

# De ijktheorie van een vallende kat

Bernard Kaas (bckaas@science.uva.nl)

Boaz vd Plas (bvdplas@science.uva.nl)

Vincent Stiekema (vstiekma@science.uva.nl)

Michel Taal (mrtaal@science.uva.nl)

7 juni 2000



Begeleiders: Prof.dr.ir F.A. Bais en Prof.dr.ir A.M.M. Pruisken

## Samenvatting

Dit onderzoeksproject heeft tot doel om een theoretische beschrijving en verklaring te geven van de val van een kat, waarbij deze zoals bekend op zijn pootjes terecht komt. We beginnen met het ophalen van enige begrippen uit de klassieke mechanica van vaste lichamen zoals het traagheidsmoment en zijn transformatie-eigenschappen. We zullen omstandig gebruik maken van groepentheorie (met name de rotatiegroepen  $SO_3$  en  $SU_2$  komen aan bod). De configuratieruimte van de kat blijkt een zes-dimensionale ruimte die we kunnen splitsen in een ruimte van vormen en een ruimte van orientaties. Deze configuratieruimte heeft aldus de structuur van een vezelbundel. Het dynamisch model van de kat beschrijft de geodetische beweging van een deeltje op de configuratieruimte. De conditie van behoud van het impulsmoment van de kat wordt vervolgens geïmplementeerd alsmede de "no-twist" restrictie. Tenslotte zullen mogelijke bewegingen van de vallende kat behandeld worden met totaal impulsmoment gelijk aan nul en wordt een vergelijking met de val van een realistische kat gemaakt. De conclusie is dat ons model een aantal kwalitatieve aspecten van de val goed beschrijft en verklaard, maar dat voor de beschrijving van een echte kat een uitgebreider model noodzakelijk is. Dit vergt verder onderzoek.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>De traagheidstensor van een star lichaam</b>	<b>4</b>
2.1	Lagrangiaan van de vrije rotator m.b.v. de traagheidstensor . . .	4
2.2	Eulerhoeken . . . . .	5
2.3	Lagrangiaan van een vrije rotator uitgedrukt in Eulerhoeken . . .	6
2.4	Eenvoudig model voor de kat . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Het verband tussen vectorrekening in <math>R^3</math> en de rotatiegroepen <math>SO_3</math> en <math>SU_2</math></b>	<b>8</b>
3.1	Vectoren in $R^3$ en rotaties beschreven m.b.v. $SO_3$ . . . . .	8
3.2	Vectoren en rotaties in $R^3$ beschreven m.b.v. $SU_2$ . . . . .	8
<b>4</b>	<b>De beweging van een vrij deeltje op <math>S^2</math> en <math>S^3</math></b>	<b>10</b>
4.1	Metriek en geodetische Lagrangiaan op $S^2$ . . . . .	10
4.2	Metriek en geodetische Lagrangiaan op $S^3$ . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Geladen deeltje op <math>S^2</math> in een monopool veld</b>	<b>15</b>
5.1	Hamiltoniaan van elektrisch geladen deeltje in een magneetveld. .	15
5.2	De vectorpotentiaal van een magnetische monopool . . . . .	16
<b>6</b>	<b>De kat</b>	<b>16</b>
6.1	De algebra van de kat . . . . .	16
6.2	Het behoud van impulsmoment . . . . .	20
6.3	De “no-twist” conditie . . . . .	22
6.4	De kinematica van het regelprobleem . . . . .	22
6.5	Oplossingen van de bewegingsvergelijkingen . . . . .	23
6.5.1	Een simpele oplossing . . . . .	23
6.5.2	Natuurlijker oplossing . . . . .	24
6.5.3	De val van een echte kat . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Discussie en Conclusies</b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>Appendix: Lie algebra’s en generatoren</b>	<b>27</b>

# 1 Inleiding

Iedereen weet dat katten altijd met hun poten op de grond landen. Maar hoe doen katten dit? Deze vraag proberen we te beantwoorden in dit verslag door een theoretisch model op te stellen en te vergelijken met de werkelijkheid. We zullen wat gereedschap opbouwen waarvan het nut misschien niet meteen duidelijk is, maar gaandeweg zal dit duidelijk gemaakt worden.

Voordat we daadwerkelijk beginnen met het model van een kat kijken we naar starre lichamen en zullen we de Lagrangiaan van een vrije rotator opstellen. Vervolgens beschouwen we een eenvoudig model van een kat, dat bestaat uit twee cylinders die de voor- en achterkant van het dier voorstellen, en zullen we het traagheidsmoment van dit cylindersysteem uitrekenen. Daarna zullen we de hieraan gerelateerde geodetische Lagrangianen en Hamiltonianen van een deeltje op een twee- en een driebol opstellen. Ook het verband met een geladen deeltje in het veld van een magnetische monopool wordt uit de doeken gedaan.

Het blijkt dat de modelbeschrijving van de vallende kat een pad beschrijft in een zesdimensionale configuratieruimte  $SO_3 \times SO_3$ . Deze ruimte heeft een vezelbundelstructuur; drie parameters beschrijven de vorm van de kat, terwijl de andere drie (vezel)parameters de ruimtelijke oriëntatie van de kat vastleggen. Dit is een zogenaamd *regelprobleem*; de kat kan zijn vorm (in de vormenruimte) beïnvloeden, waardoor de rotatie verandert (in de rotatieruimte). Behoud van totaal impulsmoment impliceert dat wanneer de kat zijn vorm verandert, dit veranderingen in zijn ruimtelijke oriëntatie tot gevolg kan hebben.

Als hiervan nu de Hamiltoniaan wordt opgesteld en nog een randvoorwaarde (de kat mag zijn rug niet breken) wordt meegenomen, zien we dat deze uiteindelijke Hamiltoniaan goed lijkt op de al eerder behandelde Hamiltonianen. Uiteindelijk kunnen we de valpartij van de kat bekijken en banen beschrijven die het dier in de configuratieruimte aflegt.

## 2 De traagheidstensor van een star lichaam

In dit hoofdstuk zullen we de Lagrangiaan van de vrije rotator bepalen. Hiertoe definiëren we eerst de zogenaamde *Eulerhoeken*, om rotaties te beschrijven in de  $\mathbf{R}^3$ . Ook zullen we een fysisch model van de kat opstellen en de componenten van de traagheidstensor hiervan bepalen.

### 2.1 Lagrangiaan van de vrije rotator m.b.v. de traagheidstensor

Om de bewegingen van een star lichaam te beschrijven, maken we gebruik van de traagheidstensor. We kunnen de Hamiltoniaan van een star lichaam uitdrukken in termen van de traagheidstensor van dit lichaam. De componenten van de traagheidstensor zijn<sup>1</sup>:

$$I_{ij} = \int_V \rho(r) \left\{ \delta_{ij} \sum_k (x^k)^2 - x^i x^j \right\} dV. \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Zie: Marion & Thornton, "Classical dynamics", §11.2.

Er wordt hier geïntegreerd over het volume  $V$  van het lichaam, dat in punt  $r$  dichtheid  $\rho(r)$  heeft. De componenten van het impulsmoment zijn:

$$L_i = I_{ij}\omega^j, \quad (2)$$

en de Lagrangiaan van de vrije rotator (deze is in dit geval dus gelijk aan de kinetische energie):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_{ij}\omega^i\omega^j = \frac{1}{2}\vec{L} \cdot \vec{\omega}. \quad (3)$$

Omdat  $[I_{ij}]$  een symmetrische tensor is, kunnen we onze basis zo kiezen dat deze een diagonaaltensor wordt, met componenten  $I_i$  op de diagonaal. Zo reduceren de vergelijkingen tot:

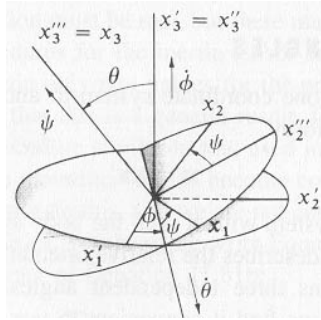
$$L_i = I_i\omega^i, \quad (4)$$

en de Lagrangiaan van de vrije rotator wordt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_i(\omega^i)^2. \quad (5)$$

## 2.2 Eulerhoeken

In figuur 1 zijn rotaties over de zogenaamde *Eulerhoeken*  $(\phi, \theta, \psi)$  afgebeeld. Dit is, naar later zal blijken, een handige keuze om alle mogelijke rotaties in de 3-dimensionale ruimte uit te kunnen voeren. Alle rotatiematrices op  $\mathbf{R}^3$  kunnen



Figuur 1: Eulerhoeken.

