

Gerard Alberts

Werkgroep Wetenschap en Samenleving
Radboud Universiteit Nijmegen
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
g.alberts@cwi.nl

Rainer Kaenders

Faculteit EWI, TU Delft
Instituut voor Leraar en School
Radboud Universiteit Nijmegen
Postbus 38250, 6503 AG Nijmegen
r.kaenders@ils.ru.nl

Interview Pierre van Hiele

Ik liet de kinderen wél iets leren

Pierre van Hiele is de stille kracht van de didactiek van de wiskunde in Nederland. Hij was wiskunde- en scheikundeleraar en is nooit veel op de voorgrond getreden. Zijn werk vindt brede internationale erkenning en is tegenwoordig niet meer weg te denken uit de wiskundendidactiek. Zijn werk, waaronder het invloedrijke *Begrip en inzicht*, werkboek van de wiskundendidactiek wordt nog steeds bestudeerd. Van Hiele is zesennegentig jaar.

“Het zinken van de Titanic, dat gebeurde toen ik drie was. Ik woonde in Amsterdam. Ik ben geboren in de Indische Buurt, in de Eerste Atjehstraat. Het huis staat er niet meer. Die straat heette al heel gauw de lelijkste straat van Amsterdam, en daar was ik trots op, eigenlijk, want je bent tenminste iets.”

Van Hiele studeerde van 1927 tot 1933 wiskunde in Amsterdam. Een aantal docenten maakten grote indruk op hem. “Ja, daar stond indertijd gewoon zes jaar voor. Het was een heel degelijke studie en ik was een van de weinigen die het klaarspeelden binnen die tijd. Mannoury, bijvoorbeeld, was een belangrijke leermeester. Ik heb altijd erg veel aan

hem gehad. Het was een schat van een man. Ik weet nog dat ik als student een keer bij hem thuis kwam. Toen bood hij aan om voor mij de fiets de trap op te dragen. Later heb ik hem nog een keer ontmoet als geëngageerde bij een examen. Er was een leerling die bij mij herexamen moest doen. Mannoury zei mij gewoonweg hoe ik dat moest aanpakken. ‘Kijk, de bedoeling van zo’n herexamen is toch dat het kind slaagt. Stel nu die en die vraag, dan gaat het altijd goed.’ Hij had oog voor het kind. Het was een schat van een man, Mannoury.”

“Heel belangrijk was ook Brouwer, wiskundige en filosoof. Je volgde zijn colleges, maar die duurden vijftien jaar. Daar kon je een stuk van opvangen. Dan was er nog De Vries: die gaf ook wiskunde maar meer in de bijwagen, zou ik haast zeggen. Hij was wel aardig; een verschrikkelijk aardige man.”

En Freudenthal? “Freudenthal begon meteen colleges te geven toen hij naar Amsterdam kwam. Hij speelde eigenlijk meteen de baas, hoor. Ten koste van Hurewicz, bijvoorbeeld.”

Heeft u al tijdens uw studie kennis ge-

maakt met mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa? “Ja, God, die heb ik zo lang goed gekend. Door Freudenthal; hij zei me dat mevrouw Ehrenfest een belangrijk persoon was waar ik contact mee moest zoeken.” Hoe kwam het dan dat Freudenthal dat deed? Was hij toen al met didactiek bezig? “Over didactiek wisten we eigenlijk nog niet eens dat je daar studie van kon maken. Dat was toen onbekend.” Maar hoe gebeurde dat dan? Zei hij bij de koffie ‘Dit moet je eens lezen?’ “Zo goed was mijn relatie met Freudenthal niet dat ik met hem ging koffie drinken. Trouwens, Freudenthal heeft mij later nogal eens een hak gezet, jongens.”

Ik was bezeten van lesgeven

U wilde leraar worden? “Ja, en ik wilde een breed pakket. Daarom deed ik er ook scheikunde bij — ik heb ook een tijdje scheikunde gegeven.”

“Ik was bezeten van lesgeven. Didactiek, dat hoorde bij me. Ik heb verschrikkelijk veel bijles gegeven. In de tijd dat ik studeerde en bijles gaf, verdiende ik meer dan later als leraar.”

