i1, i3)$ van de matrix waarde 1 indien geldt:

$$i3 \leq i1 < \frac{t1 - t3}{2} + i3$$

anders heeft de cel waarde 3.

M is schematisch weergegeven in figuur 4.2.1. In matrix 4.2.1 is een voorbeeld te

zien van een mogelijke matrix, met $i1=(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)^T$ en $i3=(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^T$.



Figuur 4.2.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

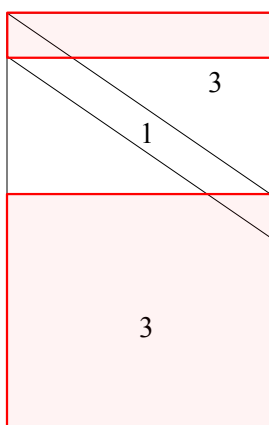
Matrix 4.2.1

Bij het verwijderen van gedomineerde strategieën kunnen vervolgens $t1 - k + i$ rijen worden weggestreept, waarbij i de breedte van het interval van enen is in een rij. Deze breedte is gedefinieerd als:

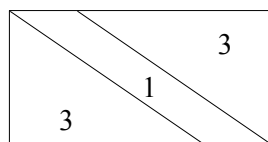
$$i = \text{ceil}\left(\frac{t1 - t3}{2}\right)$$

In het voorbeeld geldt dus dat $i = 2$. De 'ceil' moet worden gedaan wegens de ongelijkheid in de formule $i1 < \frac{t1 - t3}{2} + i3$.

Figuur 4.2.2 geeft schematisch weer welke rijen er verwijderd zullen worden (dit zijn de rode vlakken). Dit levert uiteindelijk een structuur op zoals in figuur 4.2.3, wat een matrix is met de afmetingen $k - i + 1$ bij k . In matrix 4.2.2 is te zien hoe dit is toegepast op het voorbeeld.



Figuur 4.2.2



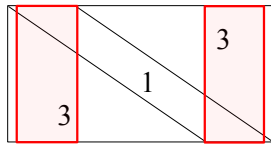
Figuur 4.2.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

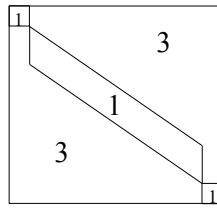
Matrix 4.2.2

In figuur 4.2.4 zijn de gedomineerde strategieën weer met rood aangegeven. De breedte van de rode kolommen is gelijk aan $i - 1$. Wanneer deze gedomineerde strategieën worden weggelaten, treedt er een structuur op als in figuur 4.2.5. Matrix

4.2.3 laat de toepassing zien op het voorbeeld.



Figuur 4.2.4



Figuur 4.2.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix 4.2.3

Merk op dat de buitenste rand van de matrix nu enkel enen in de hoekpunten heeft en dat de diagonaal met dikte i daar dikte 1 heeft gekregen. Verder is de diagonaal hetzelfde gebleven.

Na twee stappen (één horizontaal en één verticaal) is de inspection-matrix voor de buitenste rand volbracht. Door dit proces iteratief toe te passen zal de matrix dus altijd eindigen op een inspection-matrix. Als voor elk horizontaal interval geldt dat deze niet gedomineerd wordt door een ander (horizontaal) interval, dan moet het namelijk zo zijn dat er een verticaal interval is waarvoor geldt dat deze gedomineerd wordt door een ander (verticaal) interval (en andersom), behalve in het geval van de inspection-matrix.

Dat het genomen voorbeeld ook uitkomt op een inspection-matrix is te zien in Matrix 4.2.4 en 4.2.5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix 4.2.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix 4.2.5

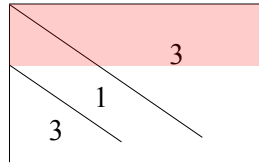
Ik ben me ervan bewust dat het voorgaande geen wiskundig bewijs is.

Het is mooi dat alle matrices uitkomen in een enkele 1, een 3, of een inspection-matrix, omdat zo altijd de waarde van het spel bepaald kan worden, mits de grootte van de inspection-matrix bekend is.

