Inhoudsopgave

- *Verzamelingen*
  element, Venn-diagram, singleton, lege verzameling, gelijkheid, deelverzameling, machtsverzameling, vereniging, doorsnede, verschilverzameling

- *Relaties*
  geordend paar, cartesisch product, binaire relatie, inverse, functie, domein, bereik, karakteristieke functies

- *Haskell*
  lijsten, types

Verzamelingen: Verzameling

- *Voorbeeld* 1
  K = { a, e, i, o, u, y }
  K = { x | x kan een klinker aanduiden }

- *Voorbeeld* 2
  P = { 2, 3, 5, 7, 11, ...}
  P = de verzameling priemgetallen

- *Voorbeeld* 3
  R = { Rouvoet, Middelkoop }
  R = { x | x is een minister van de CU }

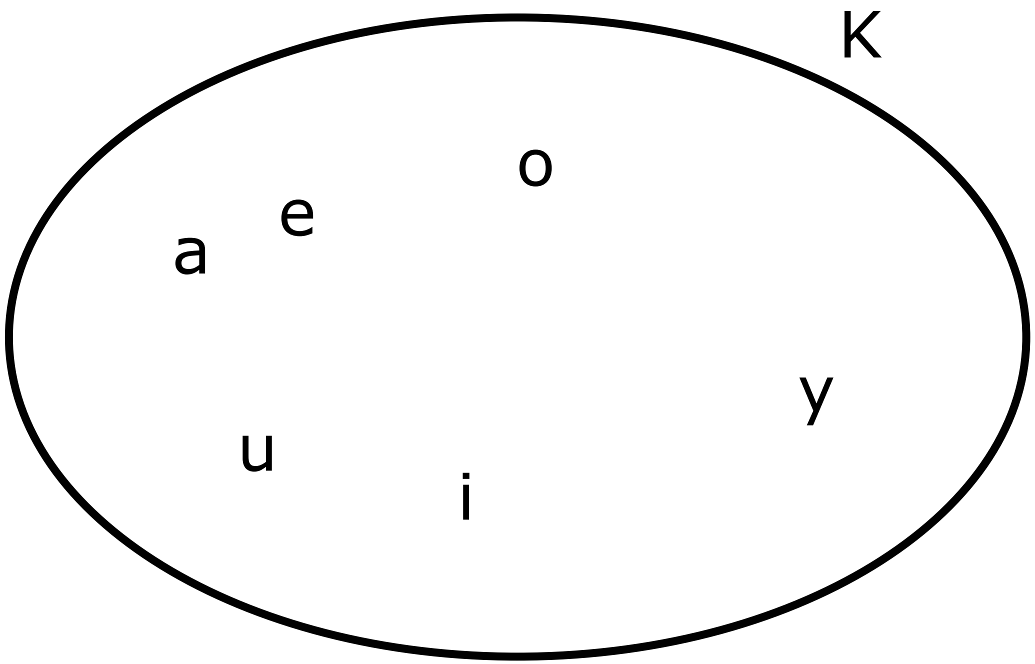
Verzamelingen: Element

- Een verzameling bestaat uit **elementen**.

- $x \in A$ betekent: x is een element van A.
  $x \notin A$ betekent: x is geen element van A.

- Voorbeelden
  - $a \in \{ a, e, i, o, u, y \}$
  - $13 \in \{ x \mid x \text{ is een priemgetal} \}$
  - Huizinga $\notin$ R

Verzamelingen: Venn-diagrammen



Verzamelingen: Soorten

- Een verzameling kan uit 1 element bestaan (een **singleton**): { Huizinga }

- Een verzameling kan **oneindig** veel elementen hebben: de verzameling priemgetallen.

- De **lege verzameling** (∅) is de verzameling zonder elementen: { *x* | *x* is een vierkante cirkel } = ∅

- Een verzameling kan andere verzamelingen als element hebben: {{♣,♠},{♦,♥}}

Verzamelingen: Identiteit

- Twee verzamelingen zijn **gelijk** als ze dezelfde elementen hebben.