Wanneer is nou het vlammetje ontbrand

Pierre Van Hiele

Pierre Maria van Hiele werd in 1909 geboren te Amsterdam. Hij studeerde van 1927 tot 1933 wiskunde aan de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam. In de crisistijd verdiende hij zijn geld met bijles en kleine baantjes. In 1938 werd hij leraar aan het Montessori-lyceum te Overveen. Later werd hij leraar te Bilthoven en Voorburg.

Van jongs af aan wilde Van Hiele onderwijzer worden. Hij interesseerde zich reeds in zijn studietijd voor didactische vraagstukken. In 1948 bracht hij met zijn vrouw het *Werkboek der meetkunde* uit. Van Hiele was lid van de Wiskunde Werkgroep van de WVO, de *Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding* die van 1936 tot 1974 bestond. Hij was nauw betrokken bij het ontwerp-wiskundeprogramma voor de hbs B en gymnasium β dat de werkgroep in 1953 uitbracht.

Onder de begeleiding van de wiskundige Freudenthal (1905-1990) en de pedagoog en ontwikkelingspsycholoog Langeveld (1905-1989) deed hij naast zijn werk als docent onderzoek naar ontwikkelingspsychologische aspecten van wiskundeonderwijs. In 1957 promoveerde hij in Utrecht tegelijk met zijn vrouw Dina (Dieke) van

Hiele-Geldof (1911-1958) op het proefschrift *De problematiek van het inzicht*. Dit boek beschreef de niveautheorie voor het leren van meetkundige begrippen. In 1958 stierf zijn vrouw Dieke.

Na Van Hieles proefschrift volgde in 1959 het boek *Development and learning process: a study of some aspects of Piaget's psychology in relation with the didactics of mathematics*. In het verlengde van de niveautheorie formuleerde Van Hiele vijf fasen in het (onderwijs-) leerproces. Verder had hij een ontwerptheorie waarmee onder zijn leiding de methode *Van A tot Z* tot stand kwam.

Hij publiceerde verschillende artikelen in nationale en internationale tijdschriften en bijdragen in bundels over wiskundedidactiek. Met het boek *Mogelijkheden van het wiskundeonderwijs* (1975) richtte hij zich tot zijn collega-docenten. In de boeken *Begrip en inzicht* (1973) en *Structuur* (1981, tweede druk 1997) verdiepte hij zijn theoretische inzichten. In 1986 verscheen *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Voor zijn baanbrekend werk ontving Pierre van Hiele eredoctoraten in Zuid-Afrika en Nieuw-Zeeland.

dat dit nadenken over het lesgeven zelf een vak werd? Wanneer bent u pedagoog van de wiskunde geworden? “Het is allemaal heel vreemd gegaan, hoor. Ik kreeg een baan in 's Hertogenbosch. Mijn vrienden waren verbaasd dat ik in dat katholieke oord was aangenomen, maar ja, mijn naam had zo vertrouwd geklonken: Pierre Marie van Hiele. Ik ging wel zo nu en dan naar Amsterdam terug om mijn leerlingen nog bijles te kunnen geven. Toen heb ik gezien dat je met lesgeven een geweldig eind kunt komen.”

Was u een goede leraar? “Mijn vrouw deed het echt beter. Oh ja, zij had meer geduld met de kinderen. Ik werd soms ongeduldig, als het antwoord niet gauw genoeg kwam en dan zeiden ze: ‘Laat uw vrouw het maar doen.’ Nee, ik was geen slechte leraar, denk ik.”

Maar u dacht er veel bij na? “Ja. En op mijn eigen school moest ik zo nu en dan bulderen om rust te krijgen. En als ik dan gebulderd had, dan waren ze voor tijden gekalmeerd.”

Dieke van Hiele-Geldof

Uw vrouw was ook studente in Amsterdam? “Dieke heb ik pas later ontmoet. Wel grappig eigenlijk. Ik weet niet of u aan zulke bijgelo-

vige dingen doet, maar Dieke beschermt mij nog steeds. Stel ik wil een boek kopen dat ik al heb, dan zorgt zij dat het ineens voor me ligt en dan weet ik: oh nee, dat moet ik niet kopen want dat heb ik al. En als ik de trap opga, zeg ik: ‘Dieke, hou je nog even de lift voor me vast’. Ik leef alle dagen met haar en dus droom ik niet van haar.”

