

Eenheidsworst en de maat aller dingen

Sander Bais

Instituut voor Theoretische Fysica
Universiteit van Amsterdam

Zonde eigenlijk dat we in de wetenschap afscheid hebben genomen van de prozaïsche huis-, tuin- en keukenmaten zoals de *duim*, de *el*, of de *voet*, het *mespuntje*, het *toefje*, het *wolkje*, de *pint*, de *krat*, de *uren-gaans* en de *paardekracht*. Natuurlijk, machten (van tien bijvoorbeeld) genieten praktisch gezien de voorkeur. Hoewel, de ‘tijd’ ligt al meteen dwars, daar wordt de maatvoering gedictieerd door wat er in ons zonnestelsel allemaal aan periodieks gaande is. Hoeveel seconden ook al weer in een (schrikkel)jaar? En omdat wij mensen een lengte van ongeveer van 1 meter, een hartslag van ongeveer van 1 seconde en een gewicht van enige kilo’s hebben, lag het voor de hand dat zoiets als het SI- of MKS-stelsel de maat aller dingen zou worden. Het kleurloze ABN voor de quantitative communicatie. Eenheidsworst. Gelukkig zijn er nog steeds hardnekkige dialecten in omloop; als iemand een ‘troy ounce’ Goudse kaas bestelt, hebben we te doen met een Engelse juwelier op huwelijksreis in A’dam. En gekken die beweren dat ze maar 10^{-13} parsec of 10^{13} ångstrom van hun werk wonen, hebben kennelijk ook moeite om hun afkomst te verloochenen. De velen onder u die werkzaam zijn in de wetenschappelijke documentvervaardigingsindustrie, kan ik melden dat de *tex* = 10^{-6} kg/m ook zeer geliefd is in de textielvezel- en garenbranche. Over drankspecifieke inhoudsmaten kunnen vele bijbelevaantent volgeschreven worden, waarbij de *Histoire Universelle* van Cantu in het niet valt. Maatvoering, als maat voor beroepsdeformatie enerzijds, als jargon, signatuur of visitekaartje anderzijds.

Het kuise SI denken suggereert dat wetenschappers de rationele norm boven alles stellen. Althans willen stellen, want juist in onze gerationaliseerde branche barst het van de irrationele alternatieven, meestal afgeleide eenheden in de vorm van onuitwisbare eerbewijzen aan hen die ons voorgingen en misschien dus – met vooruitwerkende

kracht – aan onszelf. We zijn immers nog steeds druk in de weer met de *Newton, Joule, Pascal, Coulomb, Watt, Farad, Angström, Tesla, Gray, Henry, Fermi, Ohm, Siemens, Weber, Hertz, Oersted, Becquerel, Rydberg, Curie, Fahrenheit, Röntgen, Stokes, Millikan, Sievert* en wat dies meer zij. Nou had dit natuurlijk allemaal wel met kleine letters geschreven moeten worden om toch vooral niet de indruk te wekken dat het hier om personen gaat, immers een kracht van 3 Newtons is heel wat anders dan die van 3 newton. Hadden we maar 3 Newtons! Het is net zoals in de betere roman: ‘alle gelijkenis met bestaande of niet meer in leven zijnde personen berusten op zuiver toeval’. Eert uw vader en moeder maar probeer daarbij wel maat te houden. Mensen in ons vak praten graag in hun eigenaardigheden, en als je dan niet meteen weet waarover het gaat levert dat strafpunten op! Zeker nog nooit een magneet in je handen gehad een röntgenfoto gemaakt of je fikken gebrand. Weet je het eigenlijk wel het verschil tussen het kookpunt van water en de rechte hoek! Nederlanders zijn dun gezaaid in eenhedenland. Ik wil onze nationale trots in de normatieve sector dan ook niet vergeten, de onbetaalbare ‘Kosten eenheid’ voor geluidsoverlast. Ik stel voor om onze score wat op te veizelen met de Ritzen voor onderwijsvernieling, de megaRaam voor citaties per publikatie en de picoHerkströter voor inzetbaarheid van academici. Ere wie ere toekomt!

Vermeldenswaard is trouwens wel dat er nog steeds nieuwe eenheden worden ingevoerd, gebaseerd op moderne fysieke verschijnselen die zeer makkelijke maar ook zeer nauwkeurige bepalingen toelaten (omdat ze gequantiseerd zijn en direct uit te drukken zijn in ‘universele constanten’). Sinds 1990 is ons vocabulaire verrijkt de Josephson- en de Von Klitzingconstanten – $K_J = 2e/h$ en $R_K = h/e^2$ respectievelijk – als eenheden van flux en van weerstand waaruit de waarden van e en h bepaald worden.

Is er nou niks beters te bedenken? Maar natuurlijk wel:

Alle bisher in Gebrauch genommen physikalischen Maassysteme, auch der sogenannte absolute C.G.S.-System, verdanken ihren Ursprung insofern dem Zusammentreffen zufälliger Umstände, als die Wahl der jedem System zu Grunde liegenden Einheiten nicht nach allgemeinen, notwendig für alle Orte und Zeiten bedeutungsvollen Gesichtspunkten, sondern wesentlich mit Rücksicht auf die speciellen Bedürfnisse unserer irdischen Cultur getroffen hat.