- *Voorbeelden*
  - {b} = { x | x is bilabiaal, plosief en stemhebbend }
  - {a, e, i, o, u} = {u, o, i, e, a} = {u, a, a, e, i, o, i}
  - { x | x is een vierkante cirkel } = { y | $y \neq y$ }

- *Opmerkingen*
  Er is één lege verzameling.
  Volgorde speelt geen rol in verzamelingen.
  Elk element komt maar één keer voor.

Verzamelingen: Deelverzameling

- $A \subseteq B$, A is een **deelverzameling** van B, als voor elke $x \in A$ geldt $x \in B$.

- *Voorbeelden*
  - { Bos, Kok } $\subseteq$ { Bos, Kok, Drees }
  - Friezen $\subseteq$ Nederlanders
  - Transitieve werkwoorden $\subseteq$ werkwoorden

- *Opmerkingen*
  - Voor elke verzameling X geldt: $X \subseteq X$.
  - Voor elke verzameling X geldt: $\emptyset \subseteq X$.

Verzamelingen: Element versus deelverzameling

- Welke van de volgende uitspraken zijn waar?
  - a $\clubsuit \in \{\clubsuit,\spadesuit,\diamondsuit,\heartsuit\}$
  - b $\{\clubsuit\} \in \{\clubsuit,\spadesuit,\diamondsuit,\heartsuit\}$
  - c $\clubsuit \subseteq \{\clubsuit,\spadesuit,\diamondsuit,\heartsuit\}$
  - d $\{\clubsuit\} \subseteq \{\clubsuit,\spadesuit,\diamondsuit,\heartsuit\}$
  - e $\{\clubsuit,\spadesuit\} \in \{\{\clubsuit,\spadesuit\},\{\diamondsuit,\heartsuit\}\}$
  - f $\{\clubsuit,\spadesuit\} \subseteq \{\{\clubsuit,\spadesuit\},\{\diamondsuit,\heartsuit\}\}$
  - g $\clubsuit \in \{\{\clubsuit,\spadesuit\},\{\diamondsuit,\heartsuit\}\}$
  - h $\{\{\clubsuit,\spadesuit\}\} \subseteq \{\{\clubsuit,\spadesuit\},\{\diamondsuit,\heartsuit\}\}$

Verzamelingen: Machtsverzameling

- De **machtsverzameling** $\wp(A)$ van een verzameling A is de verzameling van alle deelverzamelingen van A: $\wp(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$

- *Voorbeelden*
  - $\wp(\{0,1\}) = \{\varnothing, \{0\},\{1\},\{0,1\}\}$
  - $\wp(\varnothing) = ?$
  - $\wp(\{a,b,c\}) = ?$

- Als A *n* elementen heeft, dan heeft $\wp(A)$ 2^n elementen.

Verzamelingen: Vereniging

- $A \cup B$, de **vereniging** van A en B, bestaat uit de elementen die in A of B zitten (**inclusief** *of*)
  d.w.z. $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ <u>of</u> $x \in B \}$

- *Voorbeelden*
  - $\{ a, b, c, d \} \cup \{ c, d, e \} = \{ a, b, c, d, e \}$
  - F(unctiewoorden) = L(idwoorden) ∪ V(oegwoorden) ∪ P(ronomina) ∪ V(oorzetsels)

- *Vragen*
  - $\{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\} = ?$
  - $\{a, b, c\} \cup \{a, b, c\} = ?$

Verzamelingen: Doorsnede

- $A \cap B$, de **doorsnede** van A en B, bestaat uit de elementen die zowel in A als in B zitten
  d.w.z. $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ <u>en</u> $x \in B \}$

- *Voorbeelden*
  - $\{ a, b, c \} \cap \{ c, d \} = \{ c \}$
  - { *een* } = Lidwoorden $\cap$ Onbepaald

- *Vragen*
  - $\{ a, b, c \} \cap \{ d, e \} = ?$
  - $\{ 0 \} \cap \{0, 1\} = ?$

Verzamelingen: Verschilverzameling

- A\B, de **verschilverzameling** van A en B, bestaat uit de elementen van A die niet in B zitten
  d.w.z. $A \backslash B = \{ x \mid x \in A \text{ en } x \notin B \}$
  (andere notatie: A – B)

- *Voorbeeld*
  - $\{ a, b, c \} \backslash \{ c, d \} = \{ a, b \}$

- *Vragen*
  - $\varnothing \backslash \{1,2,3\} = ?$
  - $\{1,2,3\} \backslash \varnothing = ?$
  - $\{1,2,3\} \backslash \{1,2,3\} = ?$

Relaties: Geordend paar

- Een **geordend paar** is een structuur van twee elementen in een bepaalde volgorde: $\langle a,b \rangle$.