“Als ze was blijven leven, was Dieke denk ik professor geworden. De ideeën kwamen wel van mij — echt, de ideeën zijn allemaal van mij gekomen — maar zij kon ze veel beter uitdragen. Ik zou in het begin wel geschrokken zijn als zij professor was geworden en ik niet. Maar ik zou dan toch moeten toegeven: jij kan het uitdragen, in de praktijk brengen.”

Langeveld tegen Piaget

“We zijn tegelijk gepromoveerd in 1957, mijn vrouw en ik. Het sprak eigenlijk vanzelf dat ik bij Langeveld zou promoveren en mijn vrouw bij Freudenthal. Maar het is andersom gegaan want — dat heb ik pas later van mijn schoonzuster gehoord — mijn vrouw had niks op met Freudenthal.”

Hoe kwam u bij Langeveld terecht? “Langeveld zag dat ik nogal belangrijke dingen aan

het ontdekken was; hij probeerde mij altijd op te zetten tegen Piaget. Hij zei: ‘Bestudeer Piaget en dan kom je tot de conclusie dat hij rare dingen doet.’ Nou, Piaget deed rare dingen, want hij zorgde altijd dat degenen die onderzocht werden door hem niets konden leren. Daar wist ik een antwoord op. Ik deed die proeven over, maar liet die kinderen wel iets leren. Piaget beweerde bijvoorbeeld dat kinderen helemaal geen begrip van aantal hadden. Het getal zou hen wel iets zeggen, maar aantal hoorde daar niet bij. Die proef ging ik nadoen en vond inderdaad, dat de kinderen wel wisten van getal, maar niet van aantal. Ik had echter in die tijd zelf al kinderen en hen zette ik een drietal dingen voor. Zette ik nu de dingen wijder uit elkaar, dan zeiden ze: ‘Dat is meer.’ Vervolgens kwam ik op het idee niet drie maar twee dingen te nemen. Zette ik twee dingen wijder uit elkaar, dan reageerden ze: ‘Poeh, je hebt ze uit elkaar geschoven’. En herhaalde ik dan de situatie met drie dingen, dan zeiden ze meteen weer: ‘Je hebt ze uit elkaar geschoven’. Dus ik liet de kinderen leren, eigenlijk. Allerlei mensen waren verbaasd dat dat kon.”

Bestond er toen contact met Piaget? “Dat was het juist. Piaget heeft toch echt goede ideeën en ik heb het idee dat als ik met Piaget in aanraking was gekomen, dat wij het heel goed met elkaar hadden kunnen vinden. Ik voel erg veel verwantschap met Piaget.”

Dus het is Langeveld uiteindelijk niet gelukt om een wig tussen u en Piaget te drijven. “Nee, dat is de belangrijke conclusie, ja.”

U hebt Piaget nooit ontmoet? “Helaas niet. Ik denk ook niet dat hij op de hoogte was van mijn ideeën, anders zou hij misschien toch geprobeerd hebben om kennis met mij te maken.”

Freudenthal heeft van zijn kant in *Mathematik als pädagogische Aufgabe* Piaget frontaal aangevallen. “Ja, ja, dat ken ik en ik vind het eigenlijk een heel dom stuk. Neem me niet kwalijk hoor, maar ik vind dat Freudenthal daar eigenlijk niet zo heel veel van begrepen heeft. Bij verschillende passages moet ik denken: nou, Freudenthal zat er hier wel verschrikkelijk naast.”

En waarom? Begreep Freudenthal die dingen niet, of maakte hij zich er te snel van af? “Ik denk dat-ie ze niet begreep.”