nu samengesteld worden uit de volgende drie matrices:

$$\mathbf{\Lambda}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{\Lambda}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{\Lambda}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Een willekeurige rotatiematrix kan geschreven worden als:

$$\mathbf{\Lambda}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{\Lambda}(\psi)\mathbf{\Lambda}(\theta)\mathbf{\Lambda}(\phi). \quad (8)$$

Uit figuur 1 volgt voor de componenten  $\omega^i$  van de hoeksnelheid in het oorspronkelijke stelsel<sup>2</sup>:

$$\omega^1 = \dot{\phi}^1 + \dot{\theta}^1 + \dot{\psi}^1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (9)$$

$$\omega^2 = \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad (10)$$

$$\omega^3 = \dot{\phi}^3 + \dot{\theta}^3 + \dot{\psi}^3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (11)$$

### 2.3 Lagrangiaan van een vrije rotator uitgedrukt in Eulerhoeken

In gevallen van bijzondere symmetrie van het lichaam laat de situatie een verdere vereenvoudiging toe. Dit is bijvoorbeeld het geval bij een cylinder, waarvoor  $I_1 = I_2 = I$ . De Lagrangiaan voor een star lichaam kunnen we in dit geval op de volgende manier in Eulerhoeken uitdrukken:

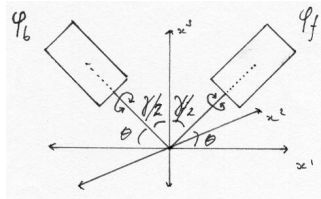
$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} I_i (\omega^i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ I (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_3 (\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

In het speciale geval dat ook nog geldt  $I = I_3$  wordt de Lagrangiaan:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right\}. \quad (13)$$

### 2.4 Eenvoudig model voor de kat

In figuur 2 is een model te zien van een kat. Twee homogene cylinders zijn over een hoek  $\frac{\gamma}{2}$  geroteerd en over een afstand  $l$  getransleerd t.o.v. de oorsprong van het getekende assenstelsel. Zwaartepunten van beide bevinden zich in het  $(x^2, x^3)$  vlak. Deze 'kat' is dus geen star lichaam, maar een deformeerbaar lichaam dat verschillende vormen aan kan nemen. We komen hier nog uitgebreid op terug.



Figuur 2: Fysisch model van een kat.

In deze paragraaf is het doel de  $I_{ij} = \int_V \rho(r) \left\{ \delta_{ij} \sum_k (x^k)^2 - x^i x^j \right\} dV$ , de componenten van de totale traagheidstensor, te berekenen. Hiertoe bekijken we een homogene cylinder (hoogte  $h$ , straal  $R$  en dichtheid  $\rho$ ) in het stelsel met het zwaartepunt als oorsprong en de  $x^3$ -as langs de symmetrie-as. Eerst gaan we

<sup>2</sup>Zie: Marion & Thornton, "Classical dynamics", §11.7.

over op cylindercoördinaten, met jacobiaan  $r$ :

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Nu volgt, met  $M = \pi\rho R^2 h$  de massa van de cylinder:

$$I_{11} = \frac{1}{4}M(R^2 + \frac{1}{3}h^2), \quad (14)$$

$$I_{22} = \frac{1}{4}M(R^2 + \frac{1}{3}h^2), \quad (15)$$

$$I_{33} = \frac{1}{2}M, \quad (16)$$

$$I_{ij} = 0 \text{ als } i \neq j. \quad (17)$$

Dus:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{4}M \begin{pmatrix} (R^2 + \frac{1}{3}h^2) & 0 & 0 \\ 0 & (R^2 + \frac{1}{3}h^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}.$$

We transleren over een afstand  $l$  in de  $x^3$ -richting, de componenten van de traagheidstensor worden dan  $I_{ij} + M(l^2\delta_{ij} - l^i l^j)$ , met  $l^1 = 0$ ,  $l^2 = 0$ ,  $l^3 = l$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &\longrightarrow \frac{1}{4}M \begin{pmatrix} (R^2 + \frac{1}{3}h^2) + 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & (R^2 + \frac{1}{3}h^2) + 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

met:

$$I := \frac{1}{4}M(R^2 + \frac{1}{3}h^2 + 4l^2), \quad I_3 := \frac{1}{2}MR^2.$$

Vervolgens roteren we één cylinder om de  $x^1$ -as, over een hoek  $\frac{\gamma}{2}$  m.b.v. de orthogonale  $(3 \times 3)$ -matrix  $\mathbf{\Lambda}(\theta)$ :

$$\mathbf{\Lambda}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}, \text{ zodat: } \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{\Lambda}(\theta)\mathbf{I}\mathbf{\Lambda}^T(\theta).$$

Dit schrijven we uit:

$$\mathbf{I}(\theta) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta & -I \cos \theta \sin \theta + I_3 \cos \theta \sin \theta \\ 0 & -I \cos \theta \sin \theta + I_3 \cos \theta \sin \theta & I \cos^2 \theta + I_3 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

De andere cylinder roteren we over een hoek  $-\frac{\gamma}{2}$ , zodat:

$$\mathbf{I}(-\theta) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta & I \cos \theta \sin \theta - I_3 \cos \theta \sin \theta \\ 0 & I \cos \theta \sin \theta - I_3 \cos \theta \sin \theta & I \cos^2 \theta + I_3 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Tenslotte berekenen we de traagheidstensor van ons model:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}(\theta) + \mathbf{I}(-\theta) = 2 \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & I \cos^2 \theta + I_3 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

We zien nu dat we in het hier beschouwde coördinatenstelsel<sup>3</sup> voor de totale traagheidstensor  $\mathbf{I}$  weer een diagonaalmatrix krijgen. Dit is een belangrijk voordeel als we in de latere hoofdstukken de beweging van de vallende kat verder willen analyseren.

### 3 Het verband tussen vectorrekening in $R^3$ en de rotatiegroepen $SO_3$ en $SU_2$

In dit hoofdstuk laten we zien hoe we gewone vectorrekening in  $\mathbf{R}^3$  kunnen doen m.b.v. de generatoren van  $SU_2$ . Hiervoor zullen we eerst nog een paragraaf wijden aan de rotatiegroep  $SO_3$ . Wanneer we  $SU_2$  hebben geïntroduceerd, zullen we rotaties gaan beschrijven in  $SU_2$ . Als we dit uitwerken zal blijken dat we op een uitdrukking komen die nagenoeg gelijk is aan de Langrangiaan van een vrij roterend star lichaam.

#### 3.1 Vectoren in $R^3$ en rotaties beschreven m.b.v. $SO_3$

Voor vectoren  $v = v^i e_i$ ,  $w = w^i e_i \in \mathbf{R}^3$  zijn gedefinieerd:

$$\text{het inproduct } v \cdot w := \delta_{ij} v^i w^j, \quad (18)$$

$$\text{het uitproduct } (v \times w)^i := \epsilon_{ijk} v^j w^k. \quad (19)$$

Rotaties worden nu beschreven door de rotatiegroep  $SO_3$  van orthogonale ( $3 \times 3$ )-matrices:  $\{\Lambda | \Lambda^{-1} = \Lambda^t, \det \Lambda = 1\}$ . Een vector transformeert dus als volgt:  $v' = \Lambda v$ , met  $\Lambda \in SO_3$ . We kunnen een rotatie over een hoek  $\phi$  om de  $x^i$ -as ook schrijven als  $\Lambda_i(\phi) = e^{\phi T_i}$ , met  $T_i$  de ( $3 \times 3$ )-generatoren van de rotatiegroep. Deze generatoren voldoen aan de commutatierelaties  $[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} T_k$ , welke de Lie-algebra definiëren van  $SO_3$ <sup>4</sup>.

#### 3.2 Vectoren en rotaties in $R^3$ beschreven m.b.v. $SU_2$

We kunnen een element uit  $\mathbf{R}^3$  echter ook representeren als  $v = v^i \tau_i$ , met  $\tau_i$  de *Pauli-matrices*:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

met de bijzondere eigenschappen:  $Tr(\tau_i \tau_j) = 2\delta_{ij}$  en  $[\tau_j, \tau_k] = 2i\epsilon_{ijk} \tau_i$ . Vervolgens definiëren we weer:

$$\text{het inproduct } v \cdot w := \frac{1}{2} Tr(vw) = \frac{1}{2} v^i w^j Tr(\tau_i \tau_j) = \delta_{ij} v^i w^j, \quad (20)$$

$$\text{het uitproduct } v \times w := -\frac{i}{2} [v, w] = -\frac{i}{2} v^j w^k [\tau_j, \tau_k] = v^j w^k \epsilon_{ijk} \tau_i. \quad (21)$$

<sup>3</sup>Ook wel het coördinatenstelsel van Kane en Scher genoemd

<sup>4</sup>Zie ook Appendix A.



