Gegeneraliseerde Kwantoren

Jan van Eijck

CWI, Amsterdam and Uil-OTS, Utrecht

jve@cwi.nl

18 juni 2008

Samenvatting

We geven een kort overzicht van de theorie van gegeneraliseerde kwantoren. Meer informatie is te vinden in hoofdstuk 14 van het cursusboek van Partee, ter Meulen en Wall.

Vorm-woorden: Kwantoren

Kwantoren zijn woorden zoals alle, sommige, geen, niet alle en minstens drie. Aristoteles (vijfde eeuw voor Christus) bestudeerde redeneerpatronen waarin kwantoren een rol spelen.

Voorbeeld (het geldige syllogisme BARBARA):

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Alle A zijn B}\\ \text{Alle B zijn C}\end{array}}{\text{Alle A zijn C}}$$

Is de redenering nog steeds geldig als je elk voorkomen van alle vervangt door sommige?

En als je elk voorkomen van alle vervangt door minstens drie?

En als je elk voorkomen van alle vervangt door geen?

En hoe zit het met de geldigheid van:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Alle A zijn B}\\ \text{Geen B zijn C}\end{array}}{\text{Geen A zijn C}}$$

Duidelijk is dat de patronen die geldig zijn geldig zijn op grond van de betekenis van de kwantoren en de vorm van de patronen.

Hoe laat je zien dat een patroon niet geldig is? Door een tegenvoorbeeld te geven: een invulling van de As, Bs en Cs waarvoor de premissen waar zijn maar de conclusie niet.

Aristoteles' syllogismen-leer is een van de eerste theorieën over de vorm van geldige redeneerstappen.

Aristoteles' theorie zegt echter niets over redeneren met zinnen waar meerdere kwantoren in voorkomen. Het volgende patroon is geldig, maar kan niet als een syllogisme worden geanalyseerd:

$$\frac{\text{Er is een A die door elke B wordt ge-R-d}}{\text{Elke B R-t een A.}}$$

Bij voorbeeld:

$$\frac{\text{Er is een Ahold commissaris die door elke aandeelhouder wordt veracht.}}{\text{Elke aandeelhouder veracht een Ahold commissaris.}}$$

Om dit soort patronen te kunnen uitdrukken moeten we weten hoe we de betekenis kunnen weergeven van samengestelde eigenschappen zoals door elke aandeelhouder veracht worden.

Dat kan met behulp van abstractie over een eigennaam, bij voorbeeld Henny de Ruiter.

Uit Elke aandeelhouder veracht Henny de Ruiter geeft dit

$\lambda x.$elke aandeelhouder veracht x

voor 'door elke aandeelhouder veracht worden'.

Het patroon wordt nu:

$$\frac{\text{sommige } A\ (\lambda x.\ \text{elke } B\ (\lambda y.yRx))}{\text{elke } B\ (\lambda y.\ \text{sommige } A\ (\lambda x.yRx))}$$

In de predikatenlogica (die we te danken hebben aan Gottlob Frege, eind Negentiende eeuw) is dit patroon geldig.

Kwantoren als relaties tussen verzamelingen

Een kwantor formule zegt in feite iets over de manier waarop twee verzamelingen zich tot elkaar verhouden. Bij de Aristoteles voorbeelden zijn dat de verzamelingen A en B.

Heel algemeen zeggen we nu: een kwantor is een relatie tussen verzamelingen.

In het geval van de universele kwantor is het de relatie bevat zijn in. Immers: "Alle A zijn B" is waar precies wanneer $A \subseteq B$.

In het geval van de existentiële kwantor is het de relatie een niet-lege doorsnede hebben met. Ga maar na: "Minstens één A is B" is waar precies wanneer $A \cap B \neq \emptyset$.

Welke relatie op $\mathcal{P}(D)$ kan dienen als interpretatie van ‘geen’?

Welke relatie op $\mathcal{P}(D)$ kan dienen als interpretatie van ‘niet alle’?

Aan de opdrachten is te zien dat deze theorie ons de middelen in handen geeft om—heel algemeen—de interpretatie van de lidwoordgroep in nominale constituenten ter hand te nemen.