- Verschillen met verzameling:
  - de elementen zijn geordend: $\langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$
    (Bij verzamelingen: $\{a,b\} = \{b,a\}$.)
  - de elementen kunnen gelijk zijn: $\langle a,a \rangle$
    (Bij verzameling: $\{a,a\} = \{a\}$.)

- Er zijn ook geordende drietallen, viertallen, … n-tallen.

Relaties: Cartesisch product

- Als A en B verzamelingen zijn, dan is het cartesisch product, $A \times B = \{ \langle x,y \rangle \mid x \in A \text{ en } y \in B \}$

- *Voorbeeld*
  $\{a,b,c\} \times \{0,1\}$

	a	b	c
0	$\langle a,0 \rangle$	$\langle b,0 \rangle$	$\langle c,0 \rangle$
1	$\langle a,1 \rangle$	$\langle b,1 \rangle$	$\langle c,1 \rangle$

- *Vraag*
  - Wat is $\{0,1\} \times \{0,1\}$?
  - Wat is $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$?

Relaties: Relatie tussen

- Een **binaire relatie** tussen A en B is een deelverzameling van $A \times B$, dus een verzameling geordende paren.

- *Voorbeeld*
  $R = \{\langle a,0\rangle, \langle b,0\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,1\rangle\}$

	a	b	c
0	$\langle \mathbf{a,0} \rangle$	$\langle \mathbf{b,0} \rangle$	$\langle c,0 \rangle$
1	$\langle a,1 \rangle$	$\langle \mathbf{b,1} \rangle$	$\langle \mathbf{c,1} \rangle$

- Er zijn ook drie-, vier-, …, n-plaatsige relaties.

Relaties: Relatie in

- Een **binaire relatie in** A is een deelverzameling van A $\times$ A, dus een verzameling geordende paren uit dezelfde verzameling.

- *Voorbeeld*
  C = {0,1,2}, R is de relatie 'kleiner dan of gelijk aan'

	0	1	2
0	**⟨0,0⟩**	⟨1,0⟩	⟨2,0⟩
1	**⟨0,1⟩**	**⟨1,1⟩**	⟨2,1⟩
2	**⟨0,2⟩**	**⟨1,2⟩**	**⟨2,2⟩**

- De relatie R kan ook als **graaf** worden getekend.

Relaties: Meer voorbeelden

- $\in$ is een relatie tussen elementen en verzamelingen.
  $\subseteq$ is een relatie tussen verzamelingen.
  $=$ is een relatie tussen objecten in het algemeen.

- $<$ in zinnen en boomstructuren
  Fiona kust de oger
  W = {de, Fiona, kust, oger}
  $< \; = \{\langle \text{Fiona},\text{kust}\rangle, \langle \text{Fiona},\text{de}\rangle, \langle \text{Fiona},\text{oger}\rangle, \langle \text{kust},\text{de}\rangle, \langle \text{kust},\text{oger}\rangle, \langle \text{de},\text{oger}\rangle\}$

Relaties: Inverse

- Bij iedere relatie $R \subseteq A \times B$ hoort de **inverse relatie** $R^{-1} = \{ \langle x,y \rangle \mid \langle y,x \rangle \in R \}$

- *Voorbeeld*
  - 'moeder' en 'dochter' in boomstructuur
  - $<$ en $>$ in volgorde

- *Vraag*
  - Wat is de inverse relatie van 'zuster' in boomstructuren?

Relaties: Functies

- Functies als een speciaal soort relaties:
  Een relatie f tussen A en B is een functie wanneer er voor elke $x \in$ A precies één $y \in$ B is, zodat $\langle x,y \rangle \in$ f.