Als we  $\frac{i}{2}\tau_i$  identificeren met  $T_i$ , dan zien we dat de Lie-algebra van  $SU_2$  isomorf is met die van  $SO_3$ .

Nu kunnen we een rotatie van een vector  $v$  als volgt beschrijven:

$$v' = \Omega v \Omega^{-1} = \Omega v \Omega^\dagger, \quad (22)$$

$$\Omega \in SU_2 = \{\Omega | \Omega^{-1} = \Omega^\dagger, \det(\Omega) = 1\}. \quad (23)$$

$SU_2$  is de deelverzameling van  $U_2$  die unitaire  $(2 \times 2)$ -matrices bevat met *determinant 1*. Een element  $U \in U_2$  kunnen we schrijven als:  $U = a^0 \mathbf{1} + ia^i \tau_i$ , dus:

$$U = \begin{pmatrix} a^0 + ia^3 & a^2 + ia^1 \\ -(a^2 - ia^1) & a^0 - ia^3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Beperken we ons tot  $SU_2$ , dan geldt:

$$\det(U) = (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 1. \quad (25)$$

We kunnen de getallen  $a^i \in \mathbf{R}$  dus als punten op de eenheidsbol  $S^3$  opvatten<sup>5</sup>. Zo is er voor elk element van  $SU_2$  precies één punt op de bol, en vice versa. We concluderen:  $SU_2 \cong S^3$ . We kunnen een willekeurig element van  $SU_2$  echter ook als volgt parametriseren<sup>6</sup>:

$$\Omega = e^{\frac{i}{2}\alpha^i \tau_i} = \mathbf{1} \cos \left| \frac{\alpha}{2} \right| + i \frac{\alpha^i}{|\alpha|} \tau_i \sin \left| \frac{\alpha}{2} \right|. \quad (26)$$

Net zoals in §2.2 gebruiken we weer de Eulerhoeken om rotaties uit te voeren. Analoog aan (8) schrijven we voor een rotatie:

$$g(\phi, \theta, \psi) = e^{\frac{i}{2}\phi\tau_3} e^{\frac{i}{2}\theta\tau_1} e^{\frac{i}{2}\psi\tau_3} = g_1 g_2 g_3. \quad (27)$$

Elke willekeurige rotatie kan op deze wijze beschreven worden, m.a.w. we kunnen  $\phi$ ,  $\theta$  en  $\psi$  opvatten als coördinaten op de groep  $SU_2$ . Vervolgens berekenen we:

$$\begin{aligned} g^{-1} dg &= g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1} (dg_1 g_2 g_3 + g_1 dg_2 g_3 + g_1 g_2 dg_3) \\ &= g_3^{-1} g_2^{-1} (g_1^{-1} dg_1) g_2 g_3 + g_3^{-1} (g_2^{-1} dg_2) g_3 + g_3^{-1} dg_3 \\ &= g_3^{-1} g_2^{-1} \left( \frac{i}{2} \tau_3 d\phi \right) g_2 g_3 + g_3^{-1} \left( \frac{i}{2} \tau_1 d\theta \right) g_3 + \frac{i}{2} \tau_3 d\psi \\ &= \frac{i}{2} d\phi g_3^{-1} g_2^{-1} (\tau_3) g_2 g_3 + \frac{i}{2} d\theta g_3^{-1} (\tau_1) g_3 + \frac{i}{2} \tau_3 d\psi \\ &= \frac{i}{2} (\tau_1 \sin \theta \sin \psi + \tau_2 \sin \theta \cos \psi + \tau_3 \cos \theta) d\phi \\ &+ \frac{i}{2} (\tau_1 \cos \psi - \tau_2 \sin \psi) d\theta + \frac{i}{2} \tau_3 d\psi \\ &= \frac{i}{2} \{ \tau_1 (\sin \theta \sin \psi d\phi + \cos \psi d\theta) + \tau_2 (\sin \theta \cos \psi d\phi - \sin \psi d\theta) \\ &+ \tau_3 (\cos \theta d\phi + d\psi) \}. \end{aligned} \quad (28)$$

<sup>5</sup> $S^n$  is de eenheids  $n$ -bol in  $\mathbf{R}^{n+1}$ . In het algemeen is dit een verzameling punten  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , die voldoet aan  $\delta_{ij} x^i x^j = 1$ .

<sup>6</sup>Zie ook Appendix A.

Deze grootheid  $g^{-1}dg$  is, zoals we zien, een Lie-algebra waardige eenvorm op de groep  $SU_2$  :  $g^{-1}dg = ie_i^a(x^\nu)T_a dx^i$ , ( $x^\nu = \phi, \theta, \psi$ ). Deze zogenaamde Maurer-Cartan vorm is gedefiniëerd voor alle Lie groepen. Vergelijken we resultaat (28) met (9), (10) en (11), dan herkennen we er de componenten van de hoeksnelheid  $\omega^i$  in:

$$g^{-1}dg = \frac{i}{2}(\omega^1\tau_1 + \omega^2\tau_2 + \omega^3\tau_3)dt = \frac{i}{2}\omega^i\tau_i dt. \quad (29)$$

Verder zijn we geïnteresseerd in de norm van de matrix  $g^{-1}dg$ . Deze berekenen we met het zojuist gedefiniëerde inproduct  $v \cdot w = \frac{1}{2}Tr(vw)$ :

$$\begin{aligned} |g^{-1}dg|^2 &= \frac{1}{2}Tr\{(g^{-1}dg)^2\} \\ &= -\frac{1}{8}Tr\{(\omega^1)^2(\tau_1)^2 + (\omega^2)^2(\tau_2)^2 + (\omega^3)^2(\tau_3)^2 \\ &\quad + \omega^1\omega^2\tau_1\tau_2 + \omega^2\omega^1\tau_2\tau_1 \\ &\quad + \omega^1\omega^3\tau_1\tau_3 + \omega^3\omega^1\tau_3\tau_1 \\ &\quad + \omega^2\omega^3\tau_2\tau_3 + \omega^3\omega^2\tau_3\tau_2\}dt^2. \end{aligned}$$

Als we toepassen  $\tau_i\tau_j = -\tau_j\tau_i$ , en  $(\tau_i)^2 = \mathbf{1}$ , dan wordt dit:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4}\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2\}dt^2 \\ &= -\frac{1}{4}\{\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta\}dt^2 \quad (30) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}\{d\theta^2 + d\psi^2 + d\phi^2 + 2d\psi d\phi \cos\theta\}. \quad (31)$$

Als we uitdrukking (30) vergelijken met uitdrukking (13) voor de Lagrangiaan van een vrij roterend star lichaam, dan zien we dat ze op een triviale factor na overeenkomen.

## 4 De beweging van een vrij deeltje op $S^2$ en $S^3$

In dit hoofdstuk gaan we zowel een bewegend deeltje op een tweebol, als op een driebol bekijken. Een tweebol is een bol met een tweedimensionaal oppervlak in de  $\mathbf{R}^3$ , een driebol is een bol met een driedimensionaal oppervlak in de  $\mathbf{R}^4$ . De Hamiltoniaan van een bewegend deeltje op de driebol die we hebben berekend, zullen we dan verder bewerken in hoofdstuk 5.

### 4.1 Metriek en geodetische Lagrangiaan op $S^2$

In deze paragraaf bekijken we enige meetkundige aspecten van  $S^2$ , dit is het tweedimensionaal oppervlak dat punten  $(x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^3$  bevat die voldoen aan de vergelijking:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1. \quad (32)$$

Om afstanden in  $S^2$  te meten, bekijken we eerst een infinitesimale afstand  $ds$ , het zogenaamde lijnelement, over het gekromde oppervlak van  $S^2$ . We beginnen met het lijnelement in  $\mathbf{R}^3$ :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (33)$$

waarbij  $g_{ij}$  de metriek genoemd wordt.

We willen nu eerst  $ds$  in bolcoördinaten geven, dus:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix},$$

zodat:

$$\begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt voor  $ds$ :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (34)$$

Wij zijn echter slechts geïnteresseerd in punten op  $S^2$ , d.i.  $r = 1$  en  $dr = 0$ , voor  $ds$  volgt dus:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 = \hat{g}_{ij} d\hat{x}^i d\hat{x}^j, \quad (35)$$

waarin  $\hat{g}_{ij}$  de metriek op  $S^2$  is; d.w.z.

