Tentamen Taal, Wiskunde, Logica, 25 juni 2008: Uitwerking

Vraag 1 A is een verzameling van vier elementen. Hoeveel deelverzamelingen van A zijn er? En hoeveel tweeplaatsige relaties op A zijn er?

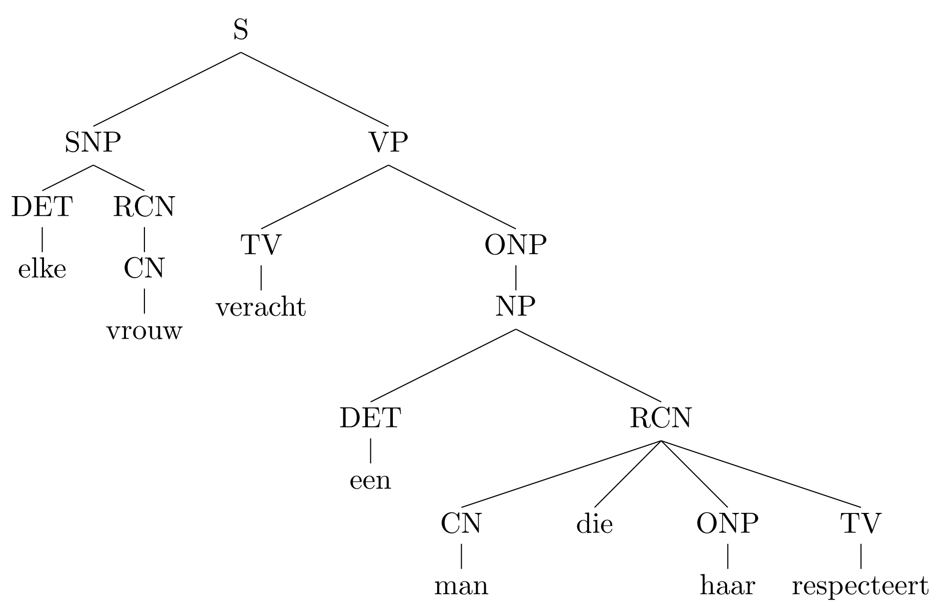
Antwoord. Er zijn $2^4 = 16$ deelverzamelingen. De verzameling van alle paren van elementen van A heeft $4\times 4 = 16$ elementen: je kunt immers kiezen uit vier kandidaten voor de eerste positie en uit vier kandidaten voor de tweede positie. Tweeplaatsige relaties op A zijn deelverzamelingen van de verzameling paren. Er zijn er dus 2^{16} van.

Vraag 2 *Beschouw de volgende contextvrije grammatica:*

$$
\begin{array}{rcl}
S & \longrightarrow & SNP\ VP \\
VP & \longrightarrow & TV\ ONP \\
TV & \longrightarrow & haat \mid veracht \mid respecteert \\
SNP & \longrightarrow & hij \mid zij \mid NP \\
ONP & \longrightarrow & hem \mid haar \mid NP \\
NP & \longrightarrow & Bill \mid Hillary \mid Barack \mid DET\ RCN \\
DET & \longrightarrow & een \mid de \mid elke \mid geen \\
RCN & \longrightarrow & CN \mid CN\ die\ SNP\ TV \mid CN\ die\ ONP\ TV \\
CN & \longrightarrow & man \mid vrouw
\end{array}
$$

Teken een structuurboom voor "elke vrouw veracht een man die haar respecteert."

Antwoord.



Vraag 3 *Genereert de grammatica uit de vorige opdracht een eindige of een oneindige taal? Motiveer je antwoord.*

Antwoord. De grammatica genereert een oneindige taal. Dit kun je zien aan het feit dat er recursie in zit: een NP kan een RCN bevatten, en die RCN kan zelf weer een NP bevatten. Dit houdt in dat je alle zinnen waarin RCN direct herschrijft tot CN langer kunt maken door die CN te vervangen door "CN die SNP VP".

Vraag 4 *Geef twee verschillende predikatenlogische vertalingen voor "elke vrouw veracht een man die elke vrouw respecteert." Gebruik M voor man zijn, F voor vrouw zijn, D voor verachten, en R voor respecteren.*

Antwoord. In 'een man die elke vrouw respecteert' kan 'een man' zowel subject als object zijn in de respecteer-relatie. Dit geeft de volgende twee lezingen:

$$\forall x(F(x) \to \exists y(M(y) \land \forall z(F(z) \to R(y,z)) \land D(x,y)).$$

$$\forall x(F(x) \to \exists y(M(y) \land \forall z(F(z) \to R(z,y)) \land D(x,y)).$$

Je zou ook nog 'een man die elke vrouw respecteert' groot bereik kunnen geven. Dat geeft nog weer twee nieuwe mogelijkheden:

$$\exists y(M(y) \land \forall z(F(z) \to R(y,z)) \land \forall x(F(x) \to D(x,y))).$$

$$\exists y(M(y) \land \forall z(F(z) \to R(z,y)) \land \forall x(F(x) \to D(x,y))).$$

Vraag 5 *Geef omschrijvingen in het Nederlands voor de volgende abstracties (zie de vorige vraag voor de betekenissen van de predikaten):*

1. $\lambda x.Mx$,
2. $\lambda x.\exists y(My \land Rxy)$,
3. $\lambda x.\exists y(My \land Ryx)$,
4. $\lambda x.\exists y(Mx \land (Fy \land Rxy))$.

Antwoord.

1. $\lambda x.Mx$: een man zijn.
2. $\lambda x.\exists y(My \land Rxy)$: een man respecteren.
3. $\lambda x.\exists y(My \land Ryx)$: door een man gerespecteerd worden.
4. $\lambda x.\exists y(Mx \land (Fy \land Rxy))$: een man zijn die een vrouw respecteert.

Vraag 6 (Bonusvraag) In het college hebben we gezien: als A eindig is, dan is A^*, de verzameling van alle eindige rijtjes van elementen van A, aftelbaar oneindig. Maar stel nu dat A aftelbaar oneindig is. Is A^*, de verzameling van alle eindige rijtjes van elementen van A, dan aftelbaar oneindig of overaftelbaar? Waarom? (Beargumenteer je antwoord.)

Antwoord. Dit was een moeilijke vraag. Het diagonaal-argument van Cantor toepassen gaat niet, want de rijtjes zijn allemaal eindig, en om een nieuw element te genereren dat in de opsomming nog niet voorkwam maakte Cantor essentieel gebruik van het feit dat het nieuw te construeren rijtje oneindig is.

Om te laten zien dat A^* ook voor een altelbaar oneindige taal aftelbaar oneindig blijft kun je als volgt redeneren. Neem eerst het lege rijtje. Merk op dat A^1, A^2, enzovoort, allemaal aftelbaar oneindig zijn. Maak nu een kwadrant dat er zo uitziet:

$$\begin{array}{lllllll} A^1 & = & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ A^2 & = & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots \\ A^3 & = & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \cdots \\ A^4 & = & z_1 & x_2 & z_3 & z_4 & \cdots \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

Dit kun je vervolgens aftellen op de manier van de breuken, door er diagonaal doorheen te gaan. Dus:

$$a_1, a_2, x_1, a_3, x_2, y_1, a_4, x_3, y_1, z_1, \ldots$$

Dus A^* is aftelbaar.