Dankzij het gegeneraliseerde kwantoren-perspectief is het blikveld niet langer beperkt tot existentiële en universele kwantificatie, maar komen ook andere kwantoren aan bod. Een lidwoord-groep als geen, minstens twee, niet alle, precies drie, hoogstens vier wordt wel een determinator genoemd (Engels: determiner); diezelfde term is trouwens ook in gebruik voor de relatie op $\mathcal{P}(D)$ die dient als interpretatie voor zo'n lidwoordgroep. Een kwantificerende determinator wordt een kwantor genoemd.

Is het nu zo dat elke relatie op $\mathcal{P}(D)$ de interpretatie is van een kwantor? Dat ligt er natuurlijk maar aan wat we willen verstaan onder een kwantor, maar het ligt voor de hand om een paar beperkingen op te leggen. Daartoe zullen we een tweetal eigenschappen van determinatoren (determinator-interpretaties) gaan isoleren.

In de eerste plaats willen we de intuïtie uitdrukken dat zinnen als Alle jongens wandelen, Minstens twee jongens hollen, Hoogstens drie jongens praten betrekking hebben op de verzameling jongens in het discussiedomein. Alleen het gedrag van de jongens in het domein maakt iets uit voor de waarheidswaarde van deze zinnen. Of de andere individuen in het domein wandelen, lopen of praten doet er niet toe.

We hoeven dus, om te kijken of deze zinnen waar zijn, niet alle wandelaars, hardlopers of praters te onderzoeken, maar alleen de wandelende jongens, de hollende jongens, of de pratende jongens. Nog anders gezegd: de volgende parafrases veranderen de betekenis van de bovenstaande zinnen niet: Alle jongens zijn wandelende jongens; Minstens twee jongens zijn hollende jongens; Hoogstens drie jongens zijn pratende jongens.

Het is de verzameling jongens die bepalend is voor de vraag of de kwantorrelatie al dan niet geldt.

Algemeen kunnen we dus zeggen:

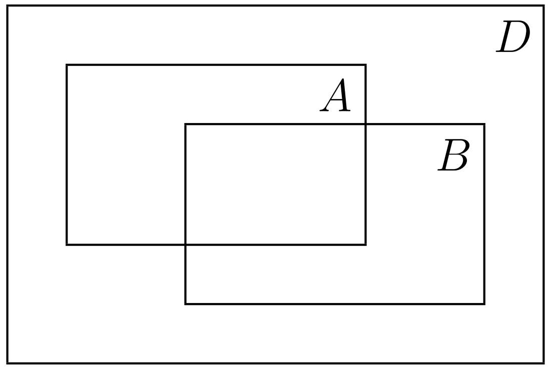
> Als een kwantor-relatie op de machtsverzameling van het domein D geldt tussen een verzameling A en een verzameling B, dan geldt die relatie ook op de machtsverzameling van het subdomein A tussen A en de doorsnede van A en B, en vice versa.

Deze eigenschap noemen we de conservativiteitseigenschap van de relatie. We gebruiken R_D voor een tweeplaatsige relatie op $\mathcal{P}(D)$. We kunnen als volgt uitdrukken dat R_D conservatief is:

Definitie 1 Conservativiteit van R_D

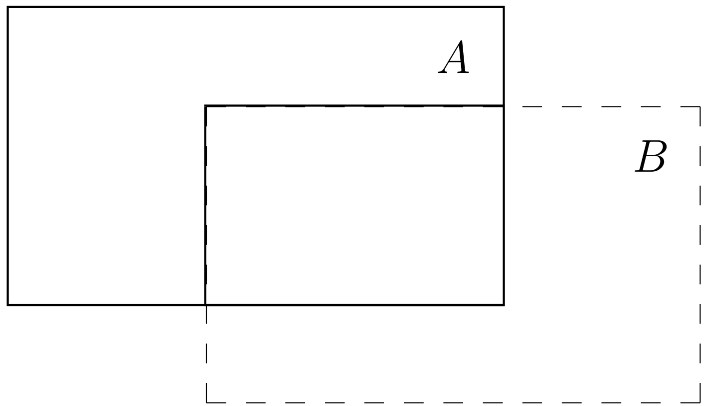
Voor alle $A, B \subseteq D$: $R_D AB$ desda $R_A A(A \cap B)$.

