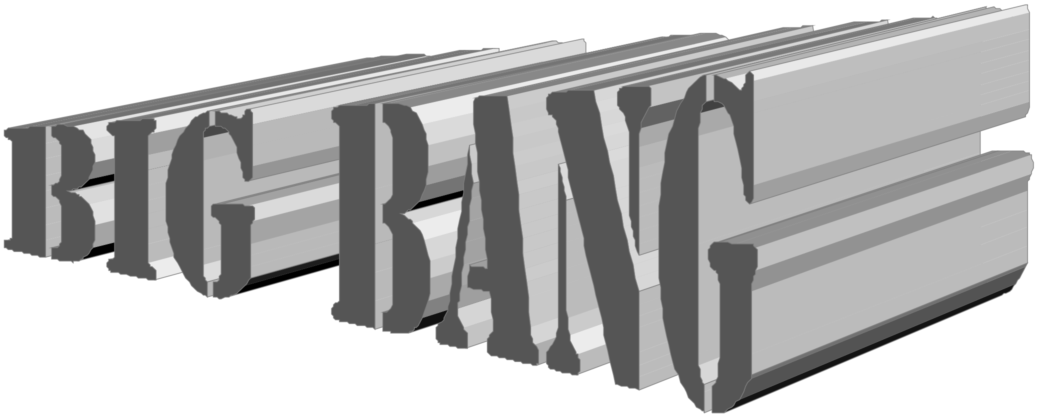


Masterclass voor middelbare scholieren
November 2002

Prof.dr.ir F.A. Bais [1]
m.m.v. Aline Honingh[2]

Instituut voor Theoretische Fysica [3]
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Universiteit van Amsterdam

[1]tel.: 020-525 5770 , e-mail: bais@science.uva.nl
[2]tel.: 020-525 5770 , e-mail: ahoningh@science.uva.nl
[3]homepage: http://www.science.uva.nl/research/itf

Van ∞ klein tot ∞ groot:
Natuurkunde leeft op alle afstandsschalen.

Inhoudsopgave

1 Afstandsbepalingen **11**

1.1 Driehoeksmeting 11

1.2 De straal van de aarde 12

1.3 De schaal van het zonnestelsel 14

1.3.1 Kepler banen 14

1.3.2 Afstand tot de zon 15

1.4 Afstanden van nabije sterren: parallax meting 16

1.5 De Cepheïde methode 18

1.5.1 De lichtsterkte van een ster 18

1.5.2 Cepheïden 19

1.6 De wet van Hubble 19

1.6.1 Wat is licht eigenlijk? 20

1.6.2 Het dopplereffect en de roodverschuiving 20

1.6.3 Afstandsmeting met Hubble 22

1.6.4 De leeftijd van het heelal 23

2 Mechanica voor beginners **25**

2.1 Over krachten 25

2.1.1 Hoe voorwerpen op krachten reageren 25

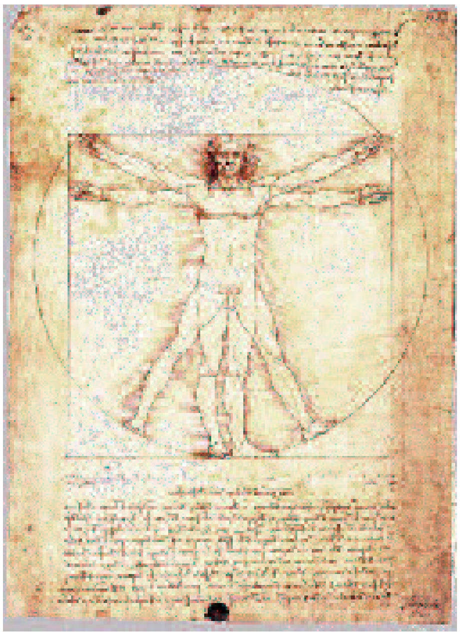
2.1.2 De elektrische kracht 27

2.1.3 De zwaartekracht 28
2.2 Banen onder invloed van een centraal krachtveld 31
2.2.1 Cirkelbanen 32
2.2.2 Elliptische banen 33
2.2.3 Hyperbolische banen: ontsnappen aan de aarde 33
2.3 Arbeid en energie 35
2.3.1 De wet van behoud van energie 38
2.3.2 Gebonden en niet-gebonden banen 38
2.3.3 Energieniveaus van atomen en het uitzenden van licht . 40
2.4 Toepassingen van het begrip ontsnappingssnelheid 41
2.4.1 Het zwarte gat 41
2.4.2 De kritische dichtheid van het heelal 42
2.5 Een laatste opmerking 45

A Eenheden en constantes **47**

B Interessante literatuur en webpagina's **49**

Inleiding



Figuur 1: *De mens met ideale proporties van Leonardo da Vinci*

De illustratie op pagina 3 laat zien dat natuurkunde als kennisgebied op alle afstandsschalen relevant is. Centraal staat de mens, de “homo universalis”, die zich verwondert over de hem/haar omringende werkelijkheid. “Verwondering is de kiem van alle kennis” zei Francis Bacon, en tegenwoordig kunnen we daar zondermeer aan toevoegen: “Kennis is de kiem van alle technologie”. We kijken om ons heen en ontdekken dat we op de aarde leven, de *aarde* die eindig en rond is en waar we toch niet vanaf vallen. De aarde die om de *zon* draait net zoals andere *planeten* en de zon die als èèn van tientallen miljarden sterren ergens in het *melkwegstelsel* zit weggestopt. De melkweg die als *sterrenstelsel* weer deel uit maakt van een *cluster van sterrenstelsels* en die cluster op zijn beurt ...... De ontdekkingen die we doen op steeds grotere afstandsschalen lijken meer en meer te bevestigen dat wij allesbehalve het centrum van de kosmos zijn, integendeel, hoe meer we ervan begrijpen hoe meer we ons in een tamelijk willekeurige uithoek lijken te bevinden van een immens heelal...

De mens heeft zich echter in de loop van de geschiedenis niet alleen verbaasd over zijn omgeving, we hebben ons met evenveel overgave en nieuwsgierigheid gericht op de "binnenwereld". Waar is onze wereld van gemaakt, wat is materie eigenlijk en waarom heeft die materie de eigenschappen die wij waarnemen? Dit is de rechterkant van de cirkel in de afbeelding, waar we afdalen naar steeds kleinere afstandsschalen; via *moleculen* en *atomen* naar de *kern* die weer opgebouwd is uit kerndeeltjes zoals *protonen* en *neutronen*. Die kerndeeltjes blijken als je heel goed kijkt met enorme microscopen - deeltjesversnellers genaamd - uit nog kleinere bouwstenen te bestaan, zoals *quarks*. De natuurkunde bestrijkt dus eigenlijk het enorme gebied van de grootst denkbare afstanden van 10^{20} meter tot de kleinst denkbare van 10^{-20} meter en natuurlijk ook nog eens alles wat daar tussenin ligt. Zo bekeken zijn er eigenlijk drie fronten in de natuurwetenschap waar we met mysteries geconfronteerd worden. Het *front van de grootste afstanden*, het heelal als geheel; is dat eindig of oneindig, heeft het een begin, een eind of geen van beide? Het *front van de kleinste afstanden*, de microkosmos; is die oneindig ondeelbaar, of houdt het een keer op en bestaan er zoiets als de meest fundamentele bouwstenen waaruit alles opgebouwd is? En zo ja, zijn die meest elementaire vormen van materie dan kenbaar? Tussen heel groot en heel klein liggen veel vragen waar we het antwoord niet op weten en die het *front van de complexiteit* vormen. Complexiteit ontstaat wanneer we een heleboel identieke objecten samen brengen tot een nieuw systeem. Denk bijvoorbeeld aan een heleboel ($\sim 10^{23} \sim$ Getal van Avogadro) moleculen, die een vloeistof, een gas of een supergeleider vormen, of een kleiner aantal die zoiets gewiekst als een DNA structuur vormen.

Deze masterclass gaat over het heelal, met name de evolutie en het ontstaan ervan. Toch zullen we ons, om dat te begrijpen, niet alleen bezighouden met de linkerkant van het plaatje, we zullen zien dat het juist nodig is om ook veel kennis van de rechterkant te gebruiken. Bijvoorbeeld, alle informatie die we uit de kosmos krijgen bestaat uit licht of eventueel andere vormen van straling, het is dus van levensbelang om te begrijpen wat voor informatie in licht opgeslagen zit: wat is licht, waar komt het vandaan en hoe lang was het onderweg? Daarom zal deze masterclass zich in de praktijk bezighouden met heel veel aspecten van de eerder genoemde afbeelding.

Nu iets over dit boekje met aantekeningen. *De masterclass zelf, gaat juist niet over deze aantekeningen.* Je moet ze zien als een interessante aanvulling op het verhaal dat we zullen vertellen; het stelt de nieuwsgierigen onder jullie die beter willen weten hoe het precies zit, in staat om ook enkele van de belangrijke formules te zien en er ook zelf berekeningen mee uit te voeren. Sommige theoretisch fysici zeggen wel eens dat wiskunde de ultieme taal van de natuur is... In het eerste hoofdstuk wordt het probleem van de afstandsmeting in het heelal uit de doeken gedaan. Het tweede hoofdstuk is een inleiding tot een aantal aspecten van de mechanica - begrippen als krachten, banen, arbeid en energie - worden uitgelegd, met enige toepassingen op problemen in het heelal. Om je kennis meteen in praktijk te kunnen brengen hebben we tussen de tekst een aantal opgaven opgenomen die (hopelijk) niet al te moeilijk zijn. De antwoorden krijg je erbij, zodat je meteen weet of je het goed gedaan hebt. Achterin vind je een tabel met belangrijke constantes en getalwaarden en ook een lijst met boeken en web-sites.

Hoofdstuk 1

Afstandsbepalingen [1]

Inleiding

Het is duidelijk dat als we iets willen begrijpen van hoe het heelal in elkaar zit, we zo goed mogelijk afstanden moeten kunnen bepalen. We zullen je in dit stuk laten zien hoe het mogelijk is dat we van objecten die miljoenen lichtjaren weg staan, oftewel waarvan alleen het licht al miljoenen jaren onderweg is naar ons, toch kunnen bepalen hoever ze weg staan.