Aldus Max Planck in zijn *Fünfte Mitteilung, ‘Über irreversible Strahlungsvorgänge’*, aan de *Preussische Akademie* in 1898, waarin hij omstandig uiteenzet dat er inderdaad zoiets als een ‘natuurlijk eenhedenstelsel’ bestaat dat qua universaliteit alle anderen overstijgt.

Plancks natuurlijke eenheden, kunnen middels eenvoudige dimensionele argumenten allemaal gebrouwen worden uit de dimensievolle universele natuurconstanten, zoals de lichtsnelheid c , zijn eigen constante van Planck h (door hem in zijn artikel overigens nog heel braaf b genoemd) en Newton’s Gravitatieconstante G_N . De Planck-eenheid van lengte is dan

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} = 4.05 \times 10^{-33} \text{ cm}$$

de Planck-eenheid van massa,

$$m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 5.46 \times 10^{-5} \text{ gr}$$

en de Planck-eenheid van tijd,

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} = 1.35 \times 10^{-43} \text{ s.}$$

daar natuurlijk ook nog de Planck-temperatuur aan toevoegen waarvoor we de Boltzman-konstante k van stal moeten halen:

$$T_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{k^2 G_N}} = 3.55 \times 10^{33} \text{ K}$$

Tamelijk goddelijke eenheden, maar ik vrees dat de praktiserende ingenieur er niet onverdeeld enthousiast over zal zijn, tenzij hij in de sector heelalbouw werkzaam is (en dat zijn er meer dan je zou denken). Tot zijn schrik zou hij bemerken dat een kleine oefening in de door hem zo geliefde dimensionele analyse, hem tot de conclusie zou brengen dat de afmeting van het heelal typisch van de orde van l_p zou moeten zijn. Voorwaar, we leven in een wonder. In feite markeren deze eenheden op een fundamenteel niveau de grenzen van ons begrip, de klassieke notie van ruimte heeft fysisch gezien geen betekenis op een schaal kleiner dan l_p , over tijden korter dan t_p - die bijvoorbeeld een rol spelen bij vragen over de oerknal - heeft de fysica vooralsnog niets te melden.

Er liggen in deze eenheden enkele interessante relaties besloten. Bijvoorbeeld voor een deeltje met een massa gelijk aan de Planck-massa zijn de Compton-golflengte en de Schwarzschild-straal aan elkaar gelijk:

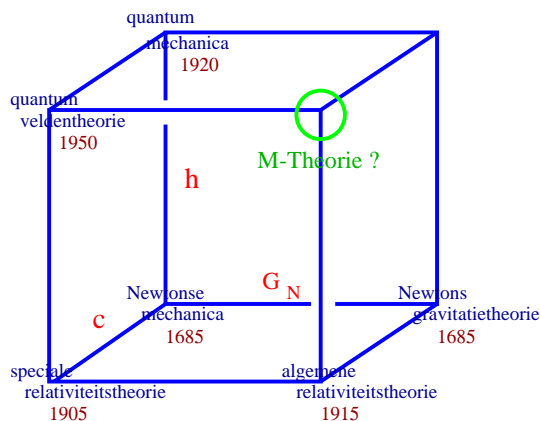
$$\hbar/m_p c = G_N m_p / c^2$$

Dat wil zeggen dat voor zo'n deeltje de Compton-golflengte, welke een maat is voor de fundamentele quantum-onzekerheid in de ruimtelijke uitgebreidheid van het deeltje, van dezelfde orde is als de 'gravitationele onzekerheid'; het feit dat door de sterke zwaartekracht kennis over wat zich binnen de Schwarzschild-straal (de horizon) afspeelt voor 'buitenstaanders' niet te verkrijgen is.

Bij zeer massieve objecten wordt de Compton golflengte van dat object verwaarloosbaar klein. Voor een 'puntvormige' aarde bijvoorbeeld is $\lambda_a = \hbar/m_a c \simeq 10^{-65} \text{ cm}$, terwijl zijn Schwarzschild straal toch altijd nog een respectabele $R_a = 0.5 \text{ cm}$ is. En omdat beide afstandsschalen zeer klein zijn t.o.v. de daadwerkelijke