Onderzoek

U was wiskundeleraar geworden. Deed U uw onderzoek naast de leraarsbaan of bent u bij Langeveld in dienst gekomen. “Nee, ik deed het ernaast. Dat was werkelijk niet zo heel moeilijk, nee.” Heeft u ooit geambieerd

om aan de universiteit te werken? “Niet heel sterk. Bovendien, telkens wanneer ik aan iets begon te denken, werd mij van vertrouwelijke kant gezegd: doe het niet, blijf toch leraar.” Wat waren dat voor mensen die dat zeiden? “Mensen die bijvoorbeeld zeiden: je houdt het wijnglas niet goed vast.” En dat liet u zich zeggen, omdat u geboren was in de Eerste Atjehstraat? “Ja, inderdaad. Ik ben in zekere zin een verlegen man en dat heeft men soms weten te exploiteren.”

Als Van Hiele gelijk heeft

Wanneer brak U nu echt door als didacticus van de wiskunde? “Men ging ineens over mij praten in Australië, waar ik nog geen contacten had. Toen ik vroeg hoe zij eraan kwamen, zeiden ze me dat het terugging op een lezing die ik in 1957 in Parijs heb gehouden. Bij die lezing had ik me een bepaalde gedachte laten ontvallen. En die gedachte was door een Rus zo goed opgevangen dat hij daaruit begreep: ‘Oh, maar als Van Hiele gelijk heeft dan kun je eigenlijk op de lagere school al met wiskunde beginnen.’”

Die gedachte was, dat er geen ondergrens is aan de leeftijd waarop je abstracte begrippen kunt begrijpen? “Ja, althans de ondergrens dat je natuurlijk het verschil moet we-

ten tussen getal en aantal. Zodra de leerling daar overheen is, kun je op de lagere school met wiskunde beginnen. Welnu, die gedachte had ik nog niet eens gehad. Mijn ideeën waren plotseling wereldkundig geworden doordat men ze in Rusland expliciet gemaakt had. Zo kreeg ik dus plotseling contacten bij de tegenvoeters, contacten die culmineerden in mijn eredoctoraten.”

Niveaustheorie

Wanneer kwamen die niveaus in zo uitgesproken vorm naar voren? “Bij onze promotie had ik al het idee van die niveaus. Ik had zelfs het idee dat er vijf niveaus waren. Ik wilde er eigenlijk in mijn promotie niet over spreken: stel je voor dat ze die niveaus helemaal onderuit halen, dan sta ik in mijn hemd. Maar mijn vrouw begon erover in haar dissertatie. Zij had dergelijke angsten helemaal niet.”