- In plaats van f $\subseteq$ A $\times$ B schrijven we f:A $\rightarrow$ B
  In plaats van $\langle x,y \rangle \in$ f schrijven we
  f:$x \rightarrow$ f(x) met f(x) = y.

- *Voorbeelden*
  - f:$x \rightarrow$ leeftijd(x) (voor elke x hier in de zaal)
  - f:$x \rightarrow x^2$ (voor elk reëel getal x)
  - f:$X \rightarrow \wp(X)$

Relaties: Functies

- *Voorbeeld*
  De functie die elke woordgroep in een zin op z'n hoofd **afbeeldt**. Bijvoorbeeld: hoofd(*de langste dag*) = *dag*. Welke aannames zijn dan noodzakelijk?

- *Voorbeeld*
  De functie die elk letterrijtje afbeeldt op z'n lengte. **Domein**: verzameling letterrijtje; **bereik**: natuurlijke getallen.

- *Vraag*
  Is de relatie *buur* ook een functie?

Relaties: Karakteristieke functies

- Een verzameling kan worden voorgesteld als een speciaal soort functie: een functie die aan elementen en niet-elementen de waarden True/False, 1/0 toekent.

- *Voorbeeld*
  In plaats van K = {a,e,i,o,u,y} hebben we de functie K zodat K(a) = 1, K(b) = 0, K(c) = 0, K(d) = 0, K(e) = 1, K(f) = 0, etc.

- Ook een relatie kan worden voorgesteld als een functie.

Relaties: Karakteristieke functies voor relaties

- Fiona kust de oger

- $W = \{\text{de}, \text{Fiona}, \text{kust}, \text{oger}\}$
  $< \; = \{\langle \text{Fiona}, \text{kust} \rangle, \langle \text{Fiona}, \text{de} \rangle, \langle \text{Fiona}, \text{oger} \rangle, \langle \text{kust}, \text{de} \rangle, \langle \text{kust}, \text{oger} \rangle, \langle \text{de}, \text{oger} \rangle\}$

- Twee stappen:
  1) $<$ kent aan elk woord de verzameling toe van woorden die eraan voorafgaan.
  2) Die verzamelingen zijn ook weer functies.

Relaties: Karakteristieke functies voor relaties

- Fiona kust de oger

- W = {de, Fiona, kust, oger}
  $<$ = {⟨Fiona,kust⟩, ⟨Fiona,de⟩, ⟨Fiona,oger⟩, ⟨kust,de⟩, ⟨kust,oger⟩, ⟨de,oger⟩}

- $<$ =

$$\begin{pmatrix} \text{de} & \to [\text{de}\to 0, \text{Fiona}\to 1, \text{kust}\to 1, \text{oger}\to 0] \\ \text{Fiona} & \to [\text{de}\to 0, \text{Fiona}\to 0, \text{kust}\to 0, \text{oger}\to 0] \\ \text{kust} & \to [\text{de}\to 0, \text{Fiona}\to 1, \text{kust}\to 0, \text{oger}\to 0] \\ \text{oger} & \to [\text{de}\to 1, \text{Fiona}\to 1, \text{kust}\to 1, \text{oger}\to 0] \end{pmatrix}$$

Haskell: Lijsten

- Lijst: geordende verzameling van objecten
  [’h’,’a’,’s’,’k’,’e’,’l’,’l’]
  - de elementen zijn geordend
  - de elementen mogen meer dan 1 keer voorkomen
  - [] is de **empty list**.
  - Ze kunnen gebruikt worden om verzamelingen te representeren.

- Lijsten zijn recursief opgebouwd uit een **head** en een **tail**: In de lijst [1,2,3] is 1 de head en [2,3] de tail: 1:[2,3], oftewel 1:2:[3], oftewel 1:2:3:[].

Haskell: Types

- Uitdrukkingen in Haskell zijn van een bepaald type.
  - 'h' :: Char
  - ['h','a','s','k','e','l','l'] :: [Char]
  - True :: Bool

- Belangrijk zijn de **functionele types**:
  - not :: Bool -> Bool
  - klinker :: Char -> Bool
  - relation :: Entity -> Entity -> Bool