

# Topologisch Quantumrekenen met Fibonaccianyonen

Rosemarie Aben

26 augustus 2008

Begeleider: Prof. dr. ir. F.A. Bais  
Instituut der Theoretische Fysica, Universiteit van Amsterdam

## Samenvatting

Het Fibonacci-model is een model dat is opgesteld voor de topologische quantumcomputer. In dit artikel wordt nagegaan of het Fibonacci-model geschikt is voor universeel topologisch quantumrekenen: met het model moet een set quantumpoorten verworven kunnen worden waarmee alle mogelijk berekeningen kunnen worden uitgevoerd. Het Fibonacci-model werkt met slechts één deeltje: het anyon. Anyonen zijn deeltjesachtige excitaties die in bepaalde media kunnen optreden en fractionele spin en quantumstatistiek hebben. Het gedrag van anyonen wordt beschreven met één niet-triviale fusieregel. De wereldlijnen van de anyonen kunnen worden gevlochten. Vlechten die zo ontstaan benaderen unitaire operaties. De vlechten worden opgebouwd met vlechtoperaties. Door gebruik te maken van twee consistentierelaties worden de  $F$  en de  $R$ -matrix geconstrueerd. Met de  $F$  en de  $R$ -matrix worden twee elementaire vlechtoperaties verkregen. Hiermee kunnen alle vlechten van drie anyonen geconstrueerd worden. De operaties moeten op minstens drie deeltjes werken om er berekeningen mee uit te voeren. De operaties worden verkregen in matrixvorm, maar moeten worden omgezet in vectoren. Wanneer het Fibonacci-model een universele set voor quantumrekenen levert moeten deze twee vectoren de hele  $SU(2)$ -ruimte parametriseren. De berekening die in dit artikel is gedaan levert een parametrisatie van de vlechtoperaties waarmee niet de totale  $SU(2)$ -ruimte is te parametriseren. Dit zou betekenen dat het model niet universeel is. Aangezien dat onwaarschijnlijk is, wordt na de berekening van de parametrisatie het artikel voortgezet met een parametrisatie die wel een universele set levert. De vectoren verkregen tijdens de parametrisatie werken op eenheden van drie deeltjes: de qubits. De twee elementaire vlechtoperaties kunnen alle unitaire operaties op één qubit vastleggen. Tot slot wordt er een controlerende poort geconstrueerd, die wordt gevormd uit een vlecht van twee verstrengelde qubits. De operaties binnen een qubit, samen met de controlerende poort die opereert binnen twee qubits, vormen een universele set voor topologisch quantumrekenen. Met deze set zijn alle quantumpoorten die nodig zijn om gegevens te verwerken te construeren.

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Het Fibonaccimodel</b>	<b>4</b>
2.1	Anyonen . . . . .	4
2.2	Fusieregels . . . . .	6
2.2.1	Fusiebomen . . . . .	9
2.3	Quantumdimensie . . . . .	9
2.4	Associativiteit van fusie: de F-matrix . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Vlechten</b>	<b>14</b>
3.1	De R-matrix . . . . .	14
3.2	Spin van anyonen . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Topologisch quantumrekenen met Fibonaccianyonen</b>	<b>18</b>
4.1	Qubits . . . . .	18
4.2	Basistoestanden . . . . .	18
4.3	Elementaire vlechtoperaties . . . . .	19
4.4	Quantumpoorten van één qubit . . . . .	23
4.5	Quantumpoorten van twee qubits . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Topologische quantumcomputer</b>	<b>26</b>
5.1	Berekeningen uitvoeren . . . . .	26
5.2	Poorten . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Conclusie</b>	<b>29</b>
<b>7</b>	<b>Bijlage: berekening parametrisatie <math>\rho(\sigma_2)</math></b>	<b>30</b>

## 1 Inleiding

De ontwikkeling van computers verloopt in hoog tempo. Steeds kleinere rekelementen worden op chips geplaatst om ze sneller en nauwkeurig te laten werken. Er zit echter een limiet aan die groei: inmiddels is men in staat zodanig kleine rekelementen te maken dat de wetten van de quantummechanica niet langer verwaarloosd kunnen worden. Maar deze complicatie heeft een groot voordeel: met quantummechanica is een andere manier van rekenen mogelijk. Quantumcomputers kunnen gebruikmaken van qubits in plaats van bits: deze kunnen niet alleen een nul of een één zijn, maar ook een superpositie van deze twee cijfers en taken kunnen bovendien parallel worden verwerkt. Zo gaat de snelheid enorm omhoog.

Topologische quantumcomputers gaan een stap verder. Waar quantumcomputers een steek laten vallen, omdat de nauwkeurigheid gering is en de fouttolerantie laag, omzeilt een topologische quantumcomputer dit probleem door te werken met de vlechttheorie. Omdat de topologische quantumcomputer gebruikmaakt van de vlechttheorie is deze niet gevoelig voor lokale storingen. Een topologische quantumcomputer is dan ook een veelbelovend model voor de toekomstige computer.

De basis van de topologische quantumcomputer zijn zogenaamde anyonen. Anyonen zijn deeltjesachtige excitaties die in bepaalde media kunnen optreden en die fractionele spin en quantum statistiek hebben. Anyonen zijn geen reële deeltjes. Een systeem van elektronen in een tweedimensionaal vlak, kan aangeslagen deeltoestanden van de grondtoestand hebben: deze toestanden worden quasideeltjes genoemd en kunnen zich manifesteren als anyonen. Deze situatie kan alleen gecreëerd worden in  $(2 + 1)$  dimensies.

De wereldlijnen van anyonen kunnen gevlochten worden volgens bepaalde regels behorend bij het model. De verschillende manieren van vlechten zijn de logische quantumpoorten van de topologische quantumcomputer. De logische quantumpoorten zijn in het quantumrekenen unitaire operaties. Niet elk model wat is opgesteld voor topologisch quantumrekenen is geschikt om dienst te doen als een universele computer, dat wil zeggen dat niet met elk model alle mogelijke unitaire operaties gesimuleerd kunnen worden.