1.1 Driehoeksmeting

De basis voor alle afstandsmeting is de zogeheten driehoeksmeting. Het principe hiervan is dat als je van een driehoek twee van de drie hoeken en de lengte van één van de drie zijden kent, je alle hoeken en lengtes kunt berekenen. De situatie die we hier zullen gebruiken is getekend in figuur 1.1. We meten op twee punten (de punten A en B) die een bekende afstand uit elkaar liggen de hoek tussen een object aan de hemel, bijvoorbeeld de zon of een andere ster (punt C), en de horizon. We kennen dan de afstand AB en de hoeken α en β. We zijn geïnteresseerd in de hoogte CD. Hiervoor schrijven we eerst de uitdrukkingen voor $\tan\alpha$ en $\tan\beta$ op:

$$\tan\alpha = \frac{CD}{AD} \qquad \text{en} \qquad \tan\beta = \frac{CD}{BD}$$

[1] Dit hoofdstuk werd geschreven door drs Mischa Sallé ; e-mail: msalle@science.uva.nl

Dus:

$$AD = \frac{CD}{\tan\alpha} \qquad \text{en} \qquad BD = \frac{CD}{\tan\beta}$$

Als we deze twee uitdrukkingen optellen krijgen we een uitdrukking voor de basis AB in termen van de hoogte CD:

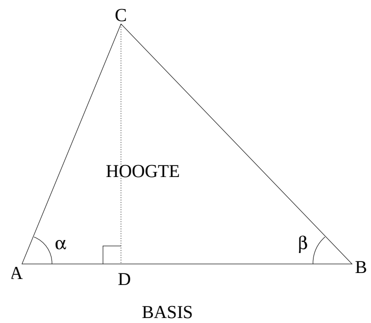
$$AB = AD + BD = CD\left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}\right)$$

En dus als we de hoogte in termen van de basis willen hebben:

$$\text{HOOGTE} = \frac{\text{BASIS}}{\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}} \tag{1.1}$$

1.2 De straal van de aarde

Voordat we met behulp van driehoeksmeting de afstand van hemellichamen kunnen gaan bepalen moeten we eerst een handige basis kiezen. Omdat de afstanden die we willen bepalen echter ongelooflijk groot zijn, moeten we een zo groot mogelijke basis nemen. Voor de bepaling van de afstand tot de zon nemen we daarom als basis de diameter van de aarde. Deze moet echter wel eerst bepaald worden. De methode die de oude Grieken en Arabieren hier voor gebruikten staat geïllustreerd in figuur 1.2. De zon staat hierin rechts, de zonnestralen zijn de lijnen met een pijltje erin. We nemen twee plaatsen op aarde die op dezelfde lengtegraad liggen en bepalen de afstand ertussen. Dat is de afstand s. Vervolgens meten we op de beide plaatsen de hoek van de zon tot het zenith (het punt aan de hemel dat recht boven



Figuur 1.1: Als de basis en de hoeken α en β zijn gegeven ligt de hoogte vast.

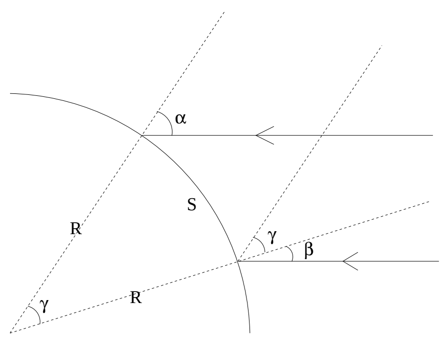
je staat). Je kan dit bijvoorbeeld doen door de hoogte van de zon boven de horizon te bepalen en vervolgens deze hoek van 90° af te trekken. De twee zo gevonden zenithsafstanden zijn de hoeken α en β. Het verschil in breedtegraden tussen de twee punten is de hoek γ. Het is duidelijk uit de figuur dat deze hoek γ gelijk is aan het verschil tussen de gemeten hoeken α en β. Verder is de verhouding tussen de hoek γ en de hoek behorende bij een hele cirkel (2π radialen $= 360°$), gelijk aan de verhouding tussen de afstand s en de omtrek van de aarde ($2\pi R$, waarin R de te bepalen straal van de aarde is). Dus we hebben:

$$\frac{s}{2\pi R} = \frac{\gamma}{2\pi} \qquad \text{oftewel} \qquad R = \frac{s}{\gamma}$$

Dus voor de diameter volgt na invullen van $\gamma = \alpha - \beta$ (in radialen):

$$\text{DIAMETER} = 2\frac{s}{\alpha - \beta} \tag{1.2}$$

Opgave 1 Neem net als Eratosthenes in 200 v. Chr. voor het ene punt Syene (=Aswân) in Zuid-Egypte waar de zon op 21 juni precies recht boven staat, en voor het andere punt Alexandrië waar de zon die dag tot $82°55'30''$ komt. Syene en Alexandrië liggen 5000 stadiën uit elkaar en één stadion is 157 m. Bereken hiermee de straal van de aarde.
(Antwoord: 6357 km. Dit is de straal voor de richting over de polen en niet de equatorstraal die 20 km groter is (de aarde is in feite afgeplat).
)



Figuur 1.2: Bepaal de zonshoogte op twee punten op aarde.

1.3 De schaal van het zonnestelsel

1.3.1 Kepler banen

In het volgende hoofdstuk zullen we ingaan op de verschillende soorten banen die planeten kunnen beschrijven (sectie 2.2) onder invloed van de zwaartekracht. Hier gaan we slechts een klein deel van die kennis toepassen om wat meer over de grootte van die banen te weten te komen. We zullen laten zien dat we slechts één afstand in het zonnestelsel hoeven te bepalen, omdat we alle andere afstanden uit de omloopstijden van de planeten/planetoïden kunnen bepalen. De relatie die we daarvoor nodig hebben is de "3^e wet van Kepler". Johannes Kepler (1571-1630) vond deze wet in 1615 door te kijken naar de beweging van Mars aan de hemel. We zullen deze wet hier uit de gravitatiewet van Newton afleiden voor het speciale geval van cirkelbanen. De wet geldt echter ook voor ellipsbanen.

$$\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{R_A^3}{R_B^3} \qquad \text{De } 3^e \text{ wet van Kepler} \tag{1.3}$$

met T_A en T_B de omloopstijden, en R_A en R_B de stralen van de banen van de hemellichamen A en B.

Laten we een willekeurige planeet P nemen met massa m, omloopstijd T en baansnelheid v, die in een cirkelbaan beweegt. Om in die cirkelbaan te blijven moet er een middelpuntzoekende kracht F_{mpz} op hem werken die gelijk is aan

$$F_{mpz} = \frac{mv^2}{R} \tag{1.4}$$

Die benodigde kracht is natuurlijk de zwaartekracht tussen de zon en die planeet:

$$F_z = \frac{GM_\odot m}{R^2} \tag{1.5}$$

met $M_\odot$ de massa van de zon en G de gravitatieconstante van Newton. Deze twee formules worden in het tweede hoofdstuk uitgelegd (ze staan trouwens ook in je BINAS!). Deze twee krachten zijn dus gelijk:

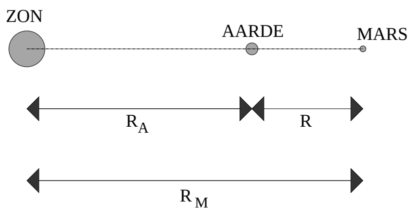
$$\frac{GM_\odot m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \tag{1.6}$$

Voor een cirkelbaan geldt verder dat de snelheid gelijk is aan de omtrek van de cirkel gedeeld door de omloopstijd, oftewel:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{1.7}$$

Opgave 2 Toon nu aan dat het quotiënt $\frac{R^3}{T^2}$ gelijk is aan een constante die alleen van de massa van de zon afhangt.
(Antwoord: $\frac{GM_\odot}{4\pi^2}$)

1.3.2 Afstand tot de zon



Figuur 1.3: Bepaal de straal van de aardbaan m.b.v. de afstand tot Mars.

Waar we naar op zoek waren is de afstand tot de zon en het is natuurlijk wel aardig om met behulp van de 3^e wet van Kepler ook gemakkelijk de afstanden tot andere planeten te kunnen bepalen, maar dat is niet waarvoor we deze wet gaan gebruiken. Het blijkt namelijk veel lastiger om met driehoeksmeting de afstand tot de zon te bepalen dan de afstand tot een planeet omdat de zon veel te groot is om duidelijk één punt te kunnen kiezen en ook staat de zon veel verder weg dan bijvoorbeeld de planetoïden of Mars.

We weten dus nu dat de verhouding $\frac{R^3}{T^2}$ onafhankelijk is van de planeet in kwestie, dus we hebben de volgende situatie (zie ook figuur 1.3):

$$\frac{R_M^3}{T_M^2} = \frac{R_A^3}{T_A^2} \qquad \text{of equivalent} \qquad \frac{R_M}{R_A} = \left(\frac{T_M}{T_A}\right)^{2/3} \tag{1.8}$$

waarin de M voor Mars en de A voor aarde staat. De afstand tot Mars kunnen we met driehoeksmeting vanaf de aarde bepalen. We nemen als basispunten twee punten op aarde met dezelfde lengtegraad die een flink stuk uit elkaar liggen. Het breedteverschil, dat we direct uit de zonshoogte kunnen bepalen levert dan samen met de omtrek van de aarde de absolute afstand tussen de twee punten.

Opgave 3 Neem punt A op 52° noorderbreedte en punt B op de evenaar, beide met dezelfde geografische lengte. Neem aan dat we in punt A, als Mars in het zuiden staat, deze planeet 13.29 boogseconden onder

een zekere ster zien staan en dat in punt B Mars *en* deze ster precies in het zenith staan, oftewel rechtboven. Bepaal nu de afstand van de aarde tot Mars. (NB Een boogseconde wordt meestal geschreven als $1''$ en is $1/3600\,^\circ$)
(Antwoord: 78×10^6 km . Dat is een afstand van 4.3 lichtminuten, oftewel het licht doet over deze afstand 4 minuten en 20 seconden.)

Door $R_M = R_A + R$, met R de gemeten afstand tussen Mars en de aarde, in formule (1.8) in te vullen kunnen we een formule voor R_A afleiden.

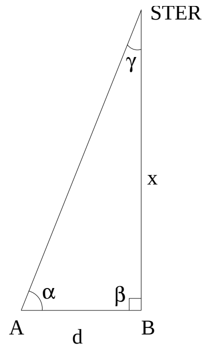
Opgave 4 Ga na dat de uitdrukking voor R_A wordt: $R_A = \frac{R}{\left(\frac{T_M}{T_A}\right)^{2/3} - 1}$

Opgave 5 De afstand tot Mars is 78×10^6 km en de omloopstijd van Mars is 1.88 jaar. Bereken hiermee de afstand van de aarde tot de zon. Deze afstand wordt de astronomische eenheid genoemd, afgekort AE.
(Antwoord: 149×10^6 km. Dat is ruim 8 lichtminuten: 8 minuten en 19 seconden om precies te zijn.)

1.4 Afstanden tot nabije sterren: parallax meting

Nu we de maat van ons zonnestelsel kennen kunnen we de volledige diameter van de baan van de aarde om de zon gaan gebruiken voor het bepalen van de afstand van nabije sterren. De situatie is getekend in figuur 1.4. Hierin zijn de punten A en B de posities van de aarde een half jaar na elkaar. De afstand d is dus de diameter van de aardbaan. Ga na dat we door geschikte tijdstippen in het jaar te kiezen de punten A en B altijd zo kunnen krijgen dat hoek β gelijk is aan 90°. De afstand tot de ster is x. De hoek γ is het verschil tussen de gemeten hoeken α en β. In de praktijk meten we overigens niet de hoeken met de horizon maar meten we de positie van de ster ten opzichte van de achtergrond, dus bijvoorbeeld een veel verder weg staande ster, net zoals we dat deden bij de bepaling van de afstand aarde-Mars.