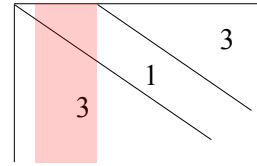
Door veel voorbeelden te bekijken kwam ik erachter dat de grootte van de inspection-matrix als volgt gedefinieerd is:

$$n = \text{ceil}\left(\frac{t3+1}{i}\right)$$

De waarde van de game hangt zoals gezegd af van de grootte n van de inspection-matrix. Hoe groter de verhouding tussen de breedte van de strategische form matrix ten opzichte van de lengte van het interval van enen, hoe groter de uiteindelijke inspection-matrix zal worden. Figuren 6 en 7 geven enkel de linkerbovenhoek weer van matrix M . Het valt op dat, enkel in deze hoek, per stap $i - 1$ rijen of kolommen worden geelimineerd (dit zijn de rode vlakken).



Figuur 4.2.6



Figuur 4.2.7

Na één stap zal de matrixgrootte $k - (i - 1)$ bij k zijn. Eén kolom (na een oneven stap een kolom, na een even stap een rij) zal dan voldoen aan de inspection-matrix structuur. De rest van de matrix is van de afmeting $t_3 + 1 - i$ bij k . Vanuit inductie zal er door i gedeeld moeten worden. Daarna moet de kolom die al goed stond er weer bij opgeteld worden. Dit levert de volgende formule op:

$$n = \text{ceil}\left(\frac{t_3 + 1 - i}{i}\right) + 1 = \text{ceil}\left(\frac{t_3 + 1}{i}\right)$$

4.4 Het partiële spel

Het weglaten van rijen of kolommen verandert niets aan de waarden van andere cellen in de matrix, mits de maximum waarden (t_1 en t_3) niet worden aangepast. Indien er rijen of kolommen weggelaten zijn in de matrix, bestaat er de mogelijkheid dat de grootte van de inspection-matrix verandert. De volgende twee voorbeelden illustreren dat.

Als de gedomineerde strategieën worden weggestreept uit matrix 4.3.1, dan zal er enkel een 1 overblijven gezien de altijd winnende strategie van Speler 1. Echter, als Speler 1 deze strategie (namelijk 2 inzetten) wordt ontnomen dan zal er een grotere inspection-matrix ontstaan, namelijk van 2 bij 2. Het ontnemen van de strategie '2 inzetten' houdt in dat de strategie '5 inzetten' ook wordt ontnomen. Speler 1 zou dan namelijk alleen 1 munt van waarde 0, 1 munt van waarde 1, 1 munt van waarde 3 en 1 munt van waarde 4 tot zijn beschikking mogen hebben (aangezien het totaal 8 moet blijven). De aanwezigheid van strategie '5 inzetten' heeft geen invloed op de grootte van de uiteindelijk verkregen inspection-matrix in dit geval.

	0	1	2
0	1	3	3
1	1	1	3
2	1	1	1
3	3	1	1
4	3	3	1
5	3	3	3
6	3	3	3
7	3	3	3
8	3	3	3

Matrix 4.3.1

	0	1	2	3	4
0	1	3	3	3	3
1	3	1	3	3	3
2	3	3	1	3	3
3	3	3	3	1	3
4	3	3	3	3	1
5	3	3	3	3	3

Matrix 4.3.2

Als de gedomineerde strategieën worden weggestreept uit matrix 4.3.2, dan zal er een inspection-matrix overblijven van 4 bij 4. Wordt er een kolom weggelaten (kolom 0 kan weggelaten worden zonder verder veranderingen teweeg te brengen),

dan blijft er een 3 bij 3 inspection-matrix over. De inspection-matrix is dus kleiner geworden.

In sectie 4.2 is al aangegeven dat matrices met $t_1 + 1$ rijen en $t_3 + 1$ kolommen altijd uitkomen op een inspection-matrix als de gedomineerde strategieën weggestreept worden. Dit blijkt ook zo te zijn als er strategieën van te voren worden weggelaten.

Laat M een arbitraire s_1 strategische vorm matrix waarin geen altijd winnende strategieën voorkomen en waarin de gedomineerde rijen verwijderd zijn. De eerste rij van M zal altijd beginnen met een interval van enen (van lengte i waarbij $1 \leq i \leq t_3$), gevolgd door één of meer drieën. Het is triviaal dat het interval van enen op de tweede rij niet eerder kan beginnen. Ook kan het niet op hetzelfde punt beginnen als op de rij erboven omdat dan één van de twee strategieën de ander zou domineren, of ze precies hetzelfde zouden zijn. Het interval op de tweede rij zal dus later moeten beginnen, en later moeten eindigen om niet gedomineerd te worden. Het begin van het interval op de tweede rij mag echter niet later beginnen dan het einde van het interval op de eerste rij (dan heeft Speler 3 een altijd winnende strategie). De tweede rij zal dus met één of meerdere drieën beginnen, waaronder verder alleen nog maar drieën kunnen komen. Deze situatie is weergegeven in figuur 4.3.1.

	1	3
3	1	3
3		

Figuur 4.3.1

	1	3
3	1	3
3		

Figuur 4.3.2

1	3
3	

Figuur 4.3.3

Alle $i - 1$ kolommen tussen de eerste kolom en het einde van het interval van enen op de eerste rij zullen dus worden gedomineerd door de eerste kolom. In figuur 4.3.2 zijn deze kolommen met een rood vlak aangegeven. Als deze kolommen verwijderd worden, ontstaat er een deel van de inspection-matrix. Dit is weergegeven in figuur 4.3.3. Het rode vlak zal hier weer net zo'n matrix zijn als in figuur 4.3.1, maar dan gekanteld. Dit proces herhaalt zich in zowel de linker bovenhoek als de rechter onderhoek totdat de volledige inspection-matrix is ontstaan, ongeacht het ontbreken van bepaalde rijen of kolommen.

5 Conclusie

Het doel van het project was om te onderzoeken welke strategieën de beide spelers in s1 kunnen toepassen en hoe goed deze strategieën zijn. In het onderzoek dat ik heb gedaan heb ik de structuur van de strategic form matrices die van toepassing zijn op s1 voor een groot deel ontrafeld en beschreven. Met de opgestelde formules kan worden berekend wat de uitkomst van een spel is, gegeven de inzetten en de totaalbedragen van de spelers. Ook kan worden berekend of er sprake is van een altijd winnende strategie.

Ik heb aangetoond dat zowel partiële als niet-partiële matrices altijd de structuur van een Inspection Game matrix aannemen nadat de gedomineerde strategieën verwijderd zijn. Indien er sprake is van een niet-partiële strategic form matrix is de grootte van de bijbehorende gereduceerde matrix te berekenen.

Gecombineerd met de kennis van de Inspection Game zoals beschreven in [3], maakt dit het mogelijk de waarde v van een niet-partiële strategic form matrix in één keer te berekenen. Dit kan door de volgende formules te combineren:

$$v = -1 + \frac{2}{n}$$
$$n = \text{ceil}\left(\frac{t3+1}{i}\right) = \text{floor}\left(\frac{t3}{i}\right) + 1$$
$$i = \text{ceil}\left(\frac{t1-t3}{2}\right)$$

Dit resulteert in:

$$v = \frac{2}{\text{floor}\left(\frac{t3}{\text{ceil}\left(\frac{t1-t3}{2}\right)}\right) + 1} - 1$$

met $t1$ en $t3$ als respectievelijk de totaalbedragen van Speler 1 en Speler 3.

Het was de bedoeling zo veel mogelijk van het spel te analyseren op basis van spel theorie, en alleen gebruik te maken van simulatie als dit relevant leek. Uiteindelijk heb ik bijna de gehele situatie s1 kunnen analyseren met behulp van spel theorie waardoor onderzoek op basis van simulatie niet meer aan de orde was.

6 Toekomstig onderzoek

In Koehandel weten spelers in de meeste gevallen niet hoeveel geld de andere spelers hebben. Het is dus een spel van imperfecte informatie: ondanks het feit dat spelers kennis hebben van het totaal aantal geldkaarten in het spel is het meestal onmogelijk voor een speler om aan de hand van zijn eigen geldbedrag te weten hoeveel geld een andere speler heeft.

Er zijn een aantal uitzonderingen hierop:

- Een speler die al het geld in zijn bezit heeft, weet dat de andere spelers geen geld hebben. Dit zal bijna nooit voorkomen.
- Er is een spelregel die zegt dat als één van de spelers in een veiling een bod uitbrengt dat hoger is dan zijn eigen totaalbedrag, deze speler al zijn geldkaarten moet laten zien. Als dit voorkomt in een drie speler spel, dan weten de andere twee spelers het geldbedrag van elke speler.
- Indien het spel met twee spelers gespeeld wordt, verandert het in een spel met perfecte informatie: de spelers kennen de totaal hoeveelheid geld in het spel en hun eigen hoeveelheid geld, de rest van het geld is dus bij de tegenstander. Dit vereist wel een extra regel, namelijk dat de veilingmeester ook op een kaart moet kunnen bieden. Deze aanpassing is nodig om de veiling niet tot een triviaal deelspel te laten ontaarden.

Een mogelijke oplossing voor het bestuderen van het probleem van imperfecte informatie is het gebruik van epistemische logica. Dit is een interessante alternatieve manier om Koehandel te analyseren, die speciaal nuttig is voor het bestuderen van de ontwikkeling van kennis gedurende het spel. In het huidige onderzoek was ik vooral geïnteresseerd in de payoffs die spelers gedurende het spel kunnen veiligstellen. Om deze reden heb ik het probleem verder niet met epistemische logica bestudeerd. Overigens hebben Douwe Terluin en Robert Coehoorn in [1] wel gebruik gemaakt van epistemische logica. De precieze toepassing hiervan wordt echter niet duidelijk uit hun verslag. Wellicht zou een combinatie van spel theorie met epistemische logica nieuwe inzichten kunnen verschaffen.

Indien het onderzoek wordt uitgebreid naar situaties met meerdere spelers, zal er rekening gehouden moeten worden met het feit dat het spel oneindig lang kan worden doorgespeeld. Als in het geval van drie spelers één speler twee kaarten van een kwartet in zijn bezit heeft en de andere twee spelers elk één kaart, dan zal het spel, zolang de spelers met één kaart niet met elkaar handelen maar alleen met de speler met twee kaarten, net zolang doorgaan tot twee beurten nadat de speler met twee kaarten een keer wint. Schematisch weergegeven is dit te beschrijven als $(1,1,2) \rightarrow (2,1,1) \rightarrow (1,1,2) \rightarrow (\text{etc})$. Als de speler met twee kaarten verliest, dan verdient deze meer geld dan de speler met één kaart die wint. Dit geeft de speler die eerst twee kaarten had de mogelijkheid vervolgens de kaart weer terug te winnen.

Het onderzoek zou ook kunnen worden uitgebreid met de vervanging van kwartetten door kwintetten. Ook deze uitbreiding introduceert een bron van non-terminatie. De kaartverdeling zou dan een verloop kunnen hebben als: $(1,4) \rightarrow$

$(2,3) \rightarrow (4,1) \rightarrow (\text{etc})$.

Een mogelijke uitbreiding van het probleem is het onderzoek naar strategieën in situaties waarin twee of meerdere kwartetten nog compleet moeten worden gemaakt. Stel dat twee kwartetten nog compleet moeten worden gemaakt, en dat daarbij voor kwartet 1 een één-drie situatie geldt en voor kwartet 2 een twee-twee situatie. De speler die aan de beurt is kan dan kiezen voor welk kwartet hij de koehandel aangaat. Bij de keuze dient rekening gehouden te worden met de waardes die de kwartetten opleveren (deze zijn altijd verschillend tussen twee kwartetten): de speler zal niets hebben aan het kwartet met de minste waarde. Aangenomen dat de kwartetten toch gelijke waarden hebben, maakt de situatie complexer. Een beginzet in het één-drie spel kan leiden tot zetdwang in het twee-twee spel, omdat de mogelijke twee zetten in het één-drie spel kunnen worden onderbroken door een zet in het twee-twee spel. De speler zou bij zijn keuze de kwartetten als aparte spelen kunnen beschouwen en van elk deelspel de waarde uitrekenen en de kans dat de speler het spel wint. Dit lijken mij twee waarden waar rekening gehouden mee dient te worden bij zo'n beslissing. In hoeverre dit zo is kan een toekomstig onderzoek uitwijzen.

Tot slot dient vermeld te worden dat naast het koehandelen het spel Koehandel ook een veilingstelsel heeft. De strategieën die hierin mogelijk zijn kunnen op eenzelfde manier onderzocht worden als in dit project met koehandelen is gedaan. Bij het onderzoeken van strategieën in het veilingstelsel zal rekening gehouden moeten worden met het feit dat na de veiling nog gekoehandeld kan worden.

7 Referenties

- [1] Project Verslag Koehandel in Multi Agent Systemen. Auteurs: Douwe Terluin & Robert Coehoorn. 7 september 2003.
- [2] Koehandel - Volledig. Auteur: Ridiger Koltze. Uitgegeven door Ravensburger, 1985. Vertaald in het Nederlands door Teun Spaans.
- [3] Fun and games - A Text on game theory. Auteur: Ken Binmore
- [4] Logica voor informatici. Auteurs: J.F.A.K. van Benthem & H.P. van Ditmarsch