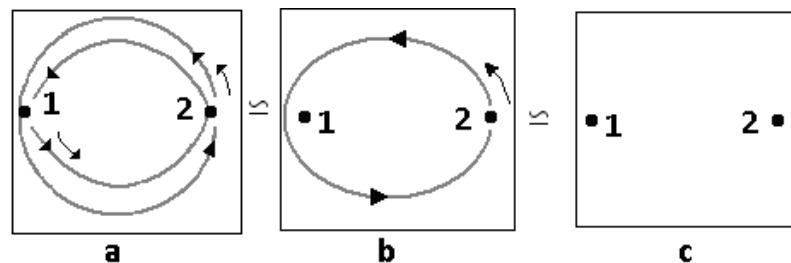
In dit artikel onderzoek ik het Fibonaccimodel. Een model dat met een aantal simpele fusieregels (in dit geval driepuntsfuncties) voor anyonen in staat is elke mogelijke berekening te simuleren. In het eerste deel van het artikel zal ik de anyonen en hun eigenschappen behandelen, evenals de fusieregels. Dan is voldoende kennis van het model verworven om dieper in te kunnen gaan op het vlechten. Ik zal eerst de F-matrix uitlichten: een vierpuntsfunctie die de associativiteit van de fusieregels beschrijft. Met behulp van de pentagonrelatie, bestaande uit vijfpuuntsfuncties, zal ik de mogelijke fusieregels vaststellen en de bijbehorende F-matrix te bepalen. Daarna maak ik gebruik van de hexagonrelatie (bestaande uit vierpuntsfuncties) en de bepaalde F-matrix om de R-matrix te bepalen. Als deze twee matrices geconstrueerd zijn kunnen de elementaire vlechtoperaties die nodig zijn om te vlechten bepaald worden. Deze operaties werken dan op de qubits, de bouwstenen van de topologische quantumcomputer. Na dit te hebben doorlopen kan tot slot nagaan worden of het model inderdaad geschikt is over een universele set van operaties waarmee alle benodigde logische quantumpoorten vastgesteld kunnen worden.

## 2 Het Fibonaccimodel

### 2.1 Anyonen

In  $(3 + 1)$  dimensies (drie ruimte- en één tijddimensie) kunnen de deeltjes in twee klassen worden ingedeeld: bosonen en fermionen. Het belangrijkste onderscheid tussen de twee klassen wordt zichtbaar als er wordt gekeken naar systemen van identieke deeltjes. De golf functie van een dergelijk systeem heeft als eigenschap dat deze een minteken oppakt als twee fermionen van plek verwisselen, maar dat er niets gebeurt met de golf functie als twee bosonen van plek verwisselen. Een golf functie is dus symmetrisch onder uitwisseling van identieke bosonen en antisymmetrisch onder uitwisseling van identieke fermionen. Deze symmetrie-eigenschappen zijn de basis van de quantumstatistiek.

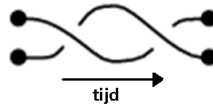
Het feit dat er slechts twee klassen deeltjes in de natuur zijn, komt voort uit het feit dat we in  $(3 + 1)$  dimensies leven. Om dit te verduidelijken worden twee identieke deeltjes bekeken: 1 en 2. Nu worden deze deeltjes twee maal van plek verwisseld. Hierdoor komen ze weer op hun oorspronkelijke plek terecht (figuur 1a). De vorm van de paden die de deeltjes afleggen maakt niet uit, zolang ze niet op hetzelfde moment op dezelfde plaats zijn. Het pad mag zozeer vervormd worden dat de situatie zoals geschetst in figuur (1b) wordt bereikt: deeltje 2 draait om deeltje 1 heen, terwijl deeltje 1 op zijn plek blijft. Figuur (1a) en figuur (1b) hebben nog steeds hetzelfde effect op de golf functie. Het vervormen van de paden kan echter nog verder worden doorgetrokken: de baan van deeltje 2 kan verkleind worden in  $(3 + 1)$  dimensies zonder dat daarbij zijn pad deeltje 1 kruist. Als het pad van deeltje 2 nu volledig wordt ingetrokken, is het resultaat dat de deeltjes op hun plek blijven (figuur 1c)!



Figuur 1: De situatie die hier is geschetst speelt zich af in  $(3 + 1)$  dimensies. In figuur a worden de twee deeltjes twee maal met elkaar van plek verwisseld zodat ze weer terugkeren in hun oorspronkelijke positie. In figuur b wordt deeltje 1 om deeltje 2 gedraaid, terwijl deeltje 2 op zijn plaats blijft. In figuur c is de baan die deeltje 1 om deeltje 2 aflegde ineengekrompen tot een punt. Dit was mogelijk omdat bij het ineenkrimpen van de baan deeltje 2 niet gesneden hoefde te worden. De figuren 1, 2 en 3 hebben dus alledrie hetzelfde effect op de golf functie: er gebeurt niets.

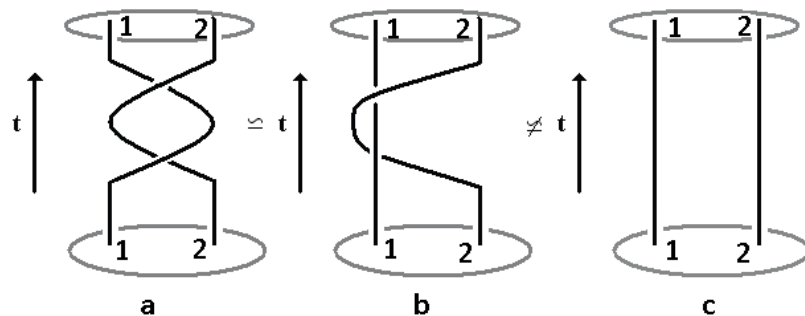
Tweemaal de deeltjes van plek verwisselen heeft dus geen effect op de golf functie in  $(3+1)$  dimensies. Eénmaal de deeltjes van plek verwisselen kan dan slechts de golf functie met een plus- of een minteken veranderen, aangezien twee keer plus en twee keer min beide triviaal zijn. Een deeltje dat de golf functie onder één keer uitwisselen een minteken geeft wordt een fermion genoemd en een deeltje waarbij niets gebeurt onder één keer uitwisse-

len een boson.