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} d\hat{x}^1 \\ d\hat{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}.$$

We kunnen nu de zogenaamde geodetische Lagrangiaan voor een vrij deeltje op de bol geven in poolcoördinaten<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \hat{g}_{ij} \frac{d\hat{x}^i}{dt} \frac{d\hat{x}^j}{dt} \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2). \end{aligned} \quad (36)$$

Hieruit berekenen we de gegeneraliseerde impulsen:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta}, \quad (37)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \sin^2 \theta \dot{\phi}, \quad (38)$$

en de Hamiltoniaan:

$$\mathcal{H} = p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right\}. \quad (39)$$

En zo volgen de bewegingsvergelijkingen:

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \implies \ddot{\theta} = \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2, \quad (40)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \implies 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} + \sin^2 \theta \ddot{\phi} = 0. \quad (41)$$

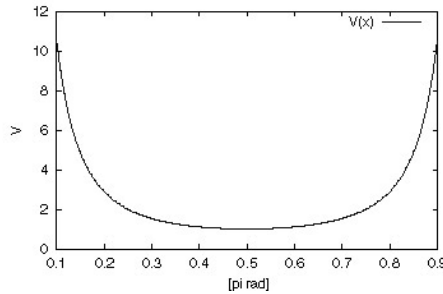
---

<sup>7</sup>We stellen  $m = 1$ .

We zien dat  $p_\phi =: Q$  constant is. We kunnen het deeltje op de tweebol nu opvatten als een deeltje in een  $\theta$ -afhankelijke potentiaal, met een Hamiltoniaan waarin alleen coördinaat  $\theta$  een rol speelt:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ p_\theta^2 + V(\theta) \right\}, \quad (42)$$

met  $V(\theta) := \frac{Q^2}{\sin^2 \theta}$ , zoals geschetst in figuur 3.



Figuur 3: Potentiaal  $V(\theta)$  voor de tweebol met  $Q = 1$ .

In het meest triviale geval ligt het deeltje stil in de potentiaalput bij  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Het beweegt dan in een grote cirkel<sup>8</sup> over de equator van de bol met hoeksnelheid  $\dot{\phi} = Q$ . Als we echter het coördinatenstelsel  $(x^1, x^2, x^3)$  roteren en vervolgens vanuit dat stelsel (waarin de vergelijking van de bol uiteraard exact dezelfde vorm heeft) de hoeken  $\theta$  en  $\phi$  herdefiniëren, zullen we op dezelfde wijze een grote cirkel vinden met  $\theta$  (in het geroteerde stelsel)  $= \frac{\pi}{2}$ . We concluderen daarom dat de geodetische<sup>9</sup> baan een grote cirkel op de bol is voor elke beginwaarde van plaats en impuls van het deeltje.

## 4.2 Metriek en geodetische Lagrangiaan op $S^3$

We gaan nu analoge berekeningen doen voor  $S^3$ , de eenheidsbol in  $\mathbf{R}^4$ . Dit is het driedimensionaal oppervlak dat punten  $(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbf{R}^4$  bevat die voldoen aan de vergelijking:

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1. \quad (43)$$

Gebruik makend van de homeomorfie van  $\mathbf{R}^4$  en  $\mathbf{C}^2$  definiëren we  $z^0, z^1 \in \mathbf{C}$ :

$$z^0 = x^0 + ix^1 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi_f}, \quad (44)$$

$$z^1 = x^2 + ix^3 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi_b}, \quad (45)$$

<sup>8</sup>Een *grote cirkel* is de snijlijn van een vlak door het middelpunt van de bol met het boloppervlak.

<sup>9</sup>Een geodeet vormt per definitie de kortste verbinding tussen twee punten, de natuurlijke generalisatie van een 'rechte lijn' voor gekromde ruimten. Op  $S^2$  is dit een segment van een grote cirkel.

zodat inderdaad:

$$|z^0|^2 + |z^1|^2 = 1 \quad (46)$$

de vergelijking van de bol (nu een cirkel in  $\mathbf{C}^2$ ) is. Verder geldt:

$$dz^0 = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi_f} d\theta + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi_f} d\phi_f, \quad (47)$$

$$dz^1 = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi_b} d\theta + i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi_b} d\phi_b. \quad (48)$$

Weer willen we  $ds$  bepalen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= |dz^0|^2 + |dz^1|^2 \\ &= \frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta^2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (d\phi_f)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta^2 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (d\phi_b)^2 \\ &= \frac{1}{4} d\theta^2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (d\phi_f)^2 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (d\phi_b)^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Als we nu definiëren:  $\psi := \phi_f + \phi_b$  (dus:  $0 \leq \psi \leq 4\pi$ ) en:  $\phi := \phi_f - \phi_b$  (dus:  $-2\pi \leq \phi \leq 2\pi$ ), dan volgt voor  $ds$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4} d\theta^2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2} (d\psi + d\phi) \right\}^2 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ \frac{1}{2} (d\psi - d\phi) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ d\theta^2 + d\psi^2 + d\phi^2 + 2d\psi d\phi \left\{ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ d\theta^2 + d\psi^2 + d\phi^2 - 2d\psi d\phi \cos \theta \right\} \\ &= g_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (50)$$

waarin:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\cos \theta \\ 0 & -\cos \theta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\theta \\ d\psi \\ d\phi \end{pmatrix}.$$

We zien nu dat uit (50) en uit (30) volgt dat  $ds_{S^3}^2 = -\frac{1}{2} \text{Tr}(g^{-1} dg)_{SU_2}^2$ . Dit is niet geheel onverwacht, aangezien, zoals we al hebben laten zien,  $SU_2$  isomorf is met  $S^3$ .

We kunnen nu de geodetische Lagrangiaan berekenen<sup>10</sup>:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \frac{1}{8} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 - 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta). \quad (51)$$

We zien hier nota bene voor de derde keer dezelfde Lagrangiaan opduiken. We zien hierdoor dat het dynamische probleem van een sferische tol in (13) en (30) ( $I_1 = I_2 = I_3$ ) overeenkomt met dat van een geodetische beweging op  $S^3$ . Uit de Lagrangiaan berekenen we de gegeneraliseerde impulsen:

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{4} \dot{\theta}, \quad (52)$$

---

<sup>10</sup>We stellen weer  $m = 1$ .

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{4}(\dot{\psi} - \dot{\phi} \cos \theta), \quad (53)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4}(\dot{\phi} - \dot{\psi} \cos \theta), \quad (54)$$

en de Hamiltoniaan<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_\theta \dot{\theta} + p_\psi \dot{\psi} + p_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= 2 \left\{ p_\theta^2 + \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) (p_\phi + p_\psi \cos \theta)^2 + p_\psi^2 \right\}. \end{aligned} \quad (55)$$

Hieruit volgen de bewegingsvergelijkingen:

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = \frac{2}{\sin^3 \theta} (p_\psi + p_\phi \cos \theta)(p_\phi + p_\psi \cos \theta), \quad (56)$$

$$\dot{p}_\psi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} = \ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta = 0, \quad (57)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = \ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta = 0. \quad (58)$$

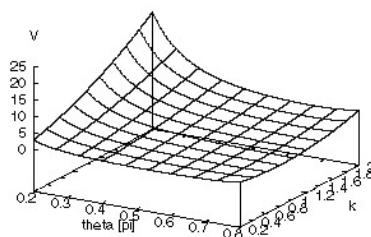
We zien dus dat  $p_\phi =: C$  en  $p_\psi =: Q$  constanten van de beweging zijn, en weer kunnen we het probleem reduceren tot dat van een deeltje in een potentiaalput:

$$\mathcal{H} = 2 \{ p_\theta^2 + V(\theta) \}, \quad (59)$$

waarbij de potentiaal weer slechts afhankelijk is van  $\theta$ :

$$V(\theta) = \frac{1}{\sin^2 \theta} (C + Q \cos \theta)^2, \quad (60)$$

zoals getekend in figuur 4. We hebben hier de vrijheid benut om de constante  $Q^2$  uit  $\mathcal{H}$  weg te laten. Dit correspondeert met de keuze van het nulpunt voor de energie, en laat de bewegingsvergelijkingen onveranderd.



Figuur 4: Potentiaal  $V(\theta, K)$  voor de driebol met  $K := \frac{Q}{C}$ .

Om eenvoudige oplossingen te vinden, zoeken we naar minima in deze potentiaal:

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{2}{\sin^3 \theta} (C + Q \cos \theta)(Q + C \cos \theta) = \sin \theta \dot{\psi} \dot{\phi} = 0. \quad (61)$$

<sup>11</sup>Druk  $\dot{\psi}$  en  $\dot{\phi}$  uit in  $p_\psi$  en  $p_\phi$ .

Hier wordt aan voldaan als

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= 0 \text{ en dus } \cos \theta = -\frac{C}{Q}, \text{ als } Q > C \text{ of als} \\ \dot{\phi} &= 0 \text{ en dus } \cos \theta = -\frac{Q}{C}, \text{ als } C > Q.\end{aligned}$$

In beide gevallen is  $\theta$  dus constant.