Om te zien wat conservativiteit precies uitdrukt maken we een plaatje van een domein D, met twee verzamelingen A en B.



Stel dat een kwantor-relatie op $\mathcal{P}(D)$ geldt tussen A en B. Dan zegt conservativiteit dat die relatie ook geldt tussen A en $A \cap B$, als we het domein van de kwantor-relatie beperken tot $\mathcal{P}(A)$, en vice versa.

Dit betekent dat we het bovenstaande plaatje zonder bezwaar mogen vervangen door het volgende plaatje:



Denk bij voorbeeld bij A aan de verzameling jongens, bij B aan de verzameling praters. Dan is $A \cap B$ de verzameling pratende jongens. Buiten de verzameling jongens, het eerste argument van de relatie, hoeven we niet te kijken. We zeggen dat een kwantor-relatie teert op zijn eerste argument. In het bovenstaande voorbeeld: de verzameling A (de verzameling jongens). De conservativiteits-eigenschap wordt ook wel de teren-op eigenschap (Engels: the live-on property) genoemd.

Uit de conservativiteits-eigenschap volgt meteen dat we de index D van een kwantor-relatie R_D gerust mogen weglaten. Voor de interpretatie doet het gedeelte van het domein dat ligt buiten de verzameling waarop de kwantor-relatie teert er immers niet toe.

Een voor de hand liggende tweede eis die we aan kwantor-relaties kunnen stellen is dat ze inderdaad iets te maken hebben met kwantiteit. De conservativiteits-eis zegt ons dat het antwoord op de vraag of R geldt tussen A en B alleen mag afhangen van de verzamelingen A en $A \cap B$. De kwantiteits-eis voegt daar nog iets aan toe: het gaat niet om deze verzamelingen zonder meer, maar alleen om de aantallen elementen die ze bevatten. "Alle jongens wandelen" is waar precies wanneer het aantal jongens dat niet wandelt 0 is; "Hoogstens drie jongens praten" is waar wanneer het aantal jongens dat praat ≤ 3 is, enzovoorts.

De kwantiteits-eis op kwantor-relaties wordt nu:

> Als de kwantor-relatie R geldt tussen twee verzamelingen A en B, en we hebben twee andere verzamelingen C en D waarvan we weten dat C evenveel elementen heeft als A, en de doorsnede van C en D evenveel elementen als de doorsnede van A en B, dan weten we dat de kwantor-relatie ook moet gelden tussen C en D.

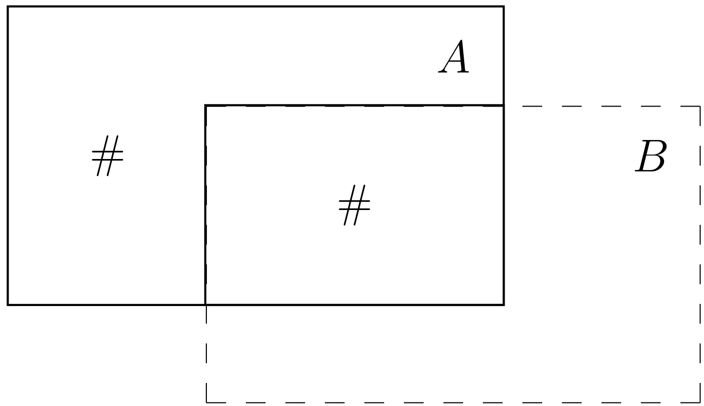
Je kunt dit zelf controleren aan de hand van concrete voorbeelden als "Alle jongens wandelen", "Minstens twee jongens hollen", "Hoogstens drie jongens praten", "De helft van de jongens voetbalt".

Iets formeler kunnen we de kwantiteits-eigenschap als volgt formuleren:

Definitie 2 Kwantiteits-eigenschap van R

Voor alle X, Y, Z, U:
als $R(X, Y)$ en $|X| = |Z|$ en $|X \cap Y| = |Z \cap U|$, dan $R(Z, U)$.