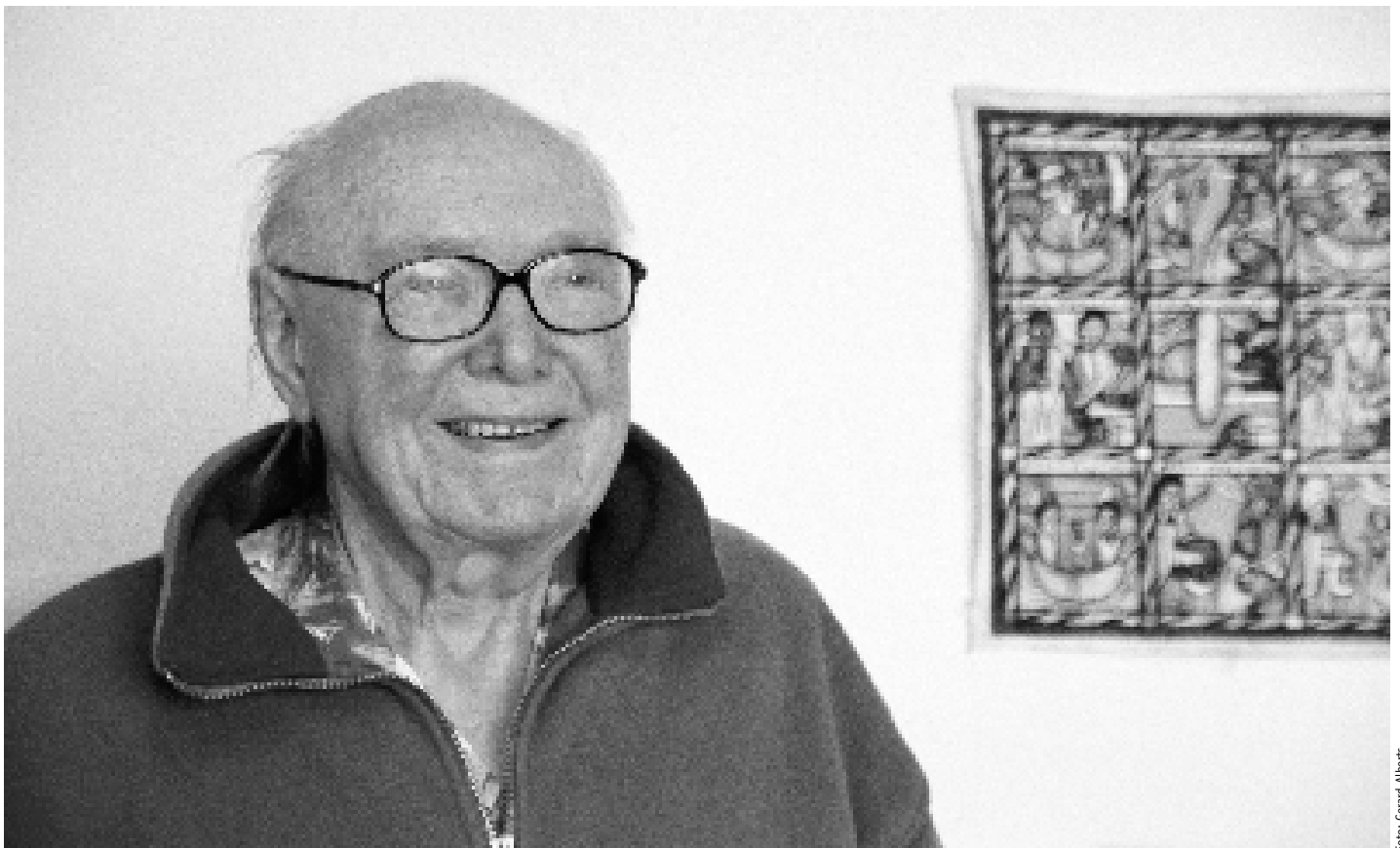
Over die niveaus gesproken. In *Begrip en inzicht* zijn het er drie, met de bijzonderheid dat het tweede niveau zich weer laat reduceren tot het eerste. “Dat is de niveaureductie, maar dat is nu eigenlijk een weg om eronder uit te komen. Een collega in Australië heeft de zaak nader bestudeerd en die zegt: ‘Van Hiele, je moet tenminste vier niveaus handhaven. Ja, hij heeft me gewoonweg overtuigd,

helemaal.’” Verdwijnt daarmee uit uw theorie dat er reductie plaatsvindt? “Soms vindt er een reductie plaats. Dat is, wat wij noemen, de gladde weg.”

De Nijmeegse vakdidacticus Lodewijk van Schalkwijk verdedigde in zijn proefschrift de stelling: ‘De niveaustheorie van Van Hiele kent twee gezichten. Enerzijds gebruikt Van Hiele zijn niveaus om intern wiskundige theorievorming te beschrijven, anderzijds om de samenhang tussen *wetenschap* en *leefwereld* te modelleren. De Van Hiele theorie zou aan duidelijkheid winnen wanneer deze twee aspecten van elkaar werden onderscheiden.’

“Oh ja. Ik heb met het woord leefwereld zoveel moeite. Ik kan nooit goed begrijpen wat leefwereld eigenlijk is. Dat is mijn moeilijkheid. Dat woord wordt ook steeds gebruikt door mensen in de scheikunde. Die hebben het altijd over de leefwereld. En dan moet ik zeggen, ik snap hem eigenlijk niet goed.” Maar los van het woord leefwereld. “Het gaat eigenlijk over de wiskunde.”

Het gaat niet primair over het kind dat wiskunde moet leren in de klas? “Ja, kijk, het kind dat wiskunde moet leren in de klas, kan volgens mij niet laag genoeg beginnen. Zodra het kind weet dat er verschil is tussen getal en aantal, kun je meteen beginnen.”