Omdat in het ene geval  $\psi$  en in het andere geval  $\phi$  constant is, kunnen we ons beperken tot de baan van het deeltje op een oppervlak van een dimensie lager: de tweebol zoals we die reeds zijn tegengekomen. Als we de hoek  $\theta$  nu opvatten zoals die gedefiniëerd werd bij de tweebol, kunnen we inzien dat als  $\theta$  constant is, het deeltje “kleine cirkels”<sup>12</sup> of grote cirkels over het oppervlak van  $S^2$  zal beschrijven. We gebruiken vervolgens hetzelfde argument dat we eerder bij de behandeling van het deeltje op de tweebol hebben gegeven (nu hebben we de vrijheid het stelsel  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  te roteren zonder de vorm van de vergelijkingen te veranderen), om in te zien dat elke kleine cirkel op  $S^2$  een geodeet is van een vrij deeltje op  $S^3$ .

## 5 Geladen deeltje op $S^2$ in een monopool veld

Als we de geodetische Hamiltoniaan van een deeltje op de driebol bekijken, zien we dat deze te interpreteren is als de Hamiltoniaan voor een geladen deeltje op een tweebol in het magnetisch veld van een monopool die zich in het centrum van de bol bevindt. In §5.1 geven we de algemene vorm van de Hamiltoniaan van een elektrisch geladen deeltje in een magneetveld. In §5.2 werken we deze uit voor het geval van een magnetische monopool.

### 5.1 Hamiltoniaan van elektrisch geladen deeltje in een magneetveld.

De Hamiltoniaan van een geladen deeltje met lading  $Q$  in een extern magneetveld gegeven door de vectorpotentialiaal  $\vec{A}$  wordt in het algemeen gegeven door:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_i [p_i + QA_i]^2. \quad (62)$$

De algemene uitdrukking voor de Hamiltoniaan die we hier gebruiken kan op juistheid gecontroleerd worden door de Hamiltonvergelijkingen uit te rekenen en deze te vergelijken met de uitdrukking voor de Lorentzkracht op een geladen deeltje met massa  $\mu$  en lading  $Q$  in een electromagnetisch veld (in Gauss-eenheden):

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = Q[E(r, t) + \frac{v}{c} \times B(r, t)]. \quad (63)$$

In het algemeen kunnen we een magneetveld  $\vec{B}$  beschrijven als de rotatie van een vectorpotentialiaal  $\vec{A}$ :

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j A_k. \quad (64)$$

Merk op dat in twee dimensies het magneetveld slechts één component  $B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j$  heeft.

<sup>12</sup>Een *kleine cirkel* is de snijlijn van een vlak dat de bol doorsnijdt.

## 5.2 De vectorpotentiaal van een magnetische monopool

We kunnen in (62) de Hamiltoniaan (55) herkennen die we vonden toen we de beweging van een vrij deeltje op  $S^3$  bestudeerden:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \left\{ p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (p_\phi + p_\psi \cos \theta)^2 + p_\psi^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (C + Q \cos \theta)^2 + Q^2 \right\}.\end{aligned}\quad (65)$$

We zien dat we onze eerder gevonden Hamiltoniaan op kunnen vatten als de Hamiltoniaan van een geladen deeltje in een extern magneetveld.

We kunnen nu uit de bovenstaande vergelijkingen aflezen wat de componenten van de vectorpotentiaal zijn als we het vrije deeltje op  $S^3$  opvatten als een deeltje op  $S^2$  met een extern veld:

$$\begin{aligned}A_\phi &= \cos \theta, \\ A_\theta &= 0, \\ A_\psi &= 0,\end{aligned}$$

met als basis:

$$\begin{aligned}d\phi &= \frac{1}{\sin \theta} \hat{e}_\phi, \\ d\theta &= \hat{e}_\theta, \\ d\psi &= \hat{e}_\psi.\end{aligned}$$

In twee dimensies, zoals op de tweebol  $S^2$ , heeft het magneetveld slechts één component:

$$B = \partial_\phi A_\theta - \partial_\theta A_\phi = -1. \quad (66)$$

We zien dat het magneetveld overal op de tweebol constant is. We kunnen dit veld ook intrepeteren als de radiële component van het magnetische veld van een monopool in de oorsprong met magnetische lading  $G = -4\pi$ .

## 6 De kat

We keren in dit hoofdstuk terug naar het model van de kat. Als we de rotaties van het lichaam van de kat delen door de rotaties die het lichaam van de kat als geheel roteren, kunnen we de vormenruimte definiëren. Door middel van deze zogenaamde vezelstructuur kunnen we op redelijk eenvoudige manier de Hamiltoniaan van de vallende kat definiëren. In §6.2 zullen we de conditie van behoud van impulsmoment invoeren. In §6.3 zullen we de restrictie opleggen dat de kat niet met zijn voorkant tegengesteld kan draaien aan zijn achterkant. Deze extra conditie, genaamd de “no-twist” conditie, zal de bewegingsvergelijking aanzienlijk vereenvoudigen.

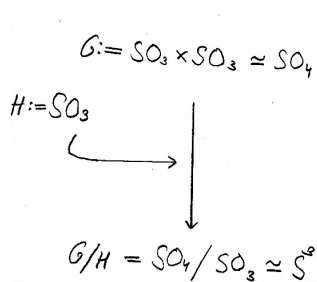
### 6.1 De algebra van de kat

De ruimte van mogelijke configuraties van de kat correspondeert met twee rotatiegroepen:



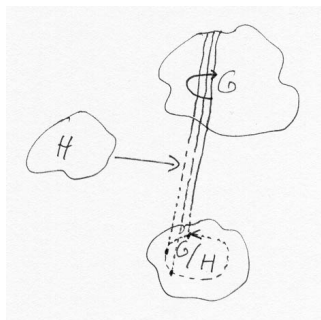
- Rotaties die het lichaam van de kat vervormen: de rotatiegroep  $SO_3^f \times SO_3^b$   $=: G$ . Deze groep is het Cartesisch product van rotaties op de voorste helft (*front*) en rotaties op de achterste helft (*back*) van de kat. Deze groep noemen we de *configuratieruimte*.
- Rotaties die het lichaam van de kat als geheel roteren, waarbij de vorm intact wordt gelaten: de rotatiegroep  $SO_3 =: H$ . Dit is de diagonale ondergroep gegenereerd door  $T_i = T_i^f + T_i^b$ . Deze groep noemen we de *oriëntieruimte*.

We kunnen inzien dat de ruimte  $G/H$  de *vormenruimte* van de kat voorstelt. In figuur 5 is de vezelbundelstructuur van deze opdeling schematisch weergegeven.



Figuur 5: Vezelbundel.

In figuur 6 is geschetst dat als de kat in  $G/H$  –de vormenruimte– langs een gesloten pad beweegt, het corresponderende pad in de configuratieruimte  $G$  niet noodzakelijkerwijs gesloten is. De elementen in  $G$  die met dezelfde vorm corresponderen, zijn aangegeven in de figuur en worden *vezels* genoemd: elementen op dezelfde vezel corresponderen met de verschillende ruimtelijke oriënties (gelabelled door een element van  $H$ ) van de kat in een bepaalde vaste vorm. De kat kan zo in zijn oorspronkelijke vorm terugkeren, terwijl zijn oriëntatie veranderd is, bijvoorbeeld geroteerd over een hoek  $\pi$ .



Figuur 6: Vezels.

We beschrijven de rotaties van de kat dus als volgt

$$h = e^{\frac{1}{2}\xi T_3} e^{\frac{1}{2}\mu T_1} e^{\frac{1}{2}\nu T_3} \in H,$$

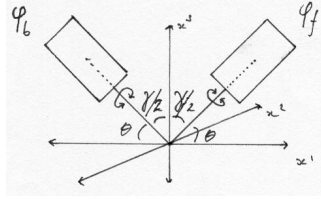
$$\begin{aligned}
k &= g_f g_b \in G/H, \\
g &= hk \in G.
\end{aligned}$$

De configuratie wordt vastgelegd door een element  $g \in G$ . We kunnen dit element  $g$  schrijven als een product van een oriëntatie  $h \in H$  en een vorm  $k \in G/H$  als  $g = hk$ . De vorm  $k$  kunnen we vervolgens herschrijven als het product van  $g_f$  en  $g_b$ , waarbij deze gegeven worden door

$$\begin{aligned}
g_f &= e^{-\frac{1}{2}\gamma T_1^f} e^{\frac{1}{2}\phi_f T_3^f}, \\
g_b &= e^{\frac{1}{2}\gamma T_1^b} e^{\frac{1}{2}\phi_b T_3^b}.
\end{aligned}$$

Hier stellen  $g_f$  en  $g_b$  rotaties voor van resp. de rechter en de linker cylinder, zoals aangegeven in figuur 7. De totale configuratieruimte is dus zesdimensionaal met drie coördinaten  $(\mu, \nu, \xi)$  die de ruimtelijke oriëntatie bepalen en drie  $(\gamma, \phi_f, \phi_b)$  die de vorm bepalen. De rotatiegeneratoren  $T_i^{f,b}, T_i = T_i^f + T_i^b$  voldoen aan de Lie-algebra's:

$$\begin{aligned}
[T_i^{f,b}, T_j^{f,b}] &= \epsilon_{ijk} T_k^{f,b}, \\
[T_i^f, T_j^b] &= 0, \\
[T_i, T_j^{f,b}] &= \epsilon_{ijk} T_k^{f,b}, \\
[T_i, T_j] &= \epsilon_{ijk} T_k.
\end{aligned}$$



Figuur 7: Fysisch model van de kat.