Wanneer we nu weer een plaatje gaan tekenen van twee verzamelingen A en B waartussen een kwantor-relatie geldt, dan zien we dat we ons kunnen beperken tot het aangeven van twee kardinaalgetallen, (wanneer we ons beperken tot eindige domeinen: twee natuurlijke getallen). Het eerste getal geeft het aantal elementen in $A - B$ aan, het tweede getal het aantal elementen in $A \cap B$:



De twee #-tekens in het plaatje geven de getallen $|A - B|$ en $|A \cap B|$ aan. We hadden natuurlijk ook de twee getallen $|A|$ en $|A \cap B|$ kunnen nemen: als we $|A|$ hebben weten we ook $|A - B|$ en omgekeerd, vanwege de betrekking $|A - B| = |A| - |A \cap B|$ (we gaan er nu even van uit dat de verzamelingen A en B eindig zijn).

Aangenomen dat kwantor-relaties voldoen aan conservativiteit en kwantiteit kunnen we elke kwantor-relatie karakteriseren als een patroon van plaatsen in een oneindige getallen-piramide. Ook wanneer we ons beperken tot eindige domeinen is de getallen-piramide oneindig: er is immers geen bovengrens aan de grootte van onze domeinen.

Hier volgt het recept voor het construeren van de getallen-piramides. Elke laag van de piramide behandelt de verdeling van $|A-B|$ en $|A\cap B|$, voor een bepaald aantal $|A|$. De top van de piramide bestaat uit het ene getallenpaar $\langle 0,0\rangle$, want als er 0 A's zijn is dit de enig mogelijke verdeling. De top vormde de eerste laag. De tweede laag behandelt het geval waar er 1 A is; zij bestaat uit de getallenparen $\langle 1,0\rangle$ ("er is 1 ding dat A is maar niet B, en er zijn geen dingen die zowel A als B zijn") en $\langle 0,1\rangle$ ("er zijn geen dingen die alleen A zijn maar niet B, en er is 1 ding dat zowel A als B is").

Net zo voor de volgende lagen.

De hele piramide ziet er dus zo uit:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
|A| = 0 & & & & & & 0,0 & & & & & \\
|A| = 1 & & & & & 1,0 & & 0,1 & & & & \\
|A| = 2 & & & & 2,0 & & 1,1 & & 0,2 & & & \\
|A| = 3 & & & 3,0 & & 2,1 & & 1,2 & & 0,3 & & \\
|A| = 4 & & 4,0 & & 3,1 & & 2,2 & & 1,3 & & 0,4 & \\
|A| = 5 & 5,0 & & 4,1 & & 3,2 & & 2,3 & & 1,4 & & 0,5 \\
\quad\vdots & & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Heel fraai is, dat we nu kwantor-relaties kunnen karakteriseren met behulp van een patroon van $+$ en $-$ dat ze in deze piramide teweeg brengen: een $+$ verschijnt op de plaatsen van de getallenparen die de aantallen $|A - B|$ en $|A \cap B|$ aangeven van de verzamelingen A en B waarvoor de kwantor-relatie geldt, een $-$ op alle andere plaatsen.

Het volgende voorbeeld maakt dit hopelijk duidelijk. "Alle A zijn B" is immers waar als $A \subseteq B$ (eigenlijk: als $I(A) \subseteq I(B)$, maar hierover doen we even niet moeilijk). Maar $A \subseteq B$ is precies het geval als $A - B = \emptyset$, en dit is weer equivalent met $|A - B| = 0$.

alle A zijn B

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & + & & & & & \\
 & & & & - & & + & & & & \\
 & & & - & & - & & + & & & \\
 & & - & & - & & - & & + & & \\
 & - & & - & & - & & - & & + & \\
- & & - & & - & & - & & - & & + \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

1. Geef het piramide-patroon voor geen.
2. Geef het piramide-patroon voor niet alle.
3. Geef het piramide-patroon voor minstens één.
4. Hoe verhouden deze piramide-patronen zich tot elkaar en tot het patroon voor alle ?