Pierre van Hiele

De niveautheorie van Van Hiele

De dissertaties van het echtpaar Van Hiele hebben de basis gelegd voor de ontwikkeling van een niveautheorie van wiskundige leerprocessen. Later werd dit door Pierre van Hiele verder uitgewerkt. In fenomenologische traditie gaat de niveautheorie uit van intuïtieve, onvoorwaardelijke en directe ervaring van kennis van de wereld en de onderliggende structuren. In een wiskundig leerproces onderscheidt Van Hiele verschillende niveaus van denken over wiskunde. Aanvankelijk had de niveautheorie betrekking op het meetkundeonderwijs, maar al snel is zij uitgebreid naar andere delen van het vak. De eerste versie onderscheidde drie niveaus; in de latere, meest bekende vorm werden het er vier.

1. *Grondniveau of nulniveau (visueel of intuïtief niveau)*: het kind bekijkt het object visueel of intuïtief. Bijvoorbeeld de herkenning van een gelijkbenige driehoek is vergelijkbaar met de herkenning van "een eik of een muis".
2. *Eerste niveau (beschrijvend niveau)*: een object wordt herkend aan zijn eigenschappen. Bijvoorbeeld een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke zijden - of twee gelijke hoeken. Wanneer het kind deze eigenschappen herkent, dan twijfelt het er niet meer aan dat het daadwerkelijk te maken heeft met een gelijkbenige driehoek is, zelfs indien het object onduidelijk is of indien er sprake is van gezichtsbedrog.
3. *Tweede niveau (informeel deductief niveau)*: hier zijn ook de eigenschappen niet meer onderwerp van beschouwing; nu gaat het om *het verband* tussen de eigenschappen: het gelijk zijn van twee zijden van een driehoek impliceert de gelijkheid van twee hoeken, en andersom.
4. *Derde niveau (theoretisch deductief niveau)*: hier is het karakter van de verbanden tussen eigenschappen onderwerp van studie. Wat wordt er bedoeld met stellingen als: "De gelijkheid van twee zijden van een driehoek impliceert dat ook twee hoeken overeenkomen."? En wat wordt er bedoeld als er van de geldigheid van de omkering van de

ze stelling wordt gesproken?

Op elk niveau reflecteert men expliciet de inwendige structuur van het vorige niveau. Het is denkbaar dat de objecten van het tweede niveau weer kunnen worden gezien als objecten van het eerste: dit is de zogenaamde niveaureductie. In zijn vroege boek *Begrip en inzicht* geeft Van Hiele hierdoor de niveaus een meer cyclisch dan hiërarchisch karakter. In aansluiting op zijn niveaubeschrijving geeft Van Hiele een uitgebreide uiteenzetting van de leerprocessen die het mogelijk maken deze niveaus te doorlopen. Daarna heeft hij de algemene kenmerken van zulke leerprocessen geformuleerd.

Zou men bijvoorbeeld kinderen die het tweede niveau nog niet hebben bereikt, vragen om een bewijs te leveren, dan menen zij volgens Van Hiele dat zij moeten *laten zien dat iets waar is*. Zij zien niet het verband tussen veronderstelling en conclusie. Het lijkt voor de leerlingen alsof de leraar de waarheid in twijfel trekt van een uitspraak die voor hen volkomen helder is. Worden wiskundige bewijzen op deze manier te vroeg in het leerproces ingebracht, dan zou dat tot gevolg hebben dat de leerlingen het nut van wiskunde ernstig betwijfelen: meestal zijn ze reeds zonder bewijs overtuigd van de juistheid van bepaalde uitspraken. Zij houden daar een volledig verkeerde indruk van het wezen van een deductief systeem aan over.

De kern van Van Hieles niveautheorie is dat de objecten van één en dezelfde wetenschap op verschillende niveaus iets heel anders voorstellen. Dit verklaart ook waarom mensen die op verschillende niveaus van denken zitten, langs elkaar heen praten. Anders dan bij de door Piaget aangeduide fases van begripsvorming zijn de niveaus van Van Hiele geen ontwikkelingspsychologische stadia. Zij beschrijven het leerproces van de wiskunde zelf, zoals mensen — meestal kinderen, maar in principe ook volwassenen — dat doormaken. Kinderen, bij wie rekening wordt gehouden met de niveaus van hun leerproces, kunnen volgens Van Hiele juist zeer vroeg een hoge mate aan abstractie bereiken.

Schakel nu helemaal over, doe het nu anders

"Je kunt dan al meteen invoeren: het begrip vector. Dat kan met heel jonge kinderen. Je moet wel ergens een plaatsbepaling hebben,

maar zodra die plaatsbepaling er is dan kun je met behulp van vectoren zeggen: ga naar links of ga naar rechts. Dit is een idee waar Freudenthal heel erg verrukt van was. Freu-

denthal zei: 'Dat is eenvoudig zo'n prachtige gedachte van Van Hiele.'

En dan ook om het eerst in twee dimensies te doen? "Inderdaad."

Beweert U dat een kind, zodra dat het verschil tussen getal en aantal kent, reeds binnengedrongen is in de wiskunde? "Ja, zodra dat kind dat begrip vector heeft gehad op de lagere school, dan is de overgang naar de middelbare school een fluitje van een cent."

En moet een kind later nog toegang verschaft worden tot de wiskunde, via contexten buiten de wiskunde? "Het kind heeft dan natuurlijk in het middelbaar onderwijs geen enkele moeilijkheid meer."

Maar is het ook gemotiveerd in het middelbaar onderwijs? "Ja, helemaal gemotiveerd. Het kind heeft geen enkele moeilijkheid meer met bijvoorbeeld goniometrie en trigonometrie. Dat gaat allemaal als het ware vanzelf. Het zit al in die lagere-school-kennis besloten."

U zegt dus eigenlijk: op de basisschool beginnen met vectoren. "Ja, op de leeftijd dat het kind heeft ontdekt dat er een aantal is. Dan heb je meteen de vrijheid om wiskunde aan te reiken. En als je dan maar begint met vectoren, dan gaat het verder van een leien dakje."

Als het kind nou zegt: waarom moet ik dat leren? Ik wil geen wiskundige worden. "Natuurlijk, dat willen de meeste kinderen niet. Toch maken ze dergelijke opmerkingen helemaal niet. Wanneer zij deze eerste aanzet gekregen hebben, dan zijn ze eigenlijk meteen wel overtuigd dat ze het goed kunnen."

Wat is er zo bijzonder aan vectoren, dat daardoor de wiskundige wereld open zou liggen voor alle kinderen? Kan ik ook een ander onderdeel nemen van de wiskunde dat dezelfde werking heeft? "Nee, nee. Het moeten beslist vectoren zijn."

Waarom? "Omdat die vectoren je de mogelijkheid geven van richting — tweedimensionaal tenminste. En de negatieve getallen krijg je er ook vanzelf bij."

"Een kind vraagt zich niet meer af: waarom doe ik wiskunde? Want wiskunde is eigenlijk zo'n fijn vak, dat doe je met liefde. Zo geloof ik dat het is. Je doet het met liefde."

Kun je dat aan de vectoren zien dat de kinderen dat met liefde gaan doen? "Dat kun je niet zien aan die vectoren. Je kunt dat alleen maar merken in het middelbaar onderwijs, dat het allemaal zo vlot gaat, dat je plezier hebt in de wiskunde." Hoe weet u dat? "De kinderen zeggen het zelf."

Maar nu is het in het wiskundeonderwijs in Nederland zo ingericht, dat in het curricu-

lum nauwelijks vectoren behandeld worden. “Nee, daarom zijn we een geweldig eind teruggedrakt in het onderwijs. Ik vind eigenlijk het onderwijs tamelijk treurig, zoals het nu is. Mijn idee is: schakel nu helemaal over en doe het nu anders.”

Intuïtie

“Het geval wil, daar wordt de laatste tijd over gepubliceerd, dat door elkaar meisjes het beter doen dan jongens. Dat verbaast mij eigenlijk ook niet, want die meisjes gebruiken hun vrouwelijke intuïtie. En de jongens hebben iets tegen vrouwelijke intuïtie. In mijn boek *Structuur* heb ik erg de nadruk gelegd op intuïtie. Daar is men in Nederland wars van. Het boek is dan ook niet bijzonder goed verkocht.”

Wat is het belang van intuïtie in de wiskunde? “Eigenlijk iedere gedachte die je hebt, begint met intuïtie. Voor wie het bestaan van intuïtie wil ontkennen, heb ik een eenvoudig voorbeeld: iemand belt je op en je hoort meteen wie het is. Probeer dat nou maar uit te leggen op een rationele manier.”

Maar juist in de wiskunde, het meest rationele vak in de hele cultuur, juist daar zegt u: laat de intuïtie haar rol spelen? “Ja. En ik blijf erbij dat alle gedachten die we hebben die berusten op intuïtie.” Ook in de wiskunde? “Juist in de wiskunde”.

U hebt beschreven hoe abstractie werkt, hoe het denken van het ene niveau naar het andere verloopt. Wat is de verhouding tussen het proces van abstraheren en intuïtie? “Intuïtie speelt een rol op ieder niveau”.

Hans Freudenthal

Welke rol heeft Freudenthal in uw leven gespeeld? “Ik had niet zo erg veel op met Freudenthal. Van begin af aan al niet. Hij was een bezig iemand. Hij bracht me wel op ideeën. Dat was het eigenlijk.”

Freudenthal hanteerde andere beschrijvingen van het proces van abstractie. In de *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht* zette hij dat proces uiteen in termen van *comprehensie* en *apprehensie*. Dacht hij ook anders over de rol van denkniveaus? “Ja, ik geloof eigenlijk dat hij van die denkniveaus niet veel begrepen heeft.”

Freudenthal was uw promotor. Hij heeft hij u toch ook geholpen naar buiten te treden — buiten Nederland? “Dat laatste beslist niet. Nee, het was juist zo dat ik voor mijzelf moest opkomen. Ik herinner mij bijvoorbeeld een congres in Amerika, waar een spreker naar mijn werk verwees en zei: ‘die Van Hiele waar ik het nu over heb, die zit hier in de zaal. Meneer Van Hiele staat u even op.’ Iemand in het publiek, een Duitser, vroeg waar hij over mijn werk kon lezen. Ik antwoordde dat er binnenkort een boek van mij in het Engels zou verschijnen. Daarop zei Freudenthal die ook aanwezig was: ‘U kunt het ook bij mij in mijn boek lezen.’ Dat was dus niet waar. Hij zat mij gewoon weer dwars. Zo was Freudenthal, ja.” Zat hij u de hele tijd dwars? “Eigenlijk wel, ja. Freudenthal is nooit voor mij een leuke man geweest, nee.” Waar kan hij u nou dwars hebben gezeten. U werkte toch in heel andere omgevingen? “Ja, maar hij probeerde iedere keer mij iets af te snoepen.”

Later hebt U meer erkenning voor uw werk gevonden. Heeft U toen vrede met hem kunnen sluiten? “Nou, vrede? Eigenlijk niet. Dan had je eerst oorlog moeten maken. Ik maak geen oorlog.”

U gaat ervan uit dat Freudenthal uw werk niet helemaal begreep. Begreep U hem, omgekeerd, wel? “Ja, wat ik van hem kende dat begreep ik. En daar was ik het ook vaak mee eens. Ik verkeerde niet in permanente ruzie met Freudenthal. Van zijn kant had hij erg veel respect voor mijn ideeën van vectoren op de lagere school. Daar heeft hij mij erg om geprezen.”

Leraar, met hart en ziel

Bij de onderwijsontwikkeling voor de Mammoet heeft Freudenthal in 1971 de mensen die leermethodes aan het ontwikkelen waren naar Utrecht gehaald en min of meer of het matje geroepen. Als we Henk Schuring mogen geloven (NAW, september 2001) kregen die mensen op hun donder. Kunt U zich dat herinneren? “Freudenthal zou mij op het matje roepen? Kom, nou.”

Heeft u ook contact gehad met andere wiskundigen zoals Van der Blij? Een punt dat Van der Blij altijd weer naar voren brengt is: je kunt zoveel theorie ontwikkelen als je wil: uiteindelijk komt het toch altijd weer op de leraar aan. Bent u het dat met hem eens? “Ook ik ben toch altijd eigenlijk leraar gebleven — met hart en ziel.”