straal van de aarde heeft het zolang geduurd voordat we de algemene relativiteitstheorie (ART) en quantummechanica (QM) konden ontdekken. Voor het electron is de situatie omgekeerd, $\lambda_e = \hbar/m_e c \simeq 10^{-11} \text{ cm}$ (inderdaad, het golfkarakter, d.w.z. het niet gelokaliseerd zijn wordt manifest op de atomaire schaal) terwijl nu de Schwarzschild-straal onvoorstelbaar klein wordt $R_e = 2G_N m_e/c^2 \simeq 10^{-57} \text{ m}$. Hoe dan ook, bij energieën die corresponderen met de Plankmassa (via $E = mc^2$) komt men in een regime waar zowel de QM als de ART in acht genomen dienen te worden. Hier betreden we het fysische domein van de quantumzwaartekracht en aangezien quantisatie van Einsteins theorie stevast tot onoverkomelijke problemen geleid heeft, weet niemand precies waar we het over hebben. Conventionele wijsheid leert dat deeltjes zwaarder dan m_p zwarte gaatjes zijn, of anders gezegd, dat, als je het vacuum op een afstandsschaal van de l_p bekijkt, Heisenbergs onzekerheidsrelatie zegt dat de energie van quantumfluctuaties in het vacuum corresponderen met m_p en dat daarom de quantumruimte op die schaal een soort *zwarte-gatenkaas* is die ook wel *space time foam* genoemd wordt. Een fatale instabiliteit van de ruimte-tijd of - meer waarschijnlijk - in ons begrip ervan. De confrontatie van quantumtheorie met ART levert zeer robuuste tegenstrijdigheden op die de kiem kunnen zijn van een nieuwe fundamentele theorie, zoals dat zovaak eerder in de fysica het geval is geweest.

Dit aspect van de Planck-eenheden kunnen we ook op een andere, meer suggestieve manier weergeven, waarbij de drie dimensievolle fundamentele konstanten, te weten Newtons gravitatieconstante, de lichtsnelheid en de constante van Planck, elk het geldigheidsgebied van de fundamentele theorieën in de natuurkunde markeren zoals in onderstaande ‘magische kubus’ staat aangegeven.



Figuur 1: *Universele constanten en het geldigheidsgebied van diverse fundamentele theorieën.*

De Planck-kubus heeft ribben gelijk aan G_N , \hbar en c . De oorsprong stelt een wereld voor waarin $G_N = 0$, $\hbar = 0$ en $v/c = 0$ ($c = \infty$), en zoals aangegeven kunnen we met de hoekpunten de verschillende fundamentele theorieën associëren. Newton leeft op de achterste ribbe, de twee revoluties van het begin van deze eeuw – speci-

ale relativiteit en quantummechanica – hebben twee nieuwe dimensies toegevoegd, die elk een begrenzing van het Newtonse wereldbeeld markeren. De combinatie van speciale relativiteit met gravitatie bracht ons de ART als de ultieme consequentie van de equivalentie van versnelling en gravitatievelden voor bewegende waarnemers, uitmondend in het inzicht dat gravitatie een manifestatie is van een dynamische, gekromde ruimtetijd. De combinatie van speciale relativiteit met de quantummechanica bracht de quantumveldentheorie d.w.z. de quantummechanische beschrijving van elementaire deeltjes en de niet-gravitatiekrachten daartussen, die culmineerde in het succesvolle standaardmodel van quarks en leptonen. In deze beschrijving is het klassieke verschil tussen deeltjes en krachten verdwenen; beiden worden door quantumvelden beschreven welks quanta deeltjes zijn zoals bijvoorbeeld het electron of foton.

Planck's magische kubus suggereert dat het conflict tussen beide theorieën opgeheven moet worden door een theorie die een nieuw fundamenteel verband legt tussen materie en ruimte-tijd als twee verschillende manifestaties van één onderliggende quantumstructuur. Zoiets lijkt zich inderdaad te voltrekken in de *snaar- of M-theorie*, waar inderdaad zeer verrassende verbanden ontdekt zijn tussen supersymmetrische versies van de ART en quantumveldentheorie. Ook zijn er in de snaartheorie situaties waar het energiespectrum bijvoorbeeld invariant is onder een transformatie waarbij de karakteristieke afmeting van de ruimte R naar $1/R$ gaat, hetgeen suggereert dat er fysisch gezien inderdaad een minimale lengte (n.l. $R = 1 [l_P]$) zou kunnen bestaan. Tenslotte geven de snaren de indruk dat ruimte en tijd eigenlijk 'emergente' verschijnselen zijn, een manifestatie van het collectieve gedrag van een onderliggende quantum dynamica, zoals de notie van temperatuur ontstaat in een gas van moleculen.

En wat betekent dat punt rechtsachterboven? Niet-relativistische quantumgravitatie, daar hoort in ieder geval ook de quantummechanische behandeling van het zonnestelsel thuis. Een bierviltjesberekening leert ons dat wij de electronmassa m_e moeten vervangen door m_a dat geeft een factor $m_a/m_e \simeq 10^{55}$ en de fijnstructuurconstante $\alpha \equiv e^2/4\pi\hbar c \simeq 1/137$ moeten vervangen door de dimensieloze verhouding $\gamma = \frac{m_p^2}{m_a M_z} \simeq 10^{-70}$. Uit vergelijking van de afstand tussen aarde en zon ($\sim 10^{11} m$) met de gravitationele Bohrstraal vinden we dan dat de aarde zich in een hoogaangeslagen (gelocaliseerde) toestand bevindt, waarbij het hoofdquantumgetal n van de orde 10^{75} is. Vandaar al die drukte. Ondanks alles een leuk vak die fysica, daar spreken zelfs eenheden tot de verbeelding.