Om de Lagrangiaan, en uiteindelijk de Hamiltoniaan, van een vallende kat te bepalen, berekenen we eerst:

$$\begin{aligned}
gdg^{-1} &= hkd(k^{-1}h^{-1}) \\
&= h(kdk^{-1})h^{-1} + hdh^{-1},
\end{aligned} \tag{67}$$

en:

$$\begin{aligned}
kdk^{-1} &= g_f dg_f^{-1} + g_b dg_b^{-1} \\
&= (-e^{\frac{i}{2}T_1^f} T_3^f e^{-\frac{i}{2}\gamma T_1^f} d\phi_f + \frac{1}{2}T_1^f d\gamma) \\
&+ (-e^{\frac{i}{2}T_1^b} T_3^b e^{-\frac{i}{2}\gamma T_1^b} d\phi_b - \frac{1}{2}T_1^b d\gamma) \\
&= -(T_3^f \cos \frac{\gamma}{2} + T_2^f \sin \frac{\gamma}{2}) + \frac{1}{2}T_1^f d\gamma \\
&- (T_3^b \cos \frac{\gamma}{2} - T_2^b \sin \frac{\gamma}{2}) - \frac{1}{2}T_1^b d\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}T_3 \cos \frac{\gamma}{2} d\psi + \frac{1}{2}T_2 \sin \frac{\gamma}{2} d\phi \\
&+ \frac{1}{2}\tilde{T}_3 \cos \frac{\gamma}{2} d\phi + \frac{1}{2}\tilde{T}_2 \sin \frac{\gamma}{2} d\psi + \tilde{T}_1 d\frac{\gamma}{2}, \tag{68}
\end{aligned}$$

waar we gedefinieerd hebben:

$$\tilde{T}_i := T_i^f - T_i^b,$$

en:

$$\begin{aligned}
\psi &:= \phi_f + \phi_b, \\
\phi &:= \phi_f - \phi_b.
\end{aligned}$$

Het is belangrijk om op te merken dat  $kdk^{-1}$  componenten in  $G/H$  (de ruimte met  $\tilde{T}_i$ ), als ook in  $H$  (de ruimte met  $T_i$ ) bevat. Vervolgens berekenen we:

$$\begin{aligned}
hdh^{-1} &= \frac{1}{2}(\sin \mu \sin \nu d\xi + \cos \nu d\mu)T_1 \\
&+ \frac{1}{2}(\sin \mu \cos \nu d\xi - \sin \nu d\mu)T_2 \\
&+ \frac{1}{2}(\cos \mu d\xi + d\nu)T_3, \\
&= e^i T_i, \tag{69}
\end{aligned}$$

waarmee de eenvormen  $e^i$  vastliggen, geheel analoog aan de berekening van  $g^{-1}dg$  in §3.2. Verder zijn de volgende algebraïsche relaties interessant:

$$\begin{aligned}
[T_i, T_j] &= \epsilon_{ijk} T_k, \\
[T_i, \tilde{T}_j] &= \epsilon_{ijk} \tilde{T}_k, \\
[\tilde{T}_i, \tilde{T}_j] &= -\epsilon_{ijk} T_k.
\end{aligned}$$

We kunnen nu  $ds^2$  bepalen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}Tr(gdg^{-1})^2 &= \frac{1}{2}Tr\{h(kdk^{-1})h^{-1}\}^2 + \frac{1}{2}Tr(hdh^{-1})^2 + Tr\{h(kdk^{-1})h^{-1}hdh^{-1}\} \\
&= \frac{1}{2}Tr(kdk^{-1})^2 + \frac{1}{2}Tr(hdh^{-1})^2 + Tr\{(kdk^{-1})(dh^{-1}h)\} \\
&= \frac{1}{2}Tr(kdk_{G/H}^{-1})^2 + \frac{1}{2}Tr(dh^{-1}h + kdk_H^{-1})^2, \tag{70}
\end{aligned}$$

waar we gebruik gemaakt hebben van de eigenschap dat we een product van matrices cyclisch mogen permuteren, zonder het spoor van het product te veranderen, en de orthogonaliteit van  $T_i$  en  $\tilde{T}_j$ . De subscripts  $G/H$  en  $H$  geven aan dat we het resp. over de componenten  $\tilde{T}_i$  en  $T_i$  van  $kdk^{-1}$  hebben (zie vergelijking (68)).

We kunnen nu  $ds^2$  uitschrijven (we gaan over op  $\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ ):

$$\begin{aligned}
ds^2 &= 2d\theta^2 + \frac{1}{2}\cos^2 \theta d\psi^2 + \frac{1}{2}\sin^2 \theta d\phi^2 \\
&+ \frac{1}{2}(e^1)^2 + \frac{1}{2}(e^2 + \frac{1}{2}\cos \theta d\phi)^2 + \frac{1}{2}(e^3 + \frac{1}{2}\sin \theta d\psi)^2. \tag{71}
\end{aligned}$$

Uit bovenstaande metriek volgt de geodetische Lagrangiaan voor dit probleem. De daaruit volgende Hamiltoniaan met bijbehorende bewegingsvergelijkingen<sup>13</sup> worden weliswaar covariant, maar erg ingewikkeld. Wij zullen voor het vervolg van ons verhaal uitgaan van de volgende vereenvoudigde Lagrangiaan, die de belangrijkste kwalitatieve kenmerken van het probleem behoudt,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ &= \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}\cos^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \\ &+ \frac{1}{4}(\dot{\mu})^2 + \frac{1}{4}(\dot{\nu} + \frac{1}{2}\cos\theta\dot{\phi})^2 + \frac{1}{4}(\dot{\xi} + \frac{1}{2}\sin\theta\dot{\psi})^2.\end{aligned}\quad (72)$$

## 6.2 Het behoud van impulsmoment

Tijdens de val van de kat zal zijn totale impulsmoment behouden zijn, aangezien er geen krachtmoment is. Het totale impulsmoment van de kat bestaat uit een bijdrage van de rotatie en van de deformatie van het lichaam. Met de in de vorige paragraaf beschreven theorie kunnen we dit als volgt opschrijven:

$$\begin{aligned}L &= I_i\omega^i, \\ \omega^i\tau_i dt &= h^{-1}dh,\end{aligned}$$

in het stelsel<sup>14</sup> van de kat. Als we dit transformeren naar het ruimte vaste stelsel, dan krijgen we:

$$\begin{aligned}L &= h\{I_i\omega^i + m(x)\}, \\ dL &= h\{\mathbf{I}h^{-1}dh + m(x)dx\} = 0,\end{aligned}\quad (73)$$

hierin stelt  $m(x)$  het gedeelte van het impulsmoment voor van de deformatie van het lichaam. Zoals in de vorige paragraaf beschreven, moet gelden voor het impulsmoment in de deformatieruimte:

$$m(x)dx = (kdk^{-1})_H.$$

Vervolgens vermenigvuldigen we (73) van links eerst met  $h^{-1}$  en dan met  $\mathbf{I}^{-1}$ :

$$h^{-1}dh + \mathbf{I}^{-1}(kdk^{-1})_H = 0.\quad (74)$$

Dit is een belangrijke beperking van de bewegingen van de kat. Als we deze beperking doorvoeren krijgen we een Lagrangiaan die erg lijkt op die berekend in §6.1.

We definiëren, gebruikmakend van de diagonaalvorm van de traagheidstensor berekend in §2.4:

$$\begin{aligned}I_1 &:= (1 + \beta)I, \\ I_2 &:= (\cos^2\theta + \alpha\sin^2\theta + \beta\cos^2\theta)I, \\ I_3 &:= (\sin^2\theta + \alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta)I,\end{aligned}$$

<sup>13</sup>Dit worden uiteindelijk de zogenaamde *Wang vergelijkingen*.