Figuur 2: Twee deeltjes worden twee keer om elkaar heen gewonden: de tijd loopt hier van links naar rechts, waarbij het bovenste deeltje eerst over het onderste deeltje kruist en vervolgens ónder dat deeltje langskruist. Dit tweemaal rechtsom winden van twee deeltjes levert in de tweedimensionale wereld een winding waarbij de beginsituatie niet noodzakelijkerwijs gelijk is aan het resultaat na de winding. Deze winding wordt monodromie genoemd.

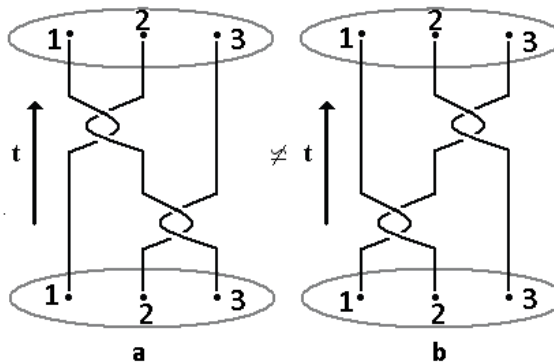
In bovenstaande uitleg was essentieel dat het om een wereld in  $(3 + 1)$  dimensies ging. In  $(2 + 1)$  dimensies is het namelijk níet mogelijk de baan van deeltje 2 ineen te trekken tot een punt zonder dat daarbij deeltje 2 wordt gesneden: de figuren (1b) en (1c) zijn in  $(2 + 1)$  dimensies níet aan elkaar gelijk. De figuren (1a), (1b) en (1c) kunnen ook worden weergegeven zoals in figuur (3). De tijd loopt nu langs de verticale as. De paden zijn de wereldlijnen van de deeltjes en geven de weg aan die de deeltjes afleggen in de ruimtetijd. Te zien is dat de paden van de deeltjes in de knoop raken. Duidelijk wordt nu dat figuur (3b) níet kan vervormd worden tot (3c) zonder dat de wereldlijnen elkaar snijden en de wereldlijnen mogen wel enigszins vervormd worden, maar níet elkaar snijden. (Enigszins vervormd houdt in dat er in een wereldlijn geen knopen mogen gemaakt worden en dat deze ook níet terug in de tijd mag.) De deeltjes die deze eigenschap in  $(2 + 1)$  dimensies bezitten worden anyonen genoemd. Anyonen hebben als effect op de golf functie van een systeem dat ze wel degelijk een niet-triviale uitwerking kunnen hebben op de golf functie van een systeem bij het twee keer omwisselen van twee deeltjes (monodromie genaamd, zie figuur 2). Anyonen kunnen Abels of niet-Abels zijn.



Figuur 3: De situaties die in dit figuur zijn geschetst spelen zich af in  $(2 + 1)$  dimensies. De figuren geven dezelfde situaties weer als figuur 1. De tijd loopt nu verticaal. De situaties in figuur a en b zijn nog steeds equivalent. Alleen figuur c is níet meer gelijk. Om figuur c te verkrijgen zou de wereldlijn van deeltje 2 doorgesneden moeten worden en weer geplakt en dat kan níet: het deeltje zou dan tijdelijk moeten verdwijnen. Deeltjes die aan deze eigenschappen in  $(2 + 1)$  dimensies voldoen, heten anyonen.

Abelse anyonen geven een golffunctie nadat ze tweemaal zijn omgewisseld een fasefactor:  $\phi(r_1, r_2) \rightarrow e^{2i\theta} \phi(r_1, r_2)$ . De waarde van  $\theta$  geeft het type anyon aan. Er zijn twee speciale gevallen:  $\theta = 0$  en  $\theta = \pi$ , voor deze waarden krijgt de golffunctie slechts een plus- of een minteken en hebben we dus weer te maken met bosonen en fermionen. Abels wil zeggen dat de volgorde waarin deeltjes worden omgewisseld niet van belang is.

Niet-Abelse anyonen zijn een stuk complexer. Bij deze anyonen maakt de volgorde van omwisseling wel degelijk uit (zie figuur 4). De golffunctie wordt nu ook niet met slechts een fasefactor vermenigvuldigd, want bij vermenigvuldiging met een getal (wat een fasefactor is) maakt de volgorde niet uit. De golffunctie is bij niet-Abelse anyonen een vector. Deze vector is vergelijkbaar met de spin van een deeltje. De omwisseling van twee niet-Abelse anyonen houdt dan een matrix in die werkt op de vector van de golffunctie. Matrices commuteren over het algemeen niet en daarom is nu de volgorde van verwisselen wel degelijk van belang. Het zijn deze niet-Abelse anyonen die kunnen worden gebruikt voor topologisch quantumrekenen en die een qubit kunnen vormen [9].



Figuur 4: De tijd loopt in dit figuur langs de verticale as omhoog en geeft een situatie weer in (2+1) dimensies. In figuur a worden eerst deeltje 2 en 3 twee keer met elkaar verwisseld, vervolgens worden deeltje 1 en 2 twee keer met elkaar verwisseld, de drie deeltjes eindigen in hun beginposities, maar de verwisselingen hebben wel effect op de golffunctie van het systeem. In figuur b worden eerst deeltje 1 en 2 tweemaal met elkaar verwisseld en daarna deeltje 2 en 3, waarna de deeltjes weer in een beginpositie terugkeren. Het effect dat deze verwisselingen hebben op de golffunctie is anders dan dat wat de verwisselingen in figuur a hebben. Daarom spreken we hier over niet-Abelse deeltjes.

## 2.2 Fusieregels

Een model voor topologisch quantumrekenen wordt, naast door anyonen, gekenmerkt door fusieregels. Dit zijn regels die vastleggen hoe de anyonen zich gedragen als ze fuseren. De algemene vergelijking voor een fusieregel luidt:

$$a \times b = \sum N_{abc}^c \quad (1)$$

Waarbij  $a$ ,  $b$  en  $c$  verschillende labels kunnen zijn.  $a$  en  $b$  zijn de te fuseren deeltjes en  $c$  is het resultaat van de fusie. Als  $N$  gelijk is aan 0 is er geen fusie tussen  $a$  en  $b$  mogelijk

waarbij het resultaat  $c$  is, als  $N$  wel een waarde heeft anders dan 0 volgen er uit fusie van  $a$  en  $b$   $N$  mogelijke waarden van  $c$ . Wanneer  $\sum_c N_{ab}^c \geq 2$  geldt, is de fusie niet-Abels, oftewel, de fusie kan in meer dan één kanaal plaatsvinden. Hierdoor maakt de volgorde waarin wordt gefuseerd wel degelijk uit, zoals in sectie (2.1) is besproken (zie ook figuur 6) [11].