Omdat de hoek γ heel klein is (niet meer dan ongeveer $1''$ oftewel $1/3600\,^\circ$) is het lijnstuk AB bijna even lang als het stuk cirkelboog op die plaats met als middelpunt de ster en als straal x. Zodoende hebben we dus weer dezelfde



Figuur 1.4: Bepaling van de afstand tot een (nabije) ster.

situatie als met het bepalen van de omtrek van de aarde (het is hier handiger om γ in graden i.p.v. radialen aan te geven):

$$\frac{d}{2\pi x} = \frac{\gamma}{360^\circ}$$

oftewel

$$\text{AFSTAND} = x = \frac{360^\circ d}{2\pi\gamma} \tag{1.9}$$

We kunnen nu het begrip parallax definiëren: de parallax van een ster is de hoek AARDE → STER → ZON en die hoek is natuurlijk de helft van de hoek γ. De formule die de afstand tot een ster in astronomische eenheden (oftewel het aantal maal de afstand d) geeft wordt dan:

$$\text{AFSTAND} = \frac{360^\circ}{2\pi p} \qquad \text{oftewel} \qquad p = \frac{360^\circ}{2\pi \text{AFSTAND}} \tag{1.10}$$

met p hier de parallax in graden.

Omdat de parallax voor de meeste sterren waarvan op deze manier de afstand te bepalen is, in de buurt ligt van één boogseconde heeft men de afstand die hoort bij die parallax de naam parsec gegeven.

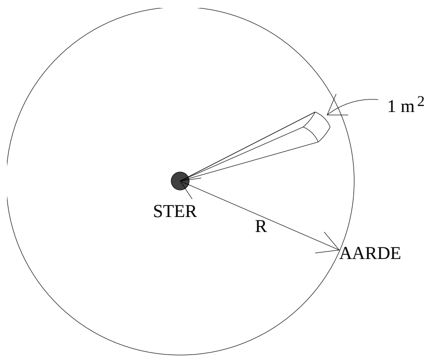
Opgave 6 Hoeveel lichtjaar (afgekort ly) is 1 parsec (1 pc).
(Antwoord: 3.262 ly oftewel 3.08×10^{13} km .)

Opgave 7 De ster α centauri is de ster met de grootste parallax. Zijn parallax is 0.76 boogseconden, bepaal zijn afstand in lichtjaar.
(Antwoord: 4.29 ly.)

1.5 De Cepheïde methode

We kunnen parallaxen meten tot ongeveer $1/100''$ oftewel tot een afstand van ongeveer 100 parsec. Dat is niet bijzonder ver want bijvoorbeeld de Andromeda nevel staat al op een afstand van bijna 700 kiloparsec oftewel 2.2 miljoen lichtjaar. Dergelijke afstanden moeten we dus op een andere manier bepalen. De methode die hiervoor gebruikt wordt is de Cepheïde methode. Voor we deze gaan bespreken hebben we echter eerst de begrippen *schijnbare* en *absolute* lichtsterkte nodig.

1.5.1 De lichtsterkte van een ster



Figuur 1.5: De *schijnbare* lichtkracht is het vermogen per m^2 bij de aarde.

Het is duidelijk dat een ster die ver weg staat veel zwakker lijkt dan een even heldere ster die veel dichter bij staat. Hieruit blijkt dat we onderscheid moeten maken tussen de werkelijke of ware lichtsterkte en de schijnbare lichtsterkte. De ware lichtsterkte is gedefinieerd als de totale energie die de ster per seconde uitstoot, oftewel het stralingsvermogen. Op een gegeven afstand R van die ster wordt die straling echter verdeeld over een boloppervlak met straal R (zie figuur 1.5). De schijnbare lichtsterkte wordt nu gedefinieerd als de hoeveelheid energie die per seconde door één vierkante meter heen gaat. Dus als de ster een totale hoeveelheid energie per seconde L uitzendt dan hebben we op een afstand R voor de schijnbare lichtsterkte l:

$$l = \frac{L}{\text{opp. bolschil met straal } R} = \frac{L}{4\pi R^2} \tag{1.11}$$

Hieruit blijkt dat het erg prettig zou zijn als we op de een of andere manier de werkelijke lichtkracht van een ster zouden kunnen bepalen. Door meten van de schijnbare lichtkracht weten we dan namelijk direct de afstand van de ster!

Opgave 8 De schijnbare lichtkracht van de zon is $1370\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Bepaal de absolute lichtkracht van de zon.
(Antwoord: 3.85×10^{26} W)

1.5.2 Cepheïden

Cepheïden zijn een bepaald type sterren waarvan de lichtkracht periodiek varieert in de tijd. In 1912 ontdekte Miss Henriette Leavitt dat er bij deze sterren een duidelijk verband bestaat tussen hun periode en hun lichtkracht. Ze kon dit verband vinden door te kijken naar Cepheïden die niet al te ver staan, zodat met parallax meting de afstand te bepalen is. Uit de schijnbare lichtkracht is dan dus de werkelijke lichtkracht te bepalen. Door aan te nemen dat ook voor Cepheïden die veel verder weg staan, hetzelfde verband blijft bestaan, kunnen we dus van die sterren uit hun knipperfrequentie hun absolute lichtkracht bepalen en daaruit via hun schijnbare lichtkracht hun afstand. Het is duidelijk dat voor deze methode het noodzakelijk is dat de sterren nog los waarneembaar zijn, maar dat blijven ze tot een afstand van enkele megaparsecs (een megaparsec is een miljoen parsec). En dat is ruim voldoende om bijvoorbeeld de afstand tot de Andromeda nevel te bepalen!

1.6 De wet van Hubble

In 1928 ontdekte de Amerikaanse astronoom Hubble dat de sterren die ons omgeven zich van ons af bewegen. In feite bleek het dat de snelheid v waarmee zij zich van ons af bewegen rechtevenredig is met hun afstand r. In formule vorm schrijven we dit :

$$v(r) = H \cdot r \qquad \text{De wet van Hubble} \tag{1.12}$$

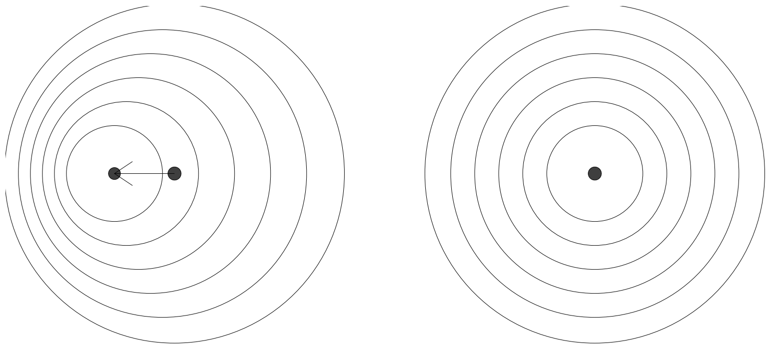
Hierin is de evenredigheids constante H - hoe kan het ook anders - de constante van Hubble ($H \sim 75$ km s^{-1} Mpc^{-1}. We komen in het volgende hoofdstuk nog op deze wet terug. Uit de formule blijkt direct dat het erg belangrijk is om te weten hoe je snelheden bepaald van sterrenstelsels, die je toch ogenschijnlijk niet ziet bewegen. Wat we hiervoor nodig hebben is het dopplereffect. Voor we echter daarover beginnen moeten we eerst wat vertellen over licht.

1.6.1 Wat is licht eigenlijk?

Licht is een golfverschijnsel net als geluid. En zoals bij geluid de toonhoogte wordt bepaald door de frequentie van de golven zo wordt bij licht de kleur bepaald door de frequentie: in de regenboog heeft paars de hoogste frequentie en rood de laagste frequentie. Voorbij het rood zitten echter ook nog frequenties net als voorbij het paars, alleen zijn deze niet voor ons zichtbaar. Zo komt na het rood het infrarood, radiostraling enz. en na het paars het ultraviolet, röntgen straling, gamma straling enz. Wit licht dat een mengsel is van alle (zichtbare) kleuren, is dus een mengsel van golven met vele verschillende frequenties. Een natriumlamp daarentegen is fel oranje: deze zendt voornamelijk licht van één frequentie uit, een frequentie die hoort bij oranje licht. Zo heeft iedere stof een heel specifiek spectrum aan frequenties die hij uitzendt. Met een prisma kan je van zonlicht zien dat het niet uit één kleur bestaat. Als je het echter nog verder uit elkaar zou halen zou je zien dat er een heleboel relatief donkere en lichte lijnen in het spectrum zitten. Als je op die manier naar het spectrum van het licht van verschillende stoffen gaat kijken, dan zul je zien dat iedere stof zijn eigen specifieke lijnenpatroon heeft. Met enige moeite kan je zo aan het lijnenpatroon van zonlicht zien welke stoffen er op de zon voorkomen. Wat we aan dit lijnenpatroon hebben zal zo duidelijk worden, eerst moeten we echter het dopplereffect bespreken.

1.6.2 Het dopplereffect en de roodverschuiving

Als een ambulance je nadert klinkt het geluid van zijn sirene hoger dan wanneer hij stil zou staan en als hij je dan gepasseerd is en van je afbeweegt klinkt zijn sirene lager dan wanneer hij stil zou staan. Dit effect heet het dopplereffect. Het wordt veroorzaakt door het feit dat geluid bestaat uit golven en doordat de golven dichter bij elkaar komen te liggen als de auto naar je toekomt. In figuur 1.6 zie je dit getekend. Je ziet hier links een geluidsbron



Figuur 1.6: Als een geluidsbron op je afkomt is de golflengte kleiner.

die naar links beweegt en rechts dezelfde bron, maar dan stilstaand. Beiden zenden met dezelfde constante frequentie golven uit. Je ziet dat een waarnemer die *links* van de bewegende bron staat de golven sneller achter elkaar ziet langskomen dan een waarnemer links van de stilstaande bron (ze liggen namelijk dichter bij elkaar, maar gaan wel even hard). Voor een waarnemer *rechts* van de bewegende bron is het precies omgekeerd: hij neemt een lagere frequentie waar. Nu wordt de toonhoogte bij geluid net als de kleur van licht bepaald door de frequentie van de golven. Een hogere frequentie betekent bij geluid een hogere toon, dus de sirene van een naderende ambulance klinkt inderdaad hoger dan die van een stilstaande.

Als lichtgevende voorwerpen van ons afbewegen moet dus de frequentie van het licht dat ze uitzenden lager worden. Een blauw voorwerp wordt dus wat groener en een groen voorwerp wat geler enz. In het algemeen geldt dus dat alle zichtbare kleuren enigszins naar het rood opschuiven, vandaar de naam roodverschuiving. We zullen nu een formule voor de roodverschuiving als functie van de snelheid van de bron af gaan leiden.