<sup>14</sup>In het coördinatenstelsel van Kane en Scher.

waarin:

$$\begin{aligned}\alpha &:= \frac{\mathcal{I}_3}{\mathcal{I}}, \\ \beta &:= \frac{Ml^2}{\mathcal{I}}.\end{aligned}$$

$\mathcal{I}$  en  $\mathcal{I}_3$  zijn resp. de  $I$  en  $I_3$  uit §2.4.

We berekenen de Lagrangiaan door deze beperking in te voeren in de uitdrukking voor  $ds^2$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ I_1 \dot{\theta}^2 + I_2^{-1} \cos^2 \theta \dot{\psi}^2 + I_3^{-1} \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right. \\ &\quad \left. + I_1^{-1} (\dot{\mu})^2 + I_3^{-1} (\dot{\nu} + \frac{1}{2} \alpha \cos \theta \dot{\phi})^2 + I_2^{-1} (\dot{\xi} + \frac{1}{2} \alpha \sin \theta \dot{\psi})^2 \right\}, \quad (75)\end{aligned}$$

waar we voor het vervolg bepalen:

$$\begin{aligned}Q_1 &:= \dot{\xi}, \\ Q_2 &:= \dot{\mu} + \frac{1}{2} \alpha \sin \theta \dot{\psi}, \\ Q_3 &:= \dot{\nu} + \frac{1}{2} \alpha \cos \theta \dot{\phi}.\end{aligned}$$

Deze, zoals zo zal blijken, behouden grootheden noemen we de *ladingen*. We berekenen nu de gegeneraliseerde impulsen:

$$\begin{aligned}p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}, \\ p_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_2^{-1} (\cos^2 \theta \dot{\psi} + \frac{1}{2} \alpha Q_3 \sin \theta), \\ p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = I_3^{-1} (\sin^2 \theta \dot{\phi} + \frac{1}{2} \alpha Q_2 \cos \theta), \\ p_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mu}} = I_2^{-1} Q_3, \\ p_\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\nu}} = I_3^{-1} Q_2, \\ p_\xi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = I_1^{-1} Q_1.\end{aligned}$$

Met de gegeneraliseerde impulsen kunnen we nu de Hamiltoniaan opschrijven:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ I_1 \dot{\theta}^2 + I_2^{-1} (\cos^2 \theta \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \alpha Q_3 \sin \theta \dot{\psi}) \right. \\ &\quad \left. + I_3^{-1} (\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \alpha Q_2 \cos \theta \dot{\phi}) \right. \\ &\quad \left. + I_2^{-1} Q_3 \dot{\mu} + I_3^{-1} Q_2 \dot{\nu} + I_1^{-1} Q_1 \dot{\xi} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ I_1^{-1} p_\theta^2 + \frac{I_2}{\cos^2 \theta} \left( p_\psi - \frac{\alpha \sin \theta}{2I_2} Q_3 \right)^2 + \frac{I_3}{\sin^2 \theta} \left( p_\phi - \frac{\alpha \cos \theta}{2I_3} Q_2 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \right\}. \tag{76}
\end{aligned}$$

We kunnen nu verifiëren dat de zojuist gedefiniëerde ladingen inderdaad behouden zijn. Uit de Hamiltonvergelijkingen volgt namelijk:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_\mu &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu} = 0 \implies \dot{Q}_1 = 0, \\
\dot{p}_\nu &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu} = 0 \implies \dot{Q}_2 = 0, \\
\dot{p}_\xi &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = 0 \implies \dot{Q}_3 = 0.
\end{aligned}$$

### 6.3 De “no-twist” conditie

Aangezien katten geen oneindig flexibele rug hebben, kunnen we nog een restrictie invoeren: de ”no-twist” conditie. We beperken de rotatie van de rug door te eisen:

$$\phi_b = -\phi_f \implies \psi \equiv 0 \text{ en } d\psi \equiv 0. \tag{77}$$

Een van de kwadraten in de Hamiltoniaan valt nu weg, waardoor deze reduceert tot die van een deeltje op een driebol:

$$p_\psi \rightarrow I_2^{-1} \left( \frac{1}{2} \alpha Q_3 \sin \theta \right),$$

en dan wordt de Hamiltoniaan:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ I_1^{-1} p_\theta^2 + \frac{I_3}{\sin^2 \theta} \left( p_\phi - \frac{\alpha \cos \theta}{2I_3} Q_2 \right)^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 \right\}. \tag{78}$$

Deze Hamiltoniaan is gelijk van vorm als die van een deeltje op een driebol, die op zijn beurt weer gelijk is aan de Hamiltoniaan van een geladen deeltje op een tweebol in een monopool veld. Deze Hamiltoniaan volgt ook als we de no-twist conditie opleggen, uitgaande van de exacte Lagrangiaan (72).

### 6.4 De kinematica van het regelprobleem

We kunnen het probleem van de vallende kat opvatten als een regelprobleem. In het algemeen wordt in de regeltheorie naar de meest efficiënte methode gezocht om door een gecontroleerde beweging in de vormenruimte een gewenste verandering in de configuratieruimte te bewerkstelligen. Een voorbeeld hiervan is onze kat: door de vormenruimte te doorlopen, wordt zijn ruimtelijke rotatie over een hoek  $\pi$  gedraaid. We zullen dit weergeven in formulevorm. We beginnen met uitdrukking (74):

$$h^{-1} dh + \mathbf{I}^{-1} (kdk^{-1})_H = 0. \tag{79}$$

Merk op dat uit vergelijking (68) volgt, gebruik makend van de no-twist conditie:

$$(kdk^{-1})_H = \frac{1}{2} \cos \theta d\phi T_2. \tag{80}$$

We kunnen uitdrukking (79) nu omschrijven tot:

$$\begin{aligned} dh &= -h\mathbf{I}^{-1}(kdk^{-1})_H \implies \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{-h\mathbf{I}^{-1}(kdk^{-1})_H}{dt} \implies \\ h(t) &= h(0)e^{\left\{\frac{\alpha \cos \theta}{2I_3} \int d\phi\right\}_{T_2}}. \end{aligned} \quad (81)$$

We herkennen de factor in de exponent als het gevolg van de enige niet-nul term van de ijkpotentiaal uit de Hamiltoniaan<sup>15</sup>:

$$A_\phi = -\frac{\alpha \cos \theta}{2I_3}. \quad (82)$$

## 6.5 Oplossingen van de bewegingsvergelijkingen

We hebben in de vorige paragraaf laten zien dat de kat een rotatie om de  $x^2$ -as kan uitvoeren gegeven door het groepelement in (81), de kat correspondeert met een deeltje met lading  $Q_2$  en roteert daarom met een fasefactor  $\hat{h}$ :

$$\hat{h}(t) = \hat{h}(0)e^{\left\{\frac{\alpha Q_2 \cos \theta}{2I_3} \int d\phi\right\}_{T_2}}. \quad (83)$$

We zoeken naar oplossingen waarbij de kat op zijn poten terecht komt. De kat hangt in het begin ondersteboven, met poten omhoog. De kat moet dan over een hoek  $\pi$  (modulo  $2\pi$ ) rond de  $x^2$ -as draaien om op zijn poten terecht te komen. In formulevorm:

$$\frac{\alpha Q_2 \cos \theta}{2I_3} \int d\phi \equiv (2n + 1)\pi, n \in \mathbf{Z}. \quad (84)$$

Oplossingen die hieraan voldoen worden de Rademaker-Ter Braak meridianen genoemd.

We kunnen deze uitdrukking ook als volgt schrijven:

$$Q_2 \int A_\phi d\phi = (2n + 1)\pi. \quad (85)$$

We zien dat de magnetische flux, omsloten door het deeltje op de tweebol dat de vormenruimte van de kat representeert, gelijk moet zijn aan  $(2n + 1)\pi$  om de kat op zijn poten te laten landen.

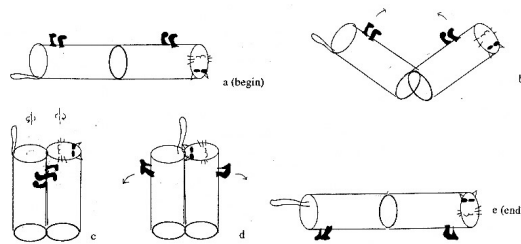
### 6.5.1 Een simpele oplossing

We verkrijgen een simpele oplossing als de hoeken op de volgende manieren veranderen:

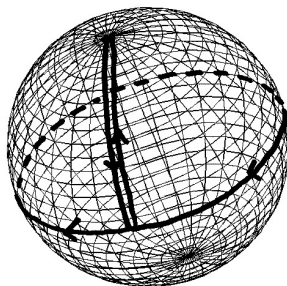
1.  $\theta$  verandert van 0 naar  $\frac{\pi}{2}$ , terwijl  $\phi$  constant is.
2.  $\phi$  verandert van 0 naar  $2\pi$ , terwijl  $\theta$  constant is.