Hier is het piramide-patroon voor minstens drie:

minstens drie A zijn B

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & - & & & & & \\
 & & & & - & & - & & & & \\
 & & & - & & - & & - & & & \\
 & & - & & - & & - & & + & & \\
 & - & & - & & - & & + & & + & \\
- & & - & & - & & + & & + & & + \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

1. Geef het piramide-patroon voor hoogstens drie.
2. Hoe verhoudt dit patroon zich tot dat van minstens drie?
3. Geef ook het piramide patroon voor precies drie?
4. Hoe verhoudt dit patroon zich tot die van hoogstens drie en minstens drie?
5. Verklaar het gevonden verband.

1. Geef het piramide-patroon voor minstens twee en hoogstens vijf.
2. Geef het piramide-patroon voor precies twee of minstens vier.
3. Geef het piramide-patroon voor precies twee of precies vijf.
4. Tenslotte dat voor minstens de helft.

Taalkundig belang

Om het taalkundige belang van gegeneraliseerde kwantorentheorie te illustreren definiëren we een nieuwe eigenschap van kwantoren.

Definitie 3 Opwaartse monotonie rechts van een kwantor

Voor alle X, Y, Y'*: als* QXY *en* $Y \subseteq Y'$ *dan* QXY'*.*

Er bestaat een tegenhanger voor opwaartse monotonie:

Definitie 4 Neerwaartse monotonie rechts van een kwantor

Voor alle X, Y, Y'*: als* QXY *en* $Y' \subseteq Y$ *dan* QXY'*.*

Voorbeelden van kwantoren die opwaarts monotoon zijn (of kortweg stijgend) in hun rechterargument zijn alle en minstens één. Dat dit zo is blijkt uit het feit dat de volgende redeneringen geldig zijn:

$$\frac{\text{Alle jongens zijn aardig.}}{\text{Alle jongens zijn aardig of verlegen.}}$$

$$\frac{\text{Minstens één meisje is aardig.}}{\text{Minstens één meisje is mooi of aardig.}}$$

Voorbeelden van kwantoren die neerwaarts monotoon zijn (of kortweg dalend) in hun rechterargument zijn geen en weinig.

Opdracht 1 *Geef voorbeelden waaruit dit blijkt.*

De monotonie eigenschappen van kwantoren zijn zeer nuttig voor het beschrijven van zogenaamde polariteitsverschijnselen in natuurlijke taal. Het Nederlandse werkwoord hoeven is een voorbeeld van een werkwoord dat alleen kan worden gebruikt in een 'negatieve context'. In taalkundig jargon: het is een woord met negatieve polariteit. Beschouw nu de volgende voorbeelden:

Hoogstens honderd strijders hoeven de wacht te houden. (1)

*Minstens honderd strijders hoeven de wacht te houden. (2)

Ga na dat de kwantor hoogstens honderd neerwaarts monotoon is in zijn rechterargument. De kwantor minstens honderd is dat niet. De nominale constituenten die bij combinatie met een verbale constituent een woord met negatieve polariteit in die verbale constituent toelaten blijken precies de kwantoren te zijn die neerwaarts monotoon zijn in hun tweede argument. Het begrip neerwaartse monotonie levert een bruikbare precisering op van het veel vagere begrip 'negatieve context'.

Opdracht 2 *Beschouw de volgende voorbeelden:*

- *Alle mannen waren allerminst tevreden.*
- *Precies vijf mannen waren allerminst tevreden.*
- **Niemand was allerminst tevreden.*

Het Nederlandse woord allerminst is een woord met positieve polariteit. Formuleer in termen van monotonie een principe waaraan het gebruik van dit woord moet voldoen.

Opdracht 3 *Formuleer twee monotonie principes voor het linkerargument van een kwantor. Beschouw nu de volgende kwantoren:*

1. *alle*
2. *niet alle*
3. *minstens een*
4. *hoogstens honderd*
5. *precies vijf*
6. *geen.*

Ga na wat hun monotonie-eigenschappen zijn in het linkerargument.

Kwantoren, Automaten en Reguliere Patronen

Een automaat voor de kwantor **alle** is een machine die een rijtje nullen en enen accepteert precies wannneer dat rijtje alleen uit enen bestaat.

Geef zo'n automaat. (Teken een plaatje.)

Een automaat voor de kwantor **minstens drie** is een machine die een rijtje nullen en enen accepteert precies wannneer dat rijtje minstens drie enen bevat.

Geef zo'n automaat. (Teken een plaatje.)