De fusieregels zijn vergelijkbaar met tensorproducten van representaties van verschillende groepen. Voor spin- $\frac{1}{2}$  deeltjes in de  $SU$ -groep geldt bijvoorbeeld:  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 + 1$ , aangezien de totale spin voor twee deeltjes 0 is als ze tegengestelde richting opwijzen en 1 is als ze dezelfde richting opwijzen. Dezelfde soort regel kan ook worden opgesteld voor de dimensie van de spin- $\frac{1}{2}$  deeltjes. Zo'n deeltje wordt gezegd dimensie 2 te hebben, omdat deze twee mogelijke configuraties heeft: spin-up en spin-down. Wanneer nu alle mogelijkheden voor twee deeltjes met beide dimensie 2 worden uitgewerkt, worden de volgende mogelijkheden verkregen:

$$\begin{array}{c} \uparrow\uparrow \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \end{array} \quad (2)$$

$$\downarrow\downarrow \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \quad (4)$$

Het resultaat is dus één triplet en één singlet. De volgende regel geeft dit weer:  $2 \otimes 2 = 1 + 3$ . Algemeener gesteld geldt dan ook voor anyonen:

$$d_a \times d_b = \sum_c N_{ab}^c d_c \quad (6)$$

Voor de dimensies van de deeltjes  $a$ ,  $b$  en  $c$ . Op de waarde van de dimensie van het anyon kom ik terug in sectie 2.3.

Het Fibonaccimodel kent slechts twee labels: vacuüm, genoteerd als 1 en het label wat overeenkomt met het anyon zelf,  $\tau$ . De eigenschappen van deze labels liggen vast in de fusieregels van het Fibonaccimodel. Het label voor vacuüm werkt hier precies zoals verwacht: vermenigvuldigen met dit label verandert niets aan de situatie:

$$\tau \times 1 = \tau \quad (7)$$

$$1 \times 1 = 1 \quad (8)$$

De enige niet-triviale fusieregel die het Fibonaccimodel kent is:

$$\tau \times \tau = 1 + \tau \quad (9)$$

Dit wil zeggen dat wanneer twee anyonen fuseren dit tot twee uitkomsten kan leiden: ofwel de anyonen annihileren ofwel ze fuseren tot een nieuw anyon van hetzelfde type. Hierbij

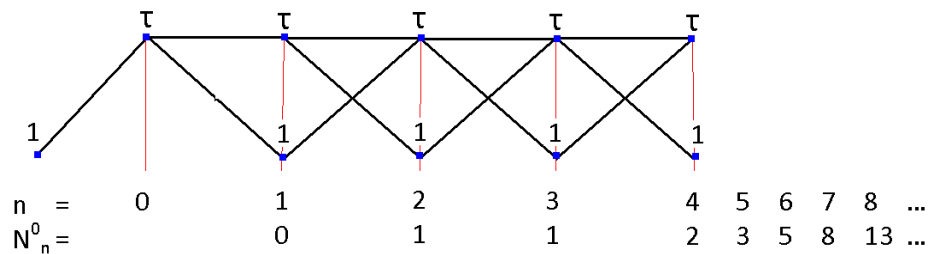
kan net als bij de algemene fusieregel (1) een uitkomst op meerdere manieren bereikt worden.

De fusieregels zijn opgesteld voor fusie tussen twee anyonen, maar gelden evengoed voor  $n$  anyonen. Fusie van  $n$  anyonen gaat als volgt: eerst worden de eerste twee anyonen gefuseerd, deze fusie heeft twee uitkomsten. Vervolgens worden deze beide uitkomsten elk gefuseerd met een anyon. Als het eerste fusieproduct 1 was is er volgens (7) slechts één mogelijke uitkomst wanneer er weer wordt gefuseerd. Als het eerste fusieproduct  $\tau$  bedraagt zijn er opnieuw twee mogelijke uitkomsten volgens (9). De nieuwe fusieproducten kunnen nu weer met een nieuw anyon worden gefuseerd en zo verder. De fusie van de  $n$  anyonen kan schematisch worden weergegeven in een Bratellidiagram (figuur 5) [9].

De dimensie van de fusieruimte  $V_{\tau^n}^1$ , de ruimte waarin  $n$  deeltjes fuseren tot vacuüm, kan worden genoteerd als:  $N_n^1 \equiv N_{\tau^n}^1$ . Deze dimensies, voor verschillende waarden van  $n$ , voldoen aan een recursievergelijking. Als je eerst de fusie van de eerste twee deeltjes bekijkt en deze is triviaal (vacuüm), dan kunnen de overige  $(n - 2)$  deeltjes op  $N_{n-2}^1$  verschillende manieren fuseren om als totaal fusieproduct 1 te krijgen. Als echter de fusie van de eerste twee anyonen tot een nieuw anyon leidt, dan kan dat anyon op  $N_{n-1}^1$  manieren met de overige  $n - 2$  anyonen fuseren. De recursievergelijking die hieruit volgt is:

$$N_n^1 = N_{n-1}^1 + N_{n-2}^1 \tag{10}$$

Aangezien één anyon op geen enkele manier de waarde 1 kan aannemen en twee anyonen op slechts één manier tot vacuüm kunnen fuseren geldt dat:  $N_1^1 = 0$  en  $N_2^1 = 1$ . De oplossing van (10) met deze beginwaarden wordt de Fibonaccireeks genoemd en staat weergegeven in figuur (5). Nu is meteen duidelijk waarom dit model het Fibonaccimodel heet en de gebruikte anyonen Fibonaccianyonen [11]. De Fibonaccireeks geeft ook duidelijkheid over de quantumdimensie van een anyon. Daar kom ik in sectie (2.3) op terug.

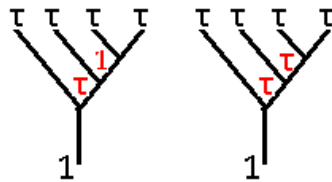


Figuur 5: Het Bratellidiagram geeft de mogelijke fusiekanalen voor  $n$  anyonen weer. Boven leveren de kanalen  $\tau$  en onder vacuüm. De reeks aangegeven met  $n$  geeft het aantal anyonen op dat punt in het diagram weer. De reeks aangeduid met  $N_n^0$  geeft de dimensie van de ruimte weer voor  $n$  deeltjes die naar vacuüm fuseren. Te zien is dat verschillende paden tot eenzelfde vacuüm kunnen leiden. Het aantal paden dat leidt tot een vacuüm dat gecreëerd is door  $n$  deeltjes samen te voegen is gelijk aan de dimensie van de ruimte waarin  $n$  deeltjes worden gefuseerd.



### 2.2.1 Fusiebomen

Fusie is schematisch weer te geven als een zogenaamde fusieboom. Een fusieboom heeft een aantal takken die elk 1 of  $\tau$  gelabeld zijn en deze takken worden in de boom samengevoegd tot dat er uiteindelijk één tak overblijft. Deze resulterende tak draagt zelf ook weer een label, dit label hangt af van de voorafgaande fusie. De begintakken kunnen meestal op verschillende manieren worden samengevoegd, bijvoorbeeld eerst tak 1 en tak 2 en daarna pas tak 3, maar dat kan juist ook precies andersom (dit heeft te maken met associativiteit van fusie, waar zo meer over wordt uitgelegd). Daarnaast kunnen de tussenliggende takken, oftewel de tussenliggende toestanden, ook verschillende labels dragen, wat het geval is omdat fusie van anyonen zowel kan resulteren in  $\tau$  als in 1. Fusie van vier  $\tau$  labels naar vacuüm kan als volgt worden weergegeven:



Figuur 6: Een fusieboom is een schematische weergave van een fusie. In dit figuur is de fusie van vier  $\tau$  labels naar vacuüm weergegeven. Het blijkt dat dezelfde fusieboom met dezelfde beginlabels op twee verschillende manieren kan worden ingevuld. Te zien is dat de tussengelegene toestanden van de twee bomen verschillen. Dit is de reden dat de dimensie van de ruimte waarin deze fusie plaatsvindt gelijk is aan  $N = 2$ .

### 2.3 Quantumdimensie

Het in sectie (2.2) beschreven Brattellidiagram en de daaruit volgende Fibonaccigetallen geven behalve duidelijkheid over de dimensie van een fusieruimte ook informatie over de dimensie van een anyon: de quantumdimensie;  $d_a$  voor een anyon van het type  $a$ . De factor waarmee Fibonaccigetallen vergroten is de mate waarin de ruimte vergroot als één anyon wordt toegevoegd. Door deze factor te achterhalen kan dus de quantumdimensie van het anyon worden bepaald. De quantumdimensie van een anyon van type  $a$  is gedefinieerd als het aantal fusiekanalen die te nemen zijn als vele anyonen van type  $a$  fuseren. Stel dat er  $N$  van deze deeltjes zijn, dan is het totale aantal fusiekanalen gelijk aan  $(d_a)^N$ , mits  $N$  groot is. Nu is  $c_a^b(N)$ , het aantal fusiekanalen waarbij  $N$  anyonen van het type  $a$  fuseren tot  $b$ , gedefinieerd als:

$$(a \times \bar{a})^{\times N} = \sum_b c_a^b(N) b \quad (11)$$

Waarbij  $\bar{a}$  de inverse van  $a$  [1]. Hieruit volgt:

$$\log(d_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \log c_a^1 \quad (12)$$

Uit (10) volgt dat voor anyonen van het type  $a$ , waarbij het fusieproduct nog even in het midden wordt gelaten, geldt:

$$c_a(N) = c_a(N-1) + c_a(N-2) \quad (13)$$

Wanneer je deze vergelijking deelt door  $c_a(N - 1)$  en neemt:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_a(N)}{c_a(N - 1)} \quad (14)$$

wordt (13):

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha^2 = 1 + \alpha \quad (15)$$

Uit (14) kan worden afgeleid dat:  $c_a(N) = \alpha^N$ . Tot nu toe is het fusieproduct in het midden gelaten, maar de quantumdimensie moet bepaald worden voor Fibonaccianyonen, dus:  $d_\tau$  voor anyonen van het type  $\tau$ . Dit is in sectie (2.2) bepaald met totale fusie resulterend in vacuüm (een andere keuze had kunnen zijn totale fusie resulterend in  $\tau$  te bepalen). Het gaat dus alleen om de even  $N$  en daarom geldt:  $N \equiv 2N$ . Dit geeft dan  $c_\tau(2N) = \alpha^{2N}$  en daardoor wordt (12):

$$\log d_\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \log \alpha^{2N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \log \alpha^{\frac{2N}{2N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \log \alpha \quad (16)$$

Voor grote waarden van  $N$  geldt dan dat  $d_\tau = \alpha$ , de quantumdimensie is gelijk aan  $\alpha$ . Wanneer nu de vierkantsvergelijking in (13) wordt berekend met behulp van de abc-formule wordt de waarde voor de quantumdimensie gevonden:  $\alpha = \phi$  met  $\phi = 1/2(1 + \sqrt{5})$  de gulden snede. De quantumdimensie is dus gelijk aan de gulden snede [11].

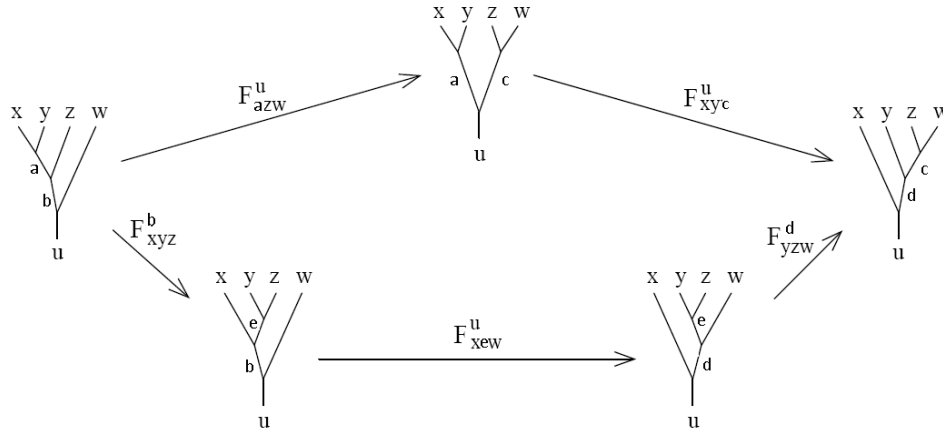
## 2.4 Associativiteit van fusie: de F-matrix

De fusie van  $N$  deeltjes, zoals zojuist besproken, werd uitgevoerd van links naar rechts. Het is echter ook mogelijk om de fusie van rechts naar links te laten verlopen, zonder dat het resultaat van de fusie verandert. Fusie is dus associatief:  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ . De associativiteit van fusie komt voort uit het feit dat het resultaat van een fusie van drie deeltjes een intrinsieke eigenschap van de drie deeltjes samen is en dus niet mag afhangen van of eerst de twee linker of eerst de twee rechter deeltjes fuseren.

Het gevolg van de associativiteit van fusie is dat er twee bases zijn om de toestanden van anyonen in uit te drukken. Als dit wordt bekeken voor drie anyonen kunnen de twee bases in elkaar worden omgeschreven door middel van een unitaire  $(2 \times 2)$ -matrix, de F-matrix.

De F-matrix zet de ene set van basistoestanden van de anyonen dus om in de andere set. Dit maakt het mogelijk om te vlechten in verschillende bases. Als later de vlechtoperaties bepaald worden is het dus belangrijk de F-matrix te kennen.

De F-matrix ligt vast in een consistentierelatie, genaamd de pentagonrelatie [8]. De pentagonrelatie komt voort uit het feit dat om een fusieruimte van vijf takken van de ene basis om te zetten in de andere basis twee mogelijke paden gevolgd kunnen worden (figuur 7). Deze twee paden zijn aan elkaar gelijk omdat ze dezelfde operatie representeren. De paden worden gevormd door opeenvolgende F-moves. Tijdens een F-move wordt steeds



Figuur 7: De pentagonrelatie: zowel via de reeks  $F$ -moves bovenlangs, als de reeks onderlangs wordt de fusieruimte aan de linkerkant omgezet in de fusieruimte aan de rechterkant. Beide reeksen hebben hetzelfde effect als het toepassen van de  $F$ -matrix, daarom kan de  $F$ -matrix bepaald worden aan de hand van de pentagonrelatie [12].

één verandering aangebracht in de manier van fuseren. De manier van fuseren wordt tijdens een  $F$ -move dus veranderd, maar het fusieproduct blijft hetzelfde [2].

De  $F$ -moves zijn de matrixelementen van de  $F$ -matrix, omdat een complete reeks van  $F$ -moves gelijk is aan vermenigvuldigen met de  $F$ -matrix. De  $F$ -matrix kan dus uit de pentagonrelatie bepaald worden door de paden aan elkaar gelijk te stellen. Een  $F$ -move kan als volgt worden aangeduid:  $[F_{abc}^d]_i^j$ . Hierin zijn  $a$ ,  $b$  en  $c$  de takken die fuseren en  $d$  het resultaat van de fusie. De twee indices buiten de rechte haken volgen uit de verandering van de tussenliggende toestanden van de fusie en zijn gelijk aan de indices die de plaats weergeven van het matrixelement in de  $F$ -matrix.

De pentagonrelatie gebruikt ruimtes waarin vier takken tot een vijfde fuseren. De labels kunnen volgens het model 1 of  $\tau$  zijn. Aangezien er twee labels zijn en vijf takken, zijn er zonder rekening te houden met de fusieregels  $2^5 = 32$  mogelijke fusieruimtes. Wanneer de labels echter worden toegekend volgens de fusieregels zijn er 27 niet-triviale geldende fusies. Zoals eerder gezegd moet fusie niet-Abels zijn om een model voor topologisch quantumrekenen te verkrijgen. De fusieruimtes moeten dus minstens dimensie 2 hebben. Van de 27 verschillende ruimtes zijn er 6 die een dimensie van 2 of hoger hebben:  $F_{1\tau\tau\tau}^\tau(N=2)$ ,  $F_{\tau 1\tau\tau}^\tau(N=2)$ ,  $F_{\tau\tau 1\tau}^\tau(N=2)$ ,  $F_{\tau\tau\tau 1}^\tau(N=2)$ ,  $F_{\tau\tau\tau\tau}^\tau(N=3)$  en  $F_{\tau\tau\tau\tau}^1(N=2)$ .

Door de twee reeksen  $F$ -moves aan elkaar gelijk te stellen kan een algemene vergelijking behorend bij de pentagonrelatie bepaald worden. De bovenste reeks houdt sommatie over  $c$  en  $d$  in, de onderste over  $c$ ,  $d$  en  $e$ . Dit resulteert in de volgende vergelijking:

$$[F_{12c}^5]_a^d [F_{a34}^5]_b^c = \sum_e [F_{234}^d]_e^c [F_{1e4}^5]_b^d [F_{123}^b]_a^e \quad (17)$$

Deze vergelijking kan worden ingevuld voor elk van de zes fusieruimtes. Waarin 1, 2, 3 en 4 vervangen worden door één van de twee labels.  $a$ ,  $b$  en  $c$  zijn de tussengelegen

toestanden, die in de vergelijking nog moeten worden bepaald. De zes vergelijkingen die volgen uit het invullen van de algemene vergelijking kunnen worden opgelost op de volgende wijze. De F-moves die de vergelijkingen vormen worden ingedeeld in twee typen:  $F_{1\tau\tau\tau\tau} \equiv F_1$  en  $F_{\tau\tau\tau\tau} \equiv F_\tau$ . Voor  $F_1$  geldt dat het eigenlijk niets anders is dan een getal:  $[F_1]_a^b = \delta_a^\tau \delta_\tau^b$ , en levert daarom of een 0 of een 1 op.  $F_\tau$  is daarentegen een element uit de F-matrix en precies wat achterhaald moet worden. Door deze mogelijkheden voor de F-matrixelementen in de zes vergelijkingen in te vullen blijken er slechts twee vergelijkingen een niet-triviale uitkomst op te leveren. Uit het invullen van  $F_{\tau\tau\tau\tau}^1$  komt de volgende vergelijking voort:

$$1 = \sum_e [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_e^c [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_a^e \quad (18)$$

Waarin volgens de pentagonrelatie geldt dat  $a = c = \tau$  of 1 en  $e = \tau$  of 1. Hieruit volgt dat de F-matrix een unitaire matrix is, want  $FF^\dagger = 1$ .

Door het oplossen van deze vergelijking is nog niet bekend geworden wat de F-matrix is. De tweede niet-triviale vergelijking luidt:

$$[F_{\tau\tau c}^\tau]_a^d [F_{a\tau\tau}^\tau]_b^c = \sum_e [F_{\tau\tau\tau}^d]_e^c [F_{\tau e\tau}^\tau]_b^d [F_{\tau\tau\tau}^b]_a^e \quad (19)$$

Waarbij opnieuw  $a, b, c$  en  $d$  gelijk kunnen zijn aan 1 of  $\tau$ . Door nu alle mogelijke combinaties van labels van deze vier variabelen in (19) in te vullen, volgen er acht vergelijkingen waarvan er vier niet-triviaal zijn. De vergelijkingen bevatten vier onbekenden, de matrixelementen. De matrixelementen kunnen reëel of complex zijn, dat moet nog blijken, en zijn als volgt gedefinieerd:

$$F = F_{\tau\tau\tau}^\tau = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{1\tau} \\ F_{\tau 1} & F_{\tau\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \quad (20)$$

De vier niet-triviale vergelijkingen zijn:

$$xy = w \quad (21)$$

$$z^2 = yx + z^3 \quad (22)$$

$$0 = w^2 + xyz \quad (23)$$

$$1 = w + z^2 \quad (24)$$

Door (21) in (23) in te vullen blijkt dat  $w = 0$  of  $w = -z$ . Er moet worden verder gewerkt met  $w = -z$ , aangezien  $w = 0$  een triviale uitkomst oplevert.

Door  $w = -z$  in te vullen in (24) wordt een vierkantsvergelijking verkregen:  $z^2 - z - 1 = 0$ . Deze vergelijking is gelijk aan degene die eerder is verkregen bij het bepalen van de quantumdimensie (13) in de vorige sectie. Dit betekent dus dat  $z = \alpha = \phi$ .

Voor  $w$  kan ook een vierkantsvergelijking worden opgesteld door opnieuw  $w = -z$  in (24) in te vullen. Hieruit volgen twee oplossingen:  $w = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = \phi - 1$  en  $w = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = -\phi$  met  $\phi$  de gulden snede. Volgens [11] is de eerste waarde  $\phi - 1$  precies gelijk aan de waarde voor  $\tau$ , er geldt dus dat  $w = \tau$  en daarom dat  $z = -\tau$ .

De onbekenden die nu nog bepaald dienen te worden zijn  $x$  en  $y$ . Hiervoor gebruik ik de unitariteit van de F-matrix:

$$UU^\dagger = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & y^* \\ x^* & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Hieruit volgt dat:  $y^* = x$  en  $y = x^*$ . Dit geeft met (21) als een algemene oplossing voor  $x$  en  $y$ :  $x = e^{i\theta}\sqrt{\tau}$  en  $y = e^{-i\theta}\sqrt{\tau}$ . De e-machten zijn twee willekeurige fases die, met de juiste waarde van  $\theta$ , op 1 gesteld kunnen worden.

Nu zijn alle matrixelementen bekend. Door ze in te vullen in (20) wordt de F-matrix:

$$F = \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & -\tau \end{pmatrix} \quad (26)$$

De F-matrix is dus een reële unitaire  $2 \times 2$ -matrix. Ik zal deze zo gebruiken om de elementaire vlechtoperaties vast te leggen [11].

### 3 Vlechten

Nu alle basisingrediënten van het Fibonaccimodel behandeld zijn, kan het vlechten van anyonen nader bekeken worden. Zoals inmiddels bekend, is het mogelijk de wereldlijnen van anyonen te vlechten om zo logische quantumpoorten te verwerven. Zodra er een systeem is met minstens twee anyonen kunnen er oneindig veel vlechten gemaakt worden. De mogelijke vlechten van  $n$  anyonen zijn in één-op-één relatie met de elementen uit de vlechtgroep  $B_n$ . Het simuleren van berekeningen is dan het op een bepaalde manier vlechten van anyonen oftewel achtereenvolgens toepassen van verschillende elementen uit de vlechtgroep [3].

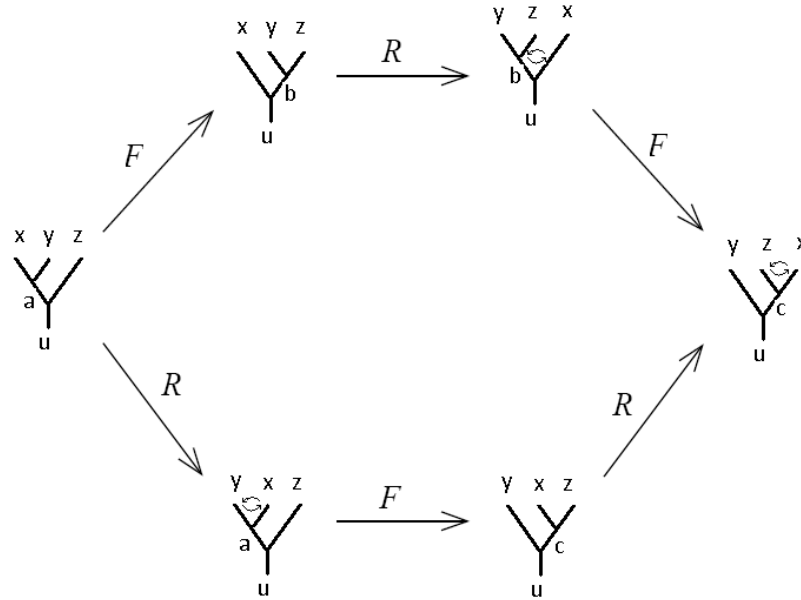
Het doel is nu te achterhalen hoe het vlechten in zijn werk gaat, want als dat bekend is kan worden nagegaan of alle mogelijke berekeningen daadwerkelijk uitgevoerd kunnen worden op een Fibonacci quantumcomputer. Om vlechtoperaties te kunnen bepalen zal eerst het effect van het verwisselen van anyonen bepaald moeten worden.

#### 3.1 De R-matrix

Neem nu een systeem met identieke anyonen, waarin er twee adiabatisch verwisseld worden. In  $(3 + 1)$  dimensies leidde dit tot ofwel een vermenigvuldiging met een minteken ofwel geen verandering van de golffunctie van het systeem. Waarmee het fundamentele onderscheid tussen bosonen en fermionen wordt gemaakt. In  $(2 + 1)$  dimensies resulteert de adiabatische verwisseling van twee anyonen in één van de twee labels, 1 of  $\tau$ , maar de vraag is nu welk effect dit heeft op de golffunctie. Eerder was al vastgesteld, dat een dergelijke verwisseling een unitaire  $2 \times 2$ -matrix inhoudt die op de vector van de golffunctie werkt. Deze matrix wordt de R-matrix genoemd en die ga ik nu bepalen.

Om de R-matrix te bepalen wordt, net als bij het bepalen van de F-matrix, een consistentierelatie gebruikt. Ditmaal de hexagonrelatie [8]. Ook deze relatie komt voort uit het feit dat er twee verschillende reeksen van moves zijn die van de ene fusieruimte naar de andere fusieruimte leiden figuur (8). In de reeksen komen zowel F-moves als R-moves voor. Een R-move representeert de verwisseling van twee takken of groepen van takken in de fusieruimte. De R-moves zijn de matrixelementen van de R-matrix, aangezien de totale verwisseling die plaatsvindt om van de ene fusieruimte naar de andere fusieruimte te gaan gelijk is aan het vermenigvuldigen met de R-matrix. Een R-move wordt aangeduid met:  $[R_{ab}^c]^i_j$ . Hierin zijn  $a$  en  $b$  de twee (groepen van) takken die verwisseld worden en  $c$  het resultaat van de verwisseling. De indices  $i$  en  $j$ , veranderen tijdens een R-move niet en zijn in de algemene vergelijking die volgt uit de hexagonrelatie niet van belang, maar zet ik er toch bij omdat ze later van belang zijn om te bepalen om welk matrixelement het gaat [2].

Omdat er nu drie takken fuseren tot een vierde tak zijn er  $2^4 = 16$  fusieruimtes, maar volgens de fusieregels zijn hiervan slechts 12 niet-triviale ruimtes geldig. Wanneer nu wordt gekeken welke fusies niet-Abels zijn, blijft er maar één fusieruimte over: de ruimte waarin fusie plaatsvindt van drie anyonen tot een vierde anyon. Door dit in de hexagonrelatie in

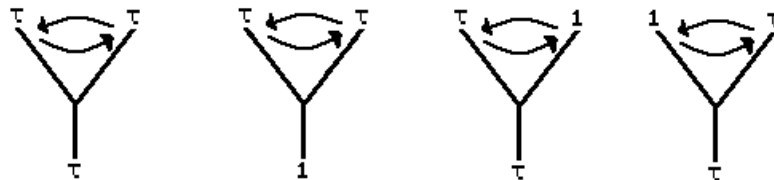


Figuur 8: De hexagonrelatie gebruikt ruimtes waarin drie takken fuseren tot een vierde tak. Tijdens een R-move worden twee takken verwisseld en tijdens een F-move verandert een tak van plaats. Het fusieresultaat blijft telkens hetzelfde [12].

te vullen kan een vergelijking worden opgesteld:

$$[R_{\tau\tau}^c]_c [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_a [R_{\tau\tau}^a]_a = \sum_b [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_b [R_{\tau b}^\tau]_b [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_a \quad (27)$$

Nu moeten voor de nog onbekende  $a$ ,  $b$  en  $c$  alle mogelijke combinatie van labels worden ingevuld. De vergelijkingen die zo ontstaan, moeten als volgt worden opgelost. De F-matrixelementen zijn al bekend en kunnen zo worden ingevuld. Voor de R-matrixelementen zijn er vier mogelijkheden figuur (9). Van deze vier mogelijkheden zijn er twee triviaal, omdat ze verwisseling met het vacuüm inhouden. Deze matrixelementen leveren dus geen bijdrage. Er blijven er twee over.



Figuur 9: De vier verwisselingen zijn gelijk aan de matrixelementen van de F-matrix. De eerste twee verwisselingen zijn niet-triviaal. De derde en de vierde zijn wel triviaal omdat ze een verwisseling met vacuüm inhouden wat hetzelfde resultaat heeft als niet verwisselen.

De twee niet-triviale matrixelementen zijn als volgt gedefinieerd:

$$R = \begin{pmatrix} [R_{\tau\tau}^1]_1^1 & 0 \\ 0 & [R_{\tau\tau}^\tau]_\tau^\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad (28)$$

Nu is ook duidelijk waarom de indices  $i$  en  $j$  wel van belang zijn: de plek waar de twee niet-triviale matrixelementen thuishoren in de matrix is duidelijk. De drie niet-triviale oplossingen waaruit de twee matrixelementen afgeleid moeten worden, luiden:

$$m^2 + \tau m + 1 = 0 \quad (29)$$

$$l^2 = \tau + m \quad (30)$$

$$lm = \tau - \tau m \quad (31)$$

Daarnaast zijn er nog twee vergelijkingen die gebruikt kunnen worden om een oplossing te vinden. Deze komen voort uit het feit dat de R-matrix unitair is:

$$ll^* = 1 \quad (32)$$

$$mm^* = 1 \quad (33)$$

Uit (32) en (33) volgt dat moet gelden dat  $l$  en  $m$  van de vorm:  $e^{i\theta}$  zijn. Om  $m$  te bepalen moet (29) opgelost worden met behulp van de abc-formule voor negatieve discriminant. Het tussenresultaat:  $m = \frac{-\tau}{2} \pm i \frac{\sqrt{4-\tau^2}}{2}$  kan worden geschreven in termen van sinus en cosinus, waarna het eindresultaat voor  $m$  wordt bereikt door om te schrijven naar een exponent. Zo wordt de waarde van  $m$  gevonden:  $m = -e^{2\pi i/5}$ .

$l$  wordt bepaald door (31) op te lossen. Dit wordt gedaan door na invullen van  $m$  de vergelijking in de vorm  $l = \cos