Deze oplossing is getekend in figuur 8 voor de vorm van de kat, en in figuur 9 voor de baan van het deeltje op de tweebol.

<sup>15</sup>De oplossing is in dit speciale geval eenvoudig, omdat we slechts  $T_2$  in de exponent krijgen, en deze commuteert met zichzelf. In het algemeen moeten we een *padordering* uitvoeren als we niet commuterende objecten in de exponent krijgen. De algemene oplossing is  $h(t) = \mathbf{P}e^{Q_2 \int A_\mu^a T_a dx^\mu} h(0)$ , waarbij  $\mathbf{P}$  de padordering is en  $A_\mu^a$  de componenten van de vectorpotentiaal.



Figuur 8: De simpele oplossing.



Figuur 9: Het pad op de bol bij de simpele oplossing.

### 6.5.2 Natuurlijker oplossing

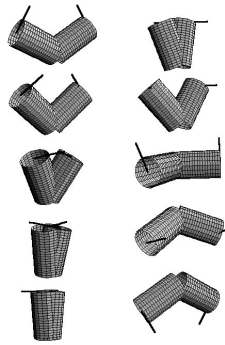
De simpele oplossing is niet realistisch omdat de kat zijn rug zou breken, en heel slank zou moeten zijn, om werkelijk tot  $\theta = \frac{\pi}{2}$  door te buigen. Daarom willen we ook een oplossing presenteren die redelijkerwijs mogelijk is voor de echte kat. Het is voor de kat natuurlijk om meer bewegingen tegelijk uit te voeren. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de oplossing in figuur 10, gemaakt door Japanse fysici. We zien  $\theta$  van ongeveer  $\frac{\pi}{8}$  verandert tot iets onder  $\frac{\pi}{2}$ . Dit gebeurt tegelijkertijd met de verandering van de hoek  $\phi$ , dus het draaien van de pootjes.

Een schets van het bijbehorendepad van het deeltje op de tweebol is weergegeven in figuur 11. Het is interessant op te merken dat in dit model een extra rotatie om de  $x^2$ -as wordt uitgevoerd. Als we dit in het licht van het deeltje op de tweebol bekijken, zien we dat het deeltje  $3\pi$  magnetische flux omvat, consistent met vergelijking (85).

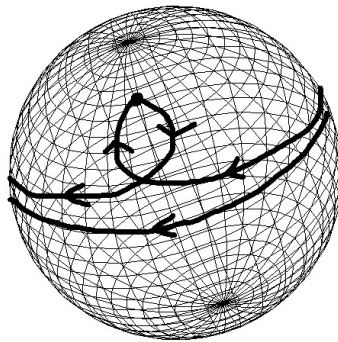
### 6.5.3 De val van een echte kat

Als we echter naar opnamen van een vallende kat kijken, zoals bijvoorbeeld figuur 12, zien we dat katten anders vallen dan de genoemde oplossingen. Er is blijkbaar een oplossing van de Hamiltoniaan die gunstiger is voor de kat. Het eerste belangrijke verschil dat direct opvalt, is dat de kat ingeklapt begint en vervolgens uitklapt. Hier wordt het traagheidsmoment om de  $x^2$ -as geminimaliseerd, zodat hij makkelijker om deze as kan draaien. Op dezelfde wijze als een kunstschaatser zijn armen intrekt of uitstrekt om controle uit te oefenen op





Figuur 10: Een andere oplossing.



Figuur 11: Een ander mogelijk pad op de bol.

zijn rotatiesnelheid.

## 7 Discussie en Conclusies

We hebben gezien dat de kat in figuur (12) niet één van de door ons gepresenteerde paden door de vormenruimte kiest. Uit dit plaatje is niet zonder twijfel vast te stellen of de kat de no-twist conditie violeert. We hebben echter een filmopname gezien van een kat die zijn rug bijna  $\pi$  radialen “twist”, en hierbij significant gebruikt maakt van zijn staart en poten. De no-twist conditie is dus niet noodzakelijk om een oplossing te vinden van het probleem, maar zorgt er wel voor dat we met een Abelse ijktheorie kunnen volstaan, omdat we dan slechts één niet-nul component van de ijkpotentiaal overhouden. Als we de no-twist conditie niet opleggen, hebben we te maken met een *niet-Abelse* ijktheorie, waardoor we een aantal drastische versimpelingen niet meer kunnen toepassen. Een voorbeeld hiervan is het achterwege blijven van de padordering in (81).

We hebben laten zien dat de kat in ons model op zijn poten terecht kan komen, terwijl hij voldoet aan de no-twist conditie. Uit waarnemingen concluderen we dat er ook oplossingen moeten zijn waarbij niet aan de no-twist conditie



Figuur 12: De val van de kat.

wordt voldaan, deze zijn de moeite waard om verder onderzoek naar te doen.

## A Appendix: Lie algebra's en generatoren

De generatoren van de rotatiematrices uit  $SO_3$  voldoen aan de volgende commutatierelaties en hierdoor genereren zij een Lie algebra:

$$[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} T_k. \quad (86)$$

Zo is er bijvoorbeeld de set  $\{T_1, T_2, T_3\}$  met:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nu kunnen we een rotatie over een hoek  $\theta$  om de  $x^i$ -as in het algemeen schrijven als<sup>16</sup>:

$$\Lambda_i = e^{\theta T_i}. \quad (87)$$

Bij wijze van generiek voorbeeld schrijven we dit uit voor  $i = 3$ . Deze  $e$ -macht kunnen we dan als volgt expanderen:

$$\begin{aligned} e^{\theta T_3} &\equiv 1 + \theta T_3 + \frac{1}{2} \theta^2 T_3^2 + \frac{1}{3!} \theta^3 T_3^3 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \dots & -\theta + \frac{1}{3!} \theta^3 - \frac{1}{5!} \theta^5 + \dots & 0 \\ \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots & 1 - \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (88)$$

We zien dat  $T_3$  die matrix uit  $SO_3$  genereert, die bij een rotatie van een hoek  $\theta$  om de  $x^3$ -as hoort.

Als we elke matrix  $T_i$  identificeren met  $\frac{i}{2} \tau_i$ , definieert dit een isomorfisme tussen  $SO_3$  en  $SU_2$ , waarbij  $\tau_i$  de Pauli matrices voorstellen. We kunnen nu rotaties ook schrijven als  $e^{\frac{i}{2} \theta \tau_i}$  en op dezelfde wijze als  $T_i$  genereren deze matrices rotatiematrices. Uiteraard voldoen deze generatoren uit  $SU_2$  ook aan de commutatierelaties die bij een Lie algebra horen. Het is wèl belangrijk op te merken dat een vector onder invloed van een matrix uit  $SO_3$  transformeert als:  $v' = \Lambda v$ , met  $\Lambda \in SO_3$ , terwijl een vector onder de invloed van een matrix uit  $SU_2$  als volgt transformeert:  $v' = \Omega v \Omega^{-1} = \Omega v \Omega^\dagger$ , met  $\Omega \in SU_2$ . We kunnen een element  $\Omega \in SU_2$  als volgt representeren:

$$\begin{aligned} \Omega &= e^{\frac{i}{2} \alpha^k \tau_k} \\ &= \mathbf{1} + i \frac{|\alpha|}{2} \alpha^k \tau_k - \frac{1}{2} \frac{|\alpha|^2}{2} |\vec{\tau}|^2 - \frac{i}{3!} \frac{|\alpha|^3}{2} (\alpha^k \tau_k)^3 \dots \\ &= \mathbf{1} \cos \left| \frac{\alpha}{2} \right| + i \frac{\alpha^k}{|\alpha|} \tau_k \sin \left| \frac{\alpha}{2} \right| \end{aligned} \quad (89)$$

<sup>16</sup>Fysici geven er over het algemeen de voorkeur aan om rotaties te definiëren als  $h = e^{i\theta T}$ . Dit levert enigszins gewijzigde commutatierelaties, maar heeft geen wezenlijke gevolgen. Wij houden hier ter bevordering van de continuïteit en simpliciteit de definitie zonder  $i$  aan.

## Referenties

- [1] A. Shapere & F. Wilczek, Gauge Kinematics of Deformable Bodies, HUTP-88/A031
- [2] R. Montgomery, Gauge Theory of the Falling Cat, Field Institute Communications Volume 1, 1993