Laten we eerst kijken naar de rechtersituatie in figuur 1.6. Als de tijd tussen twee golfjes gelijk is aan t en de golven planten zich voort met snelheid c dan is de afstand tussen twee golven natuurlijk gelijk aan ct. Nu de linkersituatie voor een waarnemer rechts van de bron (dus een waarnemer die de bron roodverschoven waar zal nemen): als er een tijd t verstreken is nadat de bron een golf heeft uitgezonden is die golf tot een afstand ct van de oorspronkelijke positie van die bron gekomen, maar de bron is inmiddels een afstand vt verder weg van ons en dus zendt hij de golf niet uit op een afstand ct van de eerdere golf maar op een afstand $ct+vt$. De golven zitten dus een factor $\frac{ct+vt}{ct}$ verder uit elkaar, oftewel het duurt deze factor langer voordat er een nieuwe golf langskomt. De frequentie die de stilstaande waarnemer ziet wordt dus:

$$f_{waar} = f_{bron} \frac{ct}{ct+vt} = f_{bron} \left(\frac{1}{1+\frac{v}{c}} \right) \tag{1.13}$$

Omdat we naar het dopplereffect voor licht kijken geldt dat v altijd véél kleiner is dan c (de lichtsnelheid is bijna 300 000 km/s). Dan kunnen we formule (1.13) ook schrijven als:

$$f_{waar} = f_{bron} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \tag{1.14}$$

Je ziet hieraan bijvoorbeeld dat als een bron van je afbeweegt (dus v positief) de frequentie inderdaad lager wordt terwijl wanneer een bron op je afkomt (dus v negatief) de frequentie hoger wordt.

De roodverschuiving z is het verschil tussen de beide frequenties:

$$z = f_{bron} \frac{v}{c} \tag{1.15}$$

Je ziet dus dat de roodverschuiving evenredig is met de snelheid van de bron.

Opgave 9 Neem een bron die beweegt met een snelheid van 300 km/s en ga na dat het verschil tussen de formules (1.13) en (1.14) inderdaad niet zo erg groot is. Oftewel ga na dat $\frac{1}{1+1/1000} \approx 1 - 1/1000$

1.6.3 Afstandsmeting met Hubble

We hebben dus nu een bijzonder eenvoudige manier gevonden om de snelheid van een ster of sterrenstelsel te bepalen: namelijk door gewoon naar zijn kleur te kijken. Maar nu is natuurlijk de vraag hoe je ooit kan zien of een ster wat roder is dan hij hoort te zijn. Nu komt echter het nut van het lijnenpatroon in het sterrenlicht naar boven: Als we naar het licht van een ster kijken dat roodverschoven is, dan zal ook het lijnenpatroon roodverschoven zijn. Als we dus een aantal lijnen kunnen vinden in het verschoven spectrum waarvan we de frequentie kennen dan kunnen we de roodverschuiving en dus ook de radiële snelheid bepalen. Op deze manier heeft Hubble van een groot aantal nabije sterren en sterrenstelsels de afstand en de snelheid bepaald en zodoende vond hij zijn beroemde wet.

Als we echter de constante van Hubble hebben bepaald, dan kunnnen we deze ook gaan gebruiken voor het bepalen van afstanden van véél verder gelegen objecten. Het mooie van de methode is dat we alleen maar een klein beetje licht van een sterrenstelsel nodig hebben om op deze manier zijn afstand te bepalen. Het probleem blijkt echter te zijn dat het bepalen van de constante van Hubble nogal lastig is. De huidige waarde ligt rond de 75 km s^{-1} Mpc^{-1}. Dat betekent dus dat een object dat zich op een afstand van 1 megaparsec bevindt zich van ons af beweegt met een snelheid van ongeveer 75 km/s.

1.6.4 De leeftijd van het heelal

Met de wet van Hubble (1.12)kunnen we op heel eenvoudige wijze nog een afschatting maken van de leeftijd t_0 van het heelal. De wet zegt dat een ster die op een afstand r zich met een snelheid $v = Hr$ van ons afbeweegt. Stel dat we de redenering nu eens omkeren en de tijd de andere kant op laten lopen, we kijken dan dus terug in de tijd en moeten dus ook het teken van de snelheid omkeren. Dat betekent dat de sterren die heelverweg staan heel hard naar ons toekomen, en de sterren dichtbij evenredig veel langzamer. De vraag is dan hoelang doen ze er over voor ze bij ons zijn. Dat is ruwweg de afstand gedeeld door de snelheid, dus

$$t_0 \sim r/v = 1/H \tag{1.16}$$

Hier blijkt dat de tijd t_0 voor alle sterren (d.w.z. afstanden) hetzelfde te zijn. Met andere woorden een tijd t_0 geleden zat het hele zichtbare heelal boven op elkaar geperst een moment dat met recht de *Oerknal* genoemd mag worden.

Opgave 10 Bereken de huidige leeftijd van ons heelal t_0 uit de waarde van de Hubble constante H.
(Antwoord: $t_0 \sim 15$ miljard jaar)

Hoofdstuk 2

Mechanica voor beginners [1]

In dit hoofdstuk geven we wat achtergronden en formules waarmee je eenvoudige berekeningen kunt uitvoeren die van belang zijn om bepaalde aspecten van het heelal te begrijpen. Dingen die soms heel ingewikkeld en geleerd over komen blijken dan eigenlijk best eenvoudig te begrijpen.

2.1 Over krachten

2.1.1 Hoe voorwerpen op krachten reageren

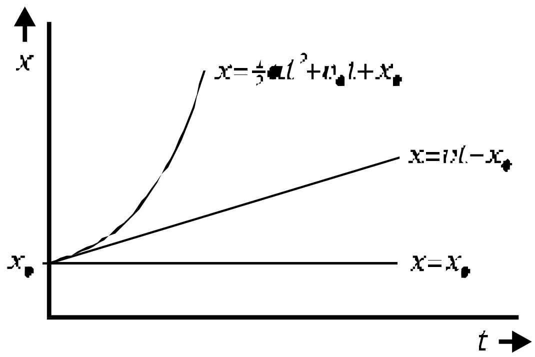
Iedereen heeft wel een idee van wat een kracht is: een kracht kan een voorwerp in beweging zetten, maar ook tot stilstand brengen. Er zijn verschillende soorten krachten die je in het dagelijks leven tegenkomt: elektrische en magnetische krachten, wrijvingskrachten, opwaartse krachten in vloeistoffen en natuurlijk de zwaartekracht. Op de grote afstandsschalen in het heelal domineert de zwaartekracht en op atomair niveau de elektromagnetische kracht. Hoe voorwerpen op krachten reageren volgt uit de tweede wet van Newton:

$$F = ma \qquad \text{(De krachtwet van Newton)} \tag{2.1}$$

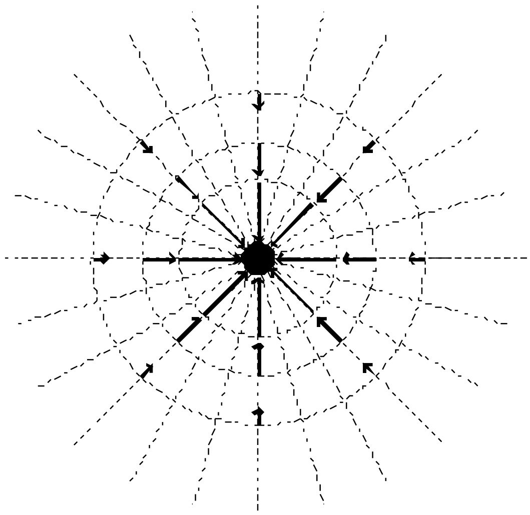
Dit is een zogenaamde bewegingsvergelijking die ons vertelt dat een voorwerp onder invloed van een kracht F een versnelling a ondervindt, die evenredig is

[1] Dit hoofdstuk werd in zijn oorspronkelijke vorm geschreven door drs Erwyn van der Meer

met die totale kracht F die op dat voorwerp wordt uitgeoefend. De versnelling geeft aan hoeveel de snelheid v per tijdseenheid verandert, dus hoe groter de versnelling, hoe sneller de snelheid verandert. De eenheid van versnelling is meter per seconde per seconde:$m\ s^{-2}$. Niet elk voorwerp reageert met dezelfde versnelling op een even grote kracht. In formule (2.1 staat namelijk de massa m van het voorwerp als evenredigheidsconstante: je ziet dat voorwerpen met een kleine massa sterker reageren op een kracht dan voorwerpen met een grote massa. De eenheid van kracht is de Newton: $1\ N = 1\ kg\ m\ s^{-2}$. We kunnen nu de volgende situaties onderscheiden: Als er geen kracht op een voorwerp wordt uitgeoefend, is de versnelling nul en dat betekent dat de snelheid v constant is: het voorwerp staat dan stil (de snelheid is constant nul) of beweegt 'eenparig' langs een rechte lijn. De positie x op het tijdstip t voldoet dan aan $x(t) = v \cdot t + x_0$, hierin is x_0 de beginpositie. Als er een constante kracht op het voorwerp wordt uitgeoefend ondervindt het ook een constante versnelling, de snelheid v neemt dan 'eenparig' toe, dat wil zeggen $v(t) = a \cdot t + v_0$, waarbij v_0 de beginsnelheid is. We noemen de beweging dan eenparig versneld en de positie van het voorwerp wordt gegeven door $x(t) = a \cdot t^2 + v_o \cdot t + x_0$. Als er een niet constante kracht is, dan is er geen algemene formule te geven. We zullen terugkomen op speciale gevallen van niet constante krachten. Als we de positie x als functie van de tijd t in een grafiek uitzetten, krijgen we een zogenaamd $x - t$ diagram.



Figuur 2.1: *x-t diagram voor verschillende bewegingtoestanden, van boven naar beneden: eenparig versneld, eenparige snelheid en stilstaand.*



Figuur 2.2: *Het electrisch krachtveld om een negatieve lading, de pijlen geven de grootte en richting van de kracht die een andere positieve lading op die plaats zou ondervinden.*

2.1.2 De elektrische kracht

Behalve massa kunnen voorwerpen ook elektrische lading hebben, deze lading komt in twee varianten voor: positief en negatief (geen lading noemen we lading nul).

Je weet natuurlijk dat gelijke ladingen elkaar afstoten en dat tegengestelde ladingen elkaar aantrekken. Deze kracht die elektrische ladingen op elkaar uitoefenen noemen we de elektrische kracht. Twee puntvormige voorwerpen met ladingen q en Q op een onderlinge afstand r oefenen een kracht F_e op elkaar uit die voldoet aan de wet van Coulomb:

$$F_e = f\frac{qQ}{r^2} \qquad \text{(De wet van Coulomb)} \tag{2.2}$$

Deze kracht staat vanuit het ene voorwerp precies naar het andere voorwerp toe of wijst er precies vanaf, afhankelijk van het relatieve teken van de ladingen. De eenheid waarin we lading meten is de Coulomb (C) en de waarde van de natuurconstante f die in de formule staat is dan $9,0 \cdot 10^9\ N\ C^{-2}\ m^2$. Dat betekent dat twee voorwerpen met een lading van -1 en $+1$ Coulomb elkaar op een afstand van 1 meter met een kracht van 9 miljard Newton zouden aantrekken!

Opgave 11 Bereken hoe lang een truck van tien ton onder deze kracht er over doet om van 0 tot 100 km/u op te trekken.
(Antwoord: Gebruik dat $a = F/m$ en $v(t) = a \cdot t$, dan vind je $t = 31$ milliseconde!)

De elektrische kracht tussen twee voorwerpen met een lading van 1 Coulomb is dus zeer groot, maar in het dagelijks leven zijn er helemaal geen elektrische krachten van miljarden Newton! Komt dit nu omdat 1 Coulomb een belachelijk grote maat voor lading is, die in het dagelijks leven helemaal niet voorkomt? Nee, want voorwerpen bevatten duizenden Coulombs aan positieve lading, maar ook duizenden Coulombs aan negatieve lading! De balans tussen positieve en negatieve lading is zó precies in evenwicht dat in de natuur de hoeveelheden positieve en negatieve lading in voorwerpen elkaar bijna opheffen zodat de netto lading op een voorwerp altijd veel kleiner dan 1 Coulomb is. Verder zien we aan formule (2.2) dat de elektrische kracht snel afneemt met toenemende afstand tussen de geladen voorwerpen: als je de afstand 2× zo groot maakt, wordt de kracht 4× zo klein. In figuur 2.2 geeft de lengte van de pijlen de grootte van de elektrische kracht op de betreffende afstand aan.

2.1.3 De zwaartekracht

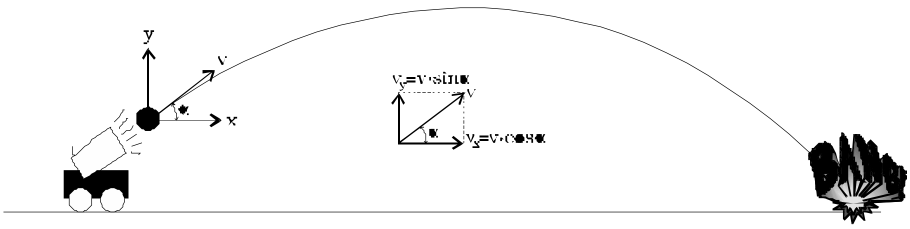
Een andere van de hierboven genoemde krachten is de zwaartekracht. We denken hierbij in eerste instantie aan de kracht waarmee de aarde ons aantrekt en die het 'vallen van voorwerpen naar de aarde toe' veroorzaakt. De zwaartekracht is een heel bijzondere kracht, want deze is voor alle voorwerpen evenredig met de massa. Een voorwerp dat p keer zo traag op een kracht reageert ondervindt een precies p keer zo grote zwaartekracht, zodat de zwaartekracht alle voorwerpen (als ze zich ongeveer op dezelfde plek bevinden en we de luchtwrijving verwaarlozen) precies dezelfde valversnelling geeft: In vacuüm vallen alle voorwerpen even snel (denk aan de experimenten die Galileo Galileïreeds in de zestiende eeuw m.b.v. de toren van Pisa uitvoerde). Dat betekent ook dat als je op de maan (die geen dampkring heeft) gelijktijdig en vanaf dezelfde hoogte een zware hamer en een veel lichter veertje laat vallen, ze precies gelijktijdig de grond raken.

Dicht bij het aardoppervlak

Als we ons vlak bij de aarde bevinden, zeg minder dan tien kilometer hoog, dan kunnen we het aardoppervlak als vlak beschouwen en is de zwaartekracht op elke plek hetzelfde, namelijk:

$$F_z = mg \tag{2.3}$$

met $g = 9,8\ m\ s^{-2}$ en naar beneden gericht. Dus in verticale richting ondervinden alle voorwerpen deze valversnelling en in horizontale richting werken er na wegschieten of laten vallen van het voorwerp geen krachten. We mogen de bewegingen in de verticale en de horizontale richting als onafhankelijk beschouwen.



Figuur 2.3: *De baan die een afgeschoten kogel volgt.*

We bekijken een kogel die door een kanon onder een hoek α wordt afgevuurd en die een beginsnelheid v heeft. Kies de oorsprong van ons $x-y$ assenstelsel net buiten de loop van het kanon. We kunnen de snelheidsvector in horizontale en verticale componenten ontbinden zoals in figuur 2.3 staat aangegeven. In de x-richting werkt er geen kracht, dus is de beweging eenparig en in de negatieve y-richting is er een constante versnelling g. De positie (x, y) van de kogel als functie van de tijd t is dan:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x t = vt\cos\alpha \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t = -\frac{1}{2}gt^2 + vt\sin\alpha \end{aligned} \tag{2.4}$$

Hieraan kunnen we zien dat vrij vallende voorwerpen langs paraboolbanen bewegen.

Ver van het aardoppervlak

Als je wat verder kijkt dan je neus lang is, zie je dat het aardoppervlak natuurlijk niet vlak kan zijn, want de aarde is bolvormig. De zwaartekracht is wel altijd 'naar beneden' gericht, maar in Nieuw Zeeland verschillen ze met ons van mening over welke richting 'naar beneden' is. Preciezer gezegd is de zwaartekracht altijd naar het middelpunt van de aarde gericht. Net als de richting is ook de grootte van de zwaartekracht niet constant: hij hangt namelijk van de hoogte af. Voor de zwaartekracht blijkt een soortgelijke wet te gelden als de wet van Coulomb, formule (2.2), die voor de elektrische kracht geldt. De kracht F_z die twee puntvormige voorwerpen met massa M en m op een afstand r op elkaar uitoefenen voldoet aan de gravitatiewet van Newton:

$$F_z = G\frac{mM}{r^2} \qquad \text{(De gravitatiewet van Newton)} \tag{2.5}$$

In tegenstelling tot de elektrische kracht is de zwaartekracht altijd aantrekkend. De evenredigheidsconstante G die in de gravitatiewet staat, vertelt ons hoe sterk de zwaartekracht is, deze natuurconstante heet de constante van Newton. Het blijkt dat voor bolvormige objecten de zwaartekracht werkt alsof alle massa in het middelpunt geconcentreerd is, we kunnen dan gewoon de bovenstaande wet van Newton gebruiken. De aarde is ongeveer bolvormig, dus geldt deze formule ook voor de zwaartekracht die de aarde op kleine voorwerpen uitoefent. Neem dan voor M de massa van de aarde, voor m de massa van het voorwerp en neem voor r de afstand tussen het voorwerp en het middelpunt van de aarde. Deze afstand moet je dan wel groter nemen dan de straal R van de aarde, want onder het aardoppervlak geldt deze formule niet.

Opgave 12 Bepaal de een eenheid en bereken de waarde van de constante van Newton als gegeven is dat $R = 6,4 \cdot 10^3$ km, $M = 6,0 \cdot 10^24$ kg en $g = 9,8\ ms^{-2}$.
(Antwoord: $G = 6,7 \cdot 10^{-11}\ \ kg^{-1}s^{-2}m^3$)

Opgave 13 Bepaal de kracht die twee voorwerpen met beide een massa van 1 kg op een afstand van 1 meter op elkaar uitoefenen. Vergelijk dit eens met de elektrische kracht die twee voorwerpen met beide een lading van 1 Coulomb op elkaar uit zouden oefenen, zou je de zwaartekracht dan

sterk of zwak noemen?
(Antwoord: , $F_z = 6,7{\cdot}10^{-11}$ N , zeer zwak vergeleken met $F_e = 9,0{\cdot}10^9$ N voor de elektrische kracht)

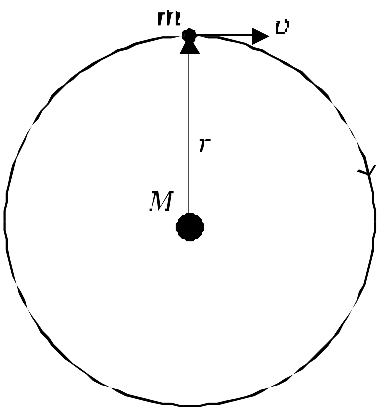
Opgave 14 Hoe precies moet de neutraliteitsbalans (zie pagina 6) tussen positieve en negatieve lading in evenwicht zijn om ervoor te zorgen dat de elektrische kracht tussen voorwerpen kleiner is dan 1% van de zwaartekracht tussen die voorwerpen? Ga uit van twee voorwerpen met gelijke massa en gelijke netto lading, ga er verder van uit dat die voorwerpen voor 50% van het gewicht uit ongeladen deeltjes (neutronen) bestaan en dat de overige 50% van de massa uit bijna evenveel positief (protonen) als negatief (elektronen) geladen deeltjes bestaat. Protonen hebben een lading van $9,6 \cdot 10^7$ Coulomb per kg en elektronen hebben een lading van $-1,8 \cdot 10^{11}\ C\ kg^{-1}$.
(Antwoord: De netto lading op de voorwerpen moet minder zijn dan het $1/10^{18}$ deel van de bruto positieve of bruto negatieve lading, dat is 0.0000000000000001%)

Je snapt nu dus ook waarom je in dagelijks leven wél merkt dat je door de aarde wordt aangetrokken, maar niet merkt dat je door je tafel, stoel, buurman of buurvrouw, ja door eigenlijk alles wordt aangetrokken. De meeste voorwerpen hebben geen netto lading zodat er geen elektrische krachtwisselwerking is en de zwaartekracht is alleen merkbaar voor hele zware objecten zoals de aarde omdat hij heel erg zwak is.

2.2 Banen onder invloed van een centraal krachtveld

De wetten van Coulomb en Newton, formules (2.2) en (2.5), hebben dezelfde vorm. Dat betekent dat de banen die voorwerpen volgen onder invloed van de elektrische kracht (in het geval van aantrekking) en de zwaartekracht, ook dezelfde vorm hebben. Deze banen kun je berekenen door de zojuist genoemde uitdrukkingen voor de krachten in de algemene krachtwet van Newton (vergelijking 2.1) in te vullen en deze vergelijkingen op te lossen. Hiervoor is enige wiskunde noodzakelijk die we hier niet van stal willen halen, maar de conclusie is dat er inderdaad verschillende soorten banen mogelijk zijn, die we in de volgende paragrafen zullen bekijken

2.2.1 Cirkelbanen



Figuur 2.4: *Een cirkelbaan.*

Zoals je weet beweegt de maan (bij benadering) in een cirkel om de aarde en de aarde beweegt op zijn beurt (bij benadering) in een cirkel om de zon. Ook de andere planeten doen dat. Je zou je dan voor kunnen stellen dat in een atoom de negatief geladen elektronen net als planeten ook in cirkelbanen om de positief geladen kern draaien. We zullen die cirkelbanen eens nader bekijken. De maan voert onder invloed van de zwaartekracht van de aarde een permanente valbeweging uit. Alleen valt de maan niet naar de aarde, zoals een kogel die je afschiet, maar langs de aarde. De afstand tot de aarde blijft hierbij (ongeveer) gelijk: daarom noemen we het een cirkelbaan. De maan voert die cirkelbeweging uit omdat de zwaartekracht precies de benodigde middelpuntzoekende kracht levert voor een cirkelbaan met een straal gelijk aan de afstand tussen de middelpunten van de aarde en de maan. Hetzelfde geldt voor de meeste satellieten. De formule voor de middelpuntzoekende kracht voor een voorwerp met massa m dat in een cirkelbaan op afstand r en met snelheid v om een ander voorwerp beweegt is:

$$F_{mpz} = \frac{mv^2}{r} \tag{2.6}$$

We zullen deze formule hier niet afleiden. De middelpuntzoekende kracht staat altijd naar het middelpunt van de cirkelbaan gericht.

Opgave 15 Vind de benodigde snelheid v_c voor een voorwerp met massa m in een cirkelbaan op afstand r om een voorwerp met massa M, zie ook figuur 2.4, door ervan uit te gaan dat de zwaartekracht de benodigde middelpuntzoekende snelheid levert.
(Antwoord: $v_c = \sqrt{G\frac{M}{r}}$, merk op dat deze snelheid niet van m afhangt)

Opgave 16 Hoelang duurt een etmaal op aarde als we ons op de evenaar in een gewichtsloze toestand zouden bevinden.

Opgave 17 Een geostationaire satelliet staat op recht boven een vast punt op de evenaar. Hoe hoog boven het aardoppevlak bevindt zich de (cirkelvormige) baan van deze satelliet.

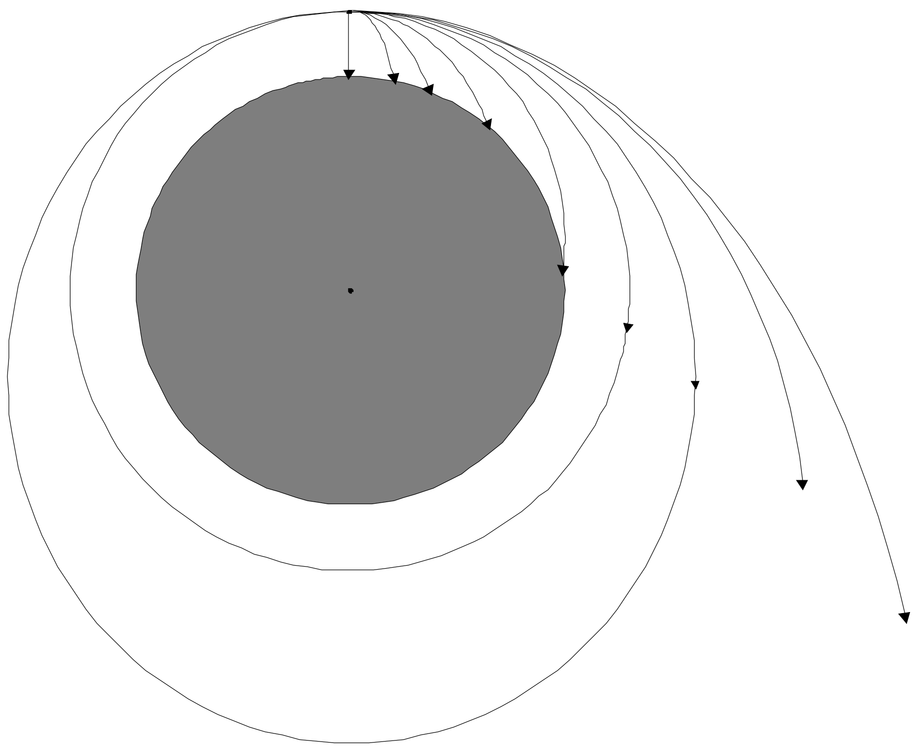
2.2.2 Elliptische banen

Eigenlijk zijn de meeste planeetbanen ellipsen en geen cirkels. Ellipsen zijn afgeplatte cirkels en als de afplatting heel klein is mogen we ze wel als cirkels beschouwen. Andersom is een cirkel een bijzondere ellips. Een ellipsbaan blijkt voor de zwaartekracht de meest algemene 'gebonden' baan te zijn, gebonden wil zeggen dat het voorwerp niet ontsnapt aan het grote, zware object waar het omheen beweegt. In figuur 2.5 staat aangegeven welke mogelijke ellipsbanen er zijn als we vanuit één punt een flink stuk boven het aardoppervlak een kogel horizontaal wegschieten.

Sommige banen zijn geen volledige ellipsbanen omdat die dwars door de aarde zouden lopen: als de kogel zo'n baan volgt slaat hij in op het aardoppervlak. De beginsnelheid bepaalt welke baan de kogel volgt. Als we hem de in opgave 4 berekende cirkelsnelheid v_c geven, volgt de kogel de cirkelbaan. Een kleinere snelheid geeft één van de binnenste ellipsen en een grotere één van de buitenste.

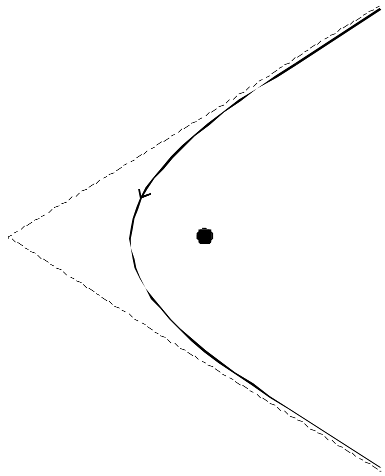
2.2.3 Hyperbolische banen: ontsnappen aan de aarde

Als we de beginsnelheid blijven verhogen krijgen we steeds grotere ellipsen. Er is echter een snelheid waarbij de baan geen ellips meer is, ook geen hele grote maar een parabool! Een parabool is geen gesloten kromme en dat betekent dat het voorwerp niet meer terug zal keren, maar naar het oneindig



Figuur 2.5: *Verschillende ellipsbanen afhankelijk van de grootte van de horizontale beginsnelheid.*

verre zal ontsnappen. Het voorwerp zal wel nog steeds afgeremd worden en uiteindelijk met snelheid nul in het oneindige aankomen. Preciezer gezegd: voor steeds grotere tijden wordt de snelheid steeds kleiner en nadert naar nul. Voor nog grotere beginsnelheden blijft er in het oneindige nog een restsnelheid over, de baan blijkt dan een hyperbool te zijn. Een hyperbool heeft twee asymptoten, de grafiek van de functie $f(x) = 1/x$ bestaat uit twee hyperbolen, één in het eerste kwadrant en één in het derde kwadrant en heeft als asymptoten de $x-$ en de $y-$as. De hyperbool- en de paraboolbaan zijn in tegenstelling tot de ellipsbanen 'niet gebonden' banen. In het grensgeval waarbij de baan een parabool is, wordt de beginsnelheid waarbij de restsnelheid net nul is, de ontsnappingssnelheid genoemd. Om het verschil tussen gebonden en niet-gebonden banen beter te kunnen begrijpen en om de ontsnappingssnelheid te kunnen berekenen is het zeer handig om eerst de begrippen arbeid en energie in te voeren.



Figuur 2.6: *Hyperbolische baan.*

2.3 Arbeid en energie

Iedereen heeft wel een intutief beeld van wat arbeid en energie zijn, daar hebben we hier helaas niet genoeg aan want we hebben een wat kwantitatiever begrip nodig. We beginnen met het begrip arbeid: Je verricht arbeid als je een voorwerp door het uitoefenen van een kracht verplaatst. We beschouwen alleen het geval dat deze verplaatsing parallel aan de kracht plaatsvindt. De arbeid W die je verricht kan zowel positief als negatief zijn, al naar gelang de kracht F in dezelfde richting als de verplaatsing Δx staat of in tegengestelde richting staat. In formulevorm wordt dit:

$$W = F\Delta x \tag{2.7}$$

Dus als je het voorwerp helpt door het in zijn bewegingsrichting te duwen of vooruit te trekken, verricht je positieve arbeid en als je de beweging tegenwerkt door aan de achterkant te trekken of aan de voorkant te duwen, verricht je negatieve arbeid. Je kunt ook zeggen dat het voorwerp dan aan jou trekt of jou vooruitduwt, het voorwerp verricht dan positieve arbeid op jou. Energie is nu de mogelijkheid om arbeid te verrichten. Als je positieve arbeid verricht op een voorwerp neemt jouw mogelijkheid om nog verdere arbeid te verrichten af, maar het voorwerp kan daarna meer arbeid verrichten: zijn energie neemt toe. En als je negatieve arbeid op het voorwerp verricht neemt de energie van het voorwerp af en neemt jouw vermogen om arbeid te verrichten, dus je energie, toe. Oftewel de verandering in de energie van het voorwerp is gelijk aan de door jouw geleverde arbeid:

$$\Delta E = W \tag{2.8}$$

De eenheid van arbeid en energie is de Joule (1J = 1Nm). In de bovenstaande zinnen zit al verborgen dat het vermogen om arbeid te verrichten niet zomaar verloren gaat en ook dat het overdraagbaar is van het ene object naar het andere. We zullen straks meer hierover zeggen als we het over behoud van energie hebben. Er is geen natuurlijk nulpunt voor energie, dat wil zeggen er is geen punt waarop je kunt zeggen dat een voorwerp geen arbeid meer kan verrichten, alleen energieverschillen zijn belangrijk en de energie van een voorwerp mag dus ook negatief zijn. Vaak kies je het nulpunt zo handig mogelijk.

Er zijn verschillende soorten energie: Warmte-energie: hoe warmer een voorwerp, dus hoe hoger de temperatuur, hoe meer warmte-energie het heeft. Chemische energie: energie kan ook in chemische vorm worden opgeslagen, denk bijvoorbeeld aan benzine en batterijen [2] Bewegingsenergie: een voorwerp dat beweegt kan arbeid verrichten door bij het afremmen een kracht over een afstand op een ander voorwerp uit te oefenen. Je kunt afleiden dat voor een voorwerp met massa m en snelheid v geldt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.9}$$

potentiële energie: als je een voorwerp tegen de zwaartekracht omhoog beweegt kost je dat moeite. Die moeite gaat niet verloren maar wordt opgeslagen als potentiële energie, deze kan weer vrijkomen als het voorwerp naar beneden valt: het krijgt dan bewegingsenergie. Vlak bij het aardoppervlak waar de valversnelling g is, geldt voor een voorwerp met massa m op hoogte h voor de potentiële energie:

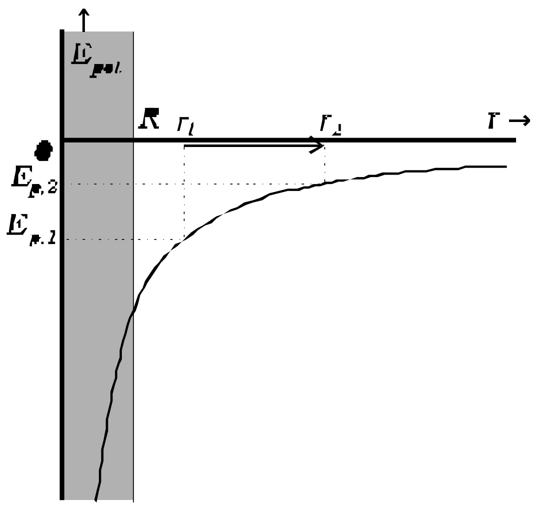
[2] Einstein ontdekte dat ook massa een vorm van energie vertegenwoordigt, zoals tot uitdrukking komt in de vergelijking $E = mc^2$. Dit betekent dat 1 kg materie overeenkomt met een energie van $E = 9 \cdot 10^16\ J$, dat is net zoveel energie als een 1 $MegaWatt$ centrale in 2854 jaar produceert! Deze enorme energie is natuurlijk niet zonder meer vrij te maken, maar zowel bij de fusie als bij het verval van kernen wordt inderdaad een deel van de massa in energie omgezet: bij het verval van 1 kg uranium komt bijvoorbeeld 100.000 keer zoveel energie vrij als bij de verbranding van 1 kg olie.

$$E_{pot} = mgh \tag{2.10}$$

Voor afstanden r van het middelpunt van de aarde groter dan de straal R van de aarde geldt:

$$E_{pot} = -G\frac{mM}{r} \tag{2.11}$$

Het nulpunt voor deze energie is gekozen in het oneindige. In figuur 2.7 staat de grafiek getekend en we zien dat inderdaad voor heel grote afstanden de potentiële energie naar nul nadert.



Figuur 2.7: *De potentiele energie* E_p*ot als functie van de afstand* r.

Ook een geladen voorwerp om een andere geladen voorwerp, zoals een elektron om een atoomkern, heeft een potentiële energie. Deze heeft dezelfde vorm als formule (2.11), want voor tegengestelde geladen voorwerpen is qQ negatief en dus is hier E_{pot} ook negatief):

$$E_{pot} = f\frac{qQ}{r} \tag{2.12}$$

2.3.1 De wet van behoud van energie

In het voorgaande hebben we al laten doorschemeren dat energie niet verloren kan gaan: energie kan slechts van de ene vorm in de andere vorm overgaan. Dit staat bekend als de wet van behoud van energie (voor een afgesloten systeem):

De totale som van alle verschillende vormen van energie
is voor een afgesloten systeem constant

We kijken nu deze behoudswet voor voorwerpen die alleen onder invloed van de zwaartekracht van de aarde bewegen of voor elektronen die om veel zwaardere kernen bewegen. Er is dan weliswaar energie-uitwisseling tussen het voorwerp/elektron en het grotere object waar het omheen beweegt, maar het blijkt dat we alleen de energie van het voorwerp/elektron hoeven te beschouwen. Die bestaat uit bewegingsenergie en potentiële energie en de som daarvan is behouden:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = constant \qquad \text{(De wet van behoud van energie)} \tag{2.13}$$

Als we nu de bewegingsenergie uit formule (2.9) en formule (2.11) voor de potentiële energie invullen, krijgen we voor het zwaartekracht geval:

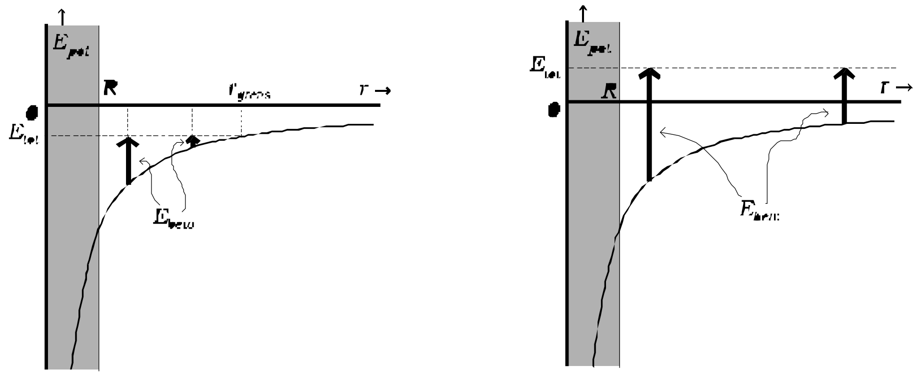
$$E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = constant \tag{2.14}$$

en in het geval van de elektrische kracht door formule (2.12) in te vullen:

$$E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + f\frac{qQ}{r} = constant \tag{2.15}$$

2.3.2 Gebonden en niet-gebonden banen

Met het energiebegrip in de hand, kunnen we nu gaan bekijken wat een gebonden van een niet-gebonden baan onderscheidt. Tijdens de beweging van het voorwerp/elektron van de planeet/kern af, neemt door de aantrekkende kracht de snelheid af en dus wordt ook de bewegingsenergie kleiner. We kunnen dat nu ook anders zien met behulp van figuur 2.7. Als het voorwerp van een afstand r_1 naar een grotere afstand r_2 beweegt, neemt zijn potentiële energie toe van $E_{p,1}$ naar $E_{p,2}$, Omdat de totale energie behouden is, moet dus zijn bewegingsenergie wel afnemen met een hoeveelheid $\Delta E_{kin} = E_{p,2} - E_{p,1}$. Maar bewegingsenergie is altijd positief want v_2 is altijd positief en als de bewegingsenergie op afstand r_1 kleiner is dan ΔE_{kin} dan zou de bewegingsenergie bij aankomst op afstand r_2 negatief zijn! Dat kan niet, dus we concluderen dat het voorwerp helemaal niet op die afstand kan komen: het bevindt zich in een gebonden baan.



Figuur 2.8: *De situatie met positieve en negatieve totale energie $E_t$ot.*

De totale energie van het voorwerp bepaalt een verticale lijn in de grafieken in figuur 2.8, want de totale energie hangt niet van de afstand af. De bewegingsenergie op een afstand r is in de grafieken af te lezen als het verschil tussen de totale energie en de potentiële energie op die afstand. Je ziet dat op grotere afstanden de bewegingsenergie inderdaad kleiner is. In het linkerplaatje is de totale energie negatief. Er is dan een afstand r_{grens} waar de bewegingsenergie nul is, dat betekent dat het voorwerp zich nooit verder dan die afstand van de planeet kan verwijderen. Het bevindt zich dan in een gebonden baan. En in het rechterplaatje is de totale energie positief. Er is dan op elke afstand een positieve bewegingsenergie, en het voorwerp kan zich dus onbeperkt ver van de planeet af begeven. De baan is dan ongebonden. We zullen straks ingaan op het grensgeval tussen gebonden en ongebonden.

2.3.3 Energieniveaus van atomen en het uitzenden van licht

Zoals gezegd zijn de situaties voor de zwaartekracht en de elektrische kracht analoog. Toch blijkt dat er op microscopische schaal ook verschillen zijn. Op de schaal van de afmetingen van atomen, dat is 10^{-10} meter, is de Newtonse mechanica niet meer geldig. We moeten dan de quantummechanica toepassen, waarin de 'klassieke' begrippen als krachten en de bewegingsvergelijking (2.1) niet meer geldig zijn. Het energiebegrip blijft echter wel zeer bruikbaar. We stellen ons nog steeds voor dat elektronen om atoomkernen bewegen en al dan niet aan die kernen gebonden zijn. Het blijkt dat elektronen niet zo maar met elke willekeurige negatieve energie in een gebonden baan kunnen bewegen, er zijn maar bepaalde energiewaarden toegestaan. We zeggen dan dat de energie gequantiseerd is. Elektronen kunnen wel tussen die energieniveaus op en neer springen, maar het energieverschil (ΔE) dat tussen het begin- en het eindniveau zit moet wegens de wet van behoud van energie wel ergens blijven. Die energie kan aan andere of van andere elektronen of kernen worden overgedragen of verkregen, maar meestal wordt die energie in de vorm van licht uitgezonden of geabsorbeerd. Dat energiepakketje licht noemen we een foton. De energie van het foton bepaalt de golflengte (λ) en frequentie (f) van het licht en dus de kleur (immers, $f = c/\lambda$). De toegestane energieniveaus zijn niet voor alle atomen en moleculen hetzelfde, dus de kleuren licht die ze uitzenden of absorberen zijn ook verschillend. De relatie tussen de frequentie/ golflengte van het uitgezonden licht en het energie verschil tussen de atomaire niveaus is $\Delta E = hf = hc/\lambda$ waarbij h de befaamde constante van Planck is. Je kunt die verschillen goed zien als je het licht met behulp van een prisma of tralie in de kleuren van de regenboog ontleedt in een spectrum. Iedere atooomsoort heeft zijn eigen karakteristieke soectrum, een soort “streepjescode”. Het licht dat wij van een voorwerp opvangen bevat dus belangrijke informatie over de materie die zich aan de oppervlakte van dat object bevindt, ook als dat object vele honderden lichtjaren van ons verwijderd is! We gaan hier niet verder in op de theorie, maar tijdens deze masterclass zullen we de opsplitsing van licht in een spectrum demonstreren.

2.4 Toepassingen van het begrip ontsnappingssnelheid

We zagen in formule (2.14) dat voor een vallend voorwerp waarop alleen de zwaartekracht werkt, de totale energie, dus de som van de bewegingsenergie en de potentiële energie van het voorwerp, constant is. De ontsnappingssnelheid is de minimum beginsnelheid die je een voorwerp moet geven om aan het grotere object te ontsnappen. Je geeft het voorwerp dat zich in eerste instantie op afstand r bevindt, een bepaalde beginsnelheid en dus een bepaalde bewegingsenergie. Op die afstand heeft het ook een bepaalde potentiële energie. Als het voorwerp zich verwijderd wordt hij door de aantrekkende zwaartekracht afgeremd en wordt zijn bewegingsenergie omgezet in potentiële energie. In het grensgeval van net ontsnappen is er in het oneindige geen snelheid meer, precies alle bewegingsenergie is omgezet in potentiële energie. In het oneindige is de potentiële energie nul, dus ook de totale energie is nul. Maar die energie was behouden, dus bij vertrek was de totale energie ook nul.

Opgave 18 Bereken nu aan de hand van formule (2.14) de ontsnappingssnelheid vonts voor een voorwerp met massa m dat je wegschiet vanaf een afstand r die groter is dan de straal R van een bolvormig object met massa M.
(Antwoord: $v_{ont} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$, merk op dat $v_{ont} = \sqrt{2}v_c$ en dat de ontsnappingssnelheid niet van m afhangt.)

Opgave 19 Bereken nu met het resultaat van opgave 5 en de gegevens uit opgave 1 de ontsnappingssnelheid vanaf het aardoppervlak.
(Antwoord: $v_{ont} = 11\ km\ s^{-2}$)

We gaan nu het begrip ontsnappingssnelheid toepassen op enige andere situaties in het heelal.

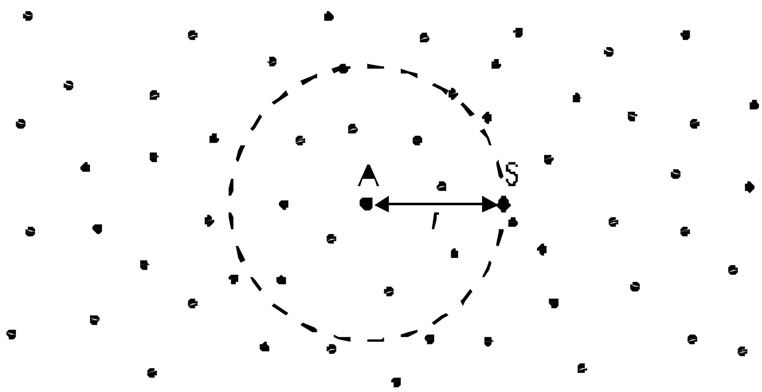
2.4.1 Het zwarte gat

Een zwart gat is simpel gezegd een object waarvan de zwaartekracht zo groot is dat zelfs licht er niet meer aan kan ontsnappen. Omdat niets sneller kan gaan dan het licht, betekent dat niet alleen dat licht wat in dat gebied uitgezonden wordt niet naar buiten kan, maar ook dat er echt helemaal niets naar buiten kan komen. Anders gezegd: een zwart gat is een gebied waarbinnen de ontsnappingssnelheid groter is dan de lichtsnelheid. Ook licht en voorwerpen die van buiten in het zwarte gat vallen komen er niet meer uit. Je snapt nu dus hoe een zwart gat aan zijn naam komt: dingen die geen licht uitzenden of reflecteren zijn zwart. Een zwart gat is het zwartste wat je je maar voor kunt stellen. De grens van het gebied van waaruit niets meer kan ontsnappen, dat wil zeggen de straal van dat bolvormige gebied, wordt horizon of Schwarzschild straal genoemd. Op die afstand van het middelpunt van het zwarte gat is de ontsnappingssnelheid precies gelijk aan de lichtsnelheid.

Opgave 20 Bereken de Schwarzschild straal voor een zwart gat met de massa van de aarde, de lichtsnelheid is $c = 3.10^8 m\ s^{-1}$.
(Antwoord: $R_s = 9.10^{-3}$m $\sim$ 1cm)

2.4.2 De kritische dichtheid van het heelal

Het heelal zet uit, zodat de gemiddelde afstand tussen de sterren(stelsels) met het verstrijken van de tijd toeneemt. Dat betekent automatisch dat de sterren vroeger dichter op elkaar hebben gestaan en als je maar ver genoeg terug gaat in de tijd nadert die afstand naar nul. We redeneren op deze manier natuurlijk wel terug naar tijdstippen waarop er nog helemaal geen sterren waren, maar we zullen het verleden even laten voor wat het is en kijken naar de toekomst. Het heelal expandeert dus, maar de altijd aantrekkende gravitatiekrachten tussen de sterren remmen deze expansie af. Het is dan de vraag of deze expansie altijd door blijft gaan, we noemen het heelal dan open, of dat de zwaartekracht het wint. De heelal zet dan op een gegeven moment niet meer uit, maar gaat krimpen zodat de sterren weer dichter bij elkaar komen te staan. Als dit het geval is noemen we het heelal gesloten. In welke situatie wij ons bevinden wordt onder andere bepaald door de gemiddelde massadichtheid in ons heelal. De dichtheid in het grensgeval dat het heelal net niet open en net niet gesloten is, wordt de kritische dichtheid genoemd. In dat geval wordt de expansie van het heelal pas na een oneindige tijd tot staan gebracht. Dat lijkt een beetje op wat we bij het begrip ontsnappingssnelheid hadden, dat was die snelheid waarmee we een voorwerp weg moesten schieten om net tot in het oneindige aan een ster of planeet te kunnen ontsnappen en waarbij het voorwerp in het oneindige precies tot stilstand werd gebracht.



Figuur 2.9: *De verdeling van sterren in een gebied rond de aarde.*

Bij het uitdijen van het heelal blijken alle afstanden met dezelfde factor opgeschaald te worden. Je kunt de sterren vergelijken met de krenten in een krentenbrood dat uitzet tijdens het rijzen. Een ver weg gelegen ster of sterrenstelsel beweegt zich dan van ons af met een snelheid v die recht evenredig is met zijn afstand r tot de aarde. Dat is de inhoud van de eerder genoemde wet van Hubble:

$$v = v(r) = H \cdot r \qquad \text{(De wet van Hubble)} \tag{2.16}$$

De evenredigheidsconstante H wordt de Hubble parameter genoemd. Deze Hubble parameter is geen constante, want hij hangt van de tijd af omdat de expansie afgeremd wordt. Het leuke is nu dat deze formule niet alleen geldig is gezien vanuit de aarde, maar vanuit alle punten in het heelal omdat het heelal geen middelpunt heeft, d.w.z. dat we aannemen dat het heelal homogeen is. Hetzelfde zou gelden voor alle krenten in een oneindig groot krentenbrood dat uniform uitzet (rijst), je kunt dan geen speciale krent vinden. De aarde is dus geen bijzonder punt, maar gelijkwaardig aan alle andere.

We gaan nu de kritische dichtheid bepalen. Dat doen we door een gelijkmatige verdeling van sterren in het heelal te nemen, voorgesteld door de verzameling stippen in het onderstaande plaatje. Stel dat er gemiddeld N sterren per volume-eenheid zijn met een gemiddelde massa van m per stuk, dan is de gemiddelde dichtheid $\bar{\rho} = N/m$. We doen nu even alsof de aarde in het punt A het middelpunt van heelal is, waarvandaan alle sterren proberen te ontsnappen. Het blijkt nu, dat de zwaartekracht een bijzondere eigenschap heeft, namelijk, dat we voor de zwaartekracht die een ster S op afstand r van het middelpunt A voelt alleen de sterren met een afstand kleiner dan r tot het middelpunt hoeven te beschouwen. Je kunt aantonen dat de krachten die de sterren buiten de bol met deze straal op S uitoefenen elkaar opheffen. Tevens mogen we de massa van de sterren binnen deze bol net als bij de aarde in het middelpunt geconcentreerd denken en de gravitatiewet van Newton, formule (2.5), gebruiken. Dat betekent dat de formule voor de ontsnappingssnelheid die we afgeleid hebben, ook hier geldig is.

Het volume van een bol met straal r is:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{2.17}$$

De massa binnen die bol is dan ook een functie van de straal, namelijk het volume maal de dichtheid:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho} r^3 \tag{2.18}$$

De ontsnappingssnelheid voor de ster S op deze afstand r is:

$$v_{ont}(r) = \sqrt{\frac{2GM(r)}{r}} \tag{2.19}$$

Hierin kunnen we dan de bovenstaande massa invullen. De zwaartekracht van de sterren binnen de bol met straal r remt dus de snelheid van S af. De gemiddelde dichtheid van het heelal is kritisch als de snelheid van deze ster S in het oneindige precies tot nul teruggebracht is. Merk op dat we r vrij mochten kiezen, dus we kunnen in principe zo voor alle sterren een kritische dichtheid van het heelal bepalen. Deze zou voor elke ster verschillend kunnen zijn, maar het interessante is nu juist dat deze kitische dichtheid niet van de keuze van r afhangt! De vraag of het heelal open of gesloten is, hangt dus eigenlijk af van de uitkomst van een nauwkeurige experimentele bepaling van de gemiddelde dichtheid van het heelal. Vooralsnog wijzen de waarnemingen in de richting van een open heelal dat tot in het oneindige zal uitdijen, maar er is nog ruimte voor belangrijke veranderingen niet in de laatste plaats omdat er het merendeel van de energiedichtheid in het heelal wel eens voor rekening zou kunnen komen van de zogenaamde *donkere materie* die geen licht uitzendt maar wel aan de zwaartekracht onderhevig is.

Opgave 21 Bereken nu deze kritische dichtheid $\bar{\rho}_{kr}$, gebruik hierbij de wet van Hubble: formule (2.16).
(Antwoord: $\bar{\rho}_{kr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$, we zien dat hierin r niet meer voorkomt dus het maakt niet uit welke ster je neemt voor de berekening.)

2.5 Een laatste opmerking

Bij de masterclass zelf hebben we eigenlijk niet echt met de in deze aantekeninge gebruikte formules gewerkt, zoals je weet. Toch hopen we dat deze aantekeningen je de mogelijkheid hebben gegeven, om zelf wat berekeningen uit te voeren, ook al was dat misschien niet eenvoudig. Als je na het volgen van deze masterclass meer te weten wil komen over het ontstaan en de evolutie van het heelal raden we je aan om één of meer van de onderstaande boeken te raadplegen, die gaan dieper op de stof in gaan en geven een hoop achtergrondinformatie. Als je er dan nog meer over wilt weten of er van begrijpen dan is een studie natuur- of sterrenkunde iets wat je zeker moet overwegen!

Bijlage A

Eenheden en constantes

Naam	Afkorting	Omrekening
boogseconde	$''$	$\frac{1}{3600}^{\circ} \approx 0.28 \times 10^{-3}$ graad
radiaal		$\frac{360^{\circ}}{2\pi} \approx 57.3^{\circ}$
parsec	pc	30.86×10^{12} km
		$= 3.262$ ly
lichtjaar	ly	9.46×10^{12} km
		$= 0.307$ pc
		$= 63242$ AE
astronomische eenheid	AE	1.496×10^{8} km
		$= 499$ lichtseconden
aardstraal (equator)	$R_{\oplus}$	6378 km
aardstraal (pool)		6357 km
massa aarde	$M_{\oplus}$	5.97×10^{24} kg
valversnelling op aarde	g	9.81 $\mathrm{m/s^2}$
lichtsnelheid	c	299792.458 km/s (exact)
gravitatieconstante	G	6.67×10^{-11} $\mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$
electrische krachtsconst.	f	8.99×10^{9} $\mathrm{N\ C^{-2}\ m^2}$
constante van Hubble	H	$60 \ldots 80\ \frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}}$
		$= 18 \ldots 25\ \frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mly}}$
		$= \frac{1}{16} \ldots \frac{1}{12}\ \mathrm{Gyr^{-1}}$
lichtkracht zon	$L_{\odot}$	3.846×10^{26} W
massa zon	$M_{\odot}$	1.99×10^{30} kg

Bijlage B

Interessante literatuur en webpagina's

- **Literatuurlijst**

  – S. Weinberg, *De eerste drie minuten, Nieuwe inzichten over het ontstaan van het heelal*, Natuur & Techniek, Maastricht 1983, ISBN 90-70107-32-2.

  – R. Kerrod (red), *Speurtocht door het heelal - Sterrenkunde en Ruimteonderzoek*, Uitgeversmaatschappij Elsevier, Amsterdam 1984, ISBN 90-10-051102.

  – G. Schilling, *Hubble's kijk op de kosmos*, Natuur & Techniek, Maastricht 1996, ISBN 90-73035-4-30.

- **Sterrenkunde/kosmologie:**

  – NASA, Space Science Homepage:
  `http://spacescience.nasa.gov/`

  – NASA, Structure and Evolution of the Universe:
  `http://universe.gsfc.nasa.gov/`

  – Hubble Space Telescope:
  `http://www.stsci.edu/`

- **Andere pagina's:**

- De Nobel organisatie. Hier vind je alles over de nobelprijs, zoals de winnaars etc.:
  `http://www.nobel.se/`
- History of Mathematics. Onder andere levensbeschrijvingen van wiskundigen maar ook bekende natuurkundigen:
  `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/index.html`
- CERN Publiekspagina:
  `http://www.cern.ch/Public/`
- The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty. Over het S.I. en de meest recente waardes voor natuurconstantes:
  `http://physics.nist.gov/cuu/index.html`
- Particle Data Group. Hier kun je een enorme hoeveelheid informatie over alle elementaire deeltjes vinden:
  `http://www.cern.ch/pdg/`