Take-home Tentamen Modeltheorie

Benno van den Berg

18 december 2012

UITERSTE INLEVERDATUM: MAANDAG 7 JANUARI OM 13:00.

Opgave 1. We noemen een formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *positief*, als er geen negatie $\neg$ of implicatie $\rightarrow$ in voorkomt; dat wil zeggen, als die kan worden opgebouwd uit atomaire formules door alleen $\wedge, \vee, \exists$ en $\forall$ te gebruiken. Verder noemen we een homomorfisme $f : M \rightarrow N$ tussen $\mathcal{L}$-structuren *positief*, als

$$M \models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \Rightarrow N \models \varphi(f(m_1), \ldots, f(m_n))$$

geldt voor alle positieve formules $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ and alle $m_1, \ldots, m_n \in M$.

(a) [6 punten] Zij T een $\mathcal{L}$-theorie en $T_0 = \{\psi : \psi$ is een positieve zin en $T \models \psi\}$. Bewijs dat er voor elk model A van T_0 een diagram van $\mathcal{L}$-structuren

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "l"] \\ A \arrow[r, "k"'] & C \end{tikzcd}$$

bestaat, zodat (1) B een model van T is, (2) k een elementaire inbedding is, (3) l positief is en (4) het beeld van k bevat is in het beeld van l.

(b) [8 punten] Zij $f : B \rightarrow A$ een positief homomorfisme tussen $\mathcal{L}$-structuren. Bewijs dat er een commuterend diagram van $\mathcal{L}$-structuren

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "l"'] & C \end{tikzcd}$$

bestaat, waarbij de horizontale afbeeldingen k en l elementaire inbeddingen zijn, de verticale afbeeldingen f en g positieve homomorfismen zijn en het beeld van l bevat is in het beeld van g.

(c) [6 punten] Zij T een $\mathcal{L}$-theorie waarvan de modellen gesloten gesloten zijn onder surjectieve beelden: dat wil zeggen, als $f : M \rightarrow N$ een surjectief homomorfisme is en M is een model van T, dan is N dat ook. Gebruik onderdelen (a) en (b) om te laten zien dat T kan worden geaxiomatiseerd door positieve zinnen.

Opgave 2. [10 punten] Zij $n \in \mathbb{N}$, κ een oneindig kardinaalgetal en T een $\mathcal{L}$-theorie. Bewijs dat als de typenruimte $S_n(T)$ hoogstens κ veel punten heeft, dat er dan, op bewijsbare equivalentie in T na, hoogstens κ veel $\mathcal{L}$-formules zijn met vrije variabelen $x_1, \ldots, x_n$.

Opgave 3. Zij $\mathcal{L} = (S, <)$ de signatuur bestaand uit een 1-plaatsig functiesymbool S ("de opvolger") en een 2-plaatsig relatiesymbool $<$ ("de ordening"). Bekijk nu de theorie T die zegt dat $<$ een lineaire ordening zonder eindpunten is en dat Sx het kleinste element is dat groter is dan x; in formules:

$$
\begin{gathered}
\forall x\, \neg(x < x) \\
\forall x, y, z \left(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z \right) \\
\forall x, y \left(x = y \vee x < y \vee y < x \right) \\
\forall x\, \exists y, z \left(y < x \wedge x < z \right) \\
\forall x \left(x < Sx \wedge \neg \exists y \, (x < y \wedge y < Sx) \right)
\end{gathered}
$$

(a) [5 punten] Zij λ een oneindig kardinaalgetal. Bewijs dat T niet λ-categorisch is.

(b) [5 punten] Beschrijf de typenruimtes van T.

(c) [5 punten] Bewijs dat T kwantoreneliminatie heeft.

(d) [5 punten] Bewijs dat T volledig is.

Opgave 4. Zij K een reëel afgesloten geordend lichaam en neem aan dat I een priemideaal is in $K[x_1, \ldots, x_n]$ waarvoor geldt dat $p_1, \ldots, p_m \in I$ zodra $\sum_{i=1}^m p_i^2 \in I$. Bewijs dat de polynomen $p \in I$ een gemeenschappelijk nulpunt hebben.

Opgave 5. Zij $\mathcal{L}$ de signatuur die bestaat uit n 1-plaatsige relatiesymbolen $P_1, \ldots, P_n$. Zij T de $\mathcal{L}$-theorie die zegt dat in ieder model M van T de verzamelingen $P_1, \ldots, P_n$ oneindig zijn en een partitie vormen van de onderliggende verzameling van M.

(a) [10 punten] Bewijs dat T kwantoreneliminatie heeft.

(b) [10 punten] Bewijs dat in ieder model van T de formule $x = x$ Morleyrang 1 en Morleygraad n heeft.

Opgave 6. Zij X een compacte Hausdorff ruimte. Voor iedere deelverzameling A van X definiëren we:

$$\Gamma(A) = \{x \in A : x \text{ is een verdichtingspunt van } A\}.$$

Dus $\Gamma(A)$ elimineert de geïsoleerde punten uit A. Verder definiëren we voor ieder ordinaalgetal α:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0(X) &= X, \\
\Gamma^{\alpha+1}(X) &= \Gamma(\Gamma^\alpha(X)), \\
\Gamma^\lambda(X) &= \bigcap_{\alpha < \lambda} \Gamma^\alpha(X), \quad \text{wanneer } \lambda \text{ een limietordinaal is.}
\end{aligned}
$$

De keten $\Gamma^\alpha(X)$ is monotoon dalend en dus moet er, omdat X een verzameling is, een ordinaalgetal δ bestaan zodanig dat $\Gamma^\alpha(X) = \Gamma^\delta(X)$ voor alle $\alpha > \delta$. We schrijven $\Gamma^\infty(X)$ voor $\Gamma^\delta(X)$.

(a) [5 punten] Bewijs dat $\Gamma^\infty(X)$ een gesloten deelverzameling van X is zonder geïsoleerde punten.

(b) [5 punten] Bewijs dat als X een aftelbare basis heeft, er een aftelbare α moet bestaan zodat $\Gamma^\alpha(X) = \Gamma^\infty(X)$.

(c) [5 punten] Bewijs dat als X een aftelbare basis heeft, $\Gamma^\infty(X) = \emptyset$ of $|\Gamma^\infty(X)| = 2^{\aleph_0}$.

(d) [5 punten] In deze opgave nemen we aan dat T een ω-stabiele theorie is en dat M een ω-verzadigd model van T is. We schrijven $S_n(M)$ voor $S_n(\mathrm{ElDiag}(M))$ en we bekijken de operatie Γ daarop. Dan zeggen we dat een type $p \in S_n(M)$ *Cantor-Bendixsonrang* α heeft, als $p \in \Gamma^\alpha(S_n(M)) \setminus \Gamma^{\alpha+1}(S_n(M))$. Bewijs dat elk type een Cantor-Bendixsonrang heeft en dat die samenvalt met de Morleyrang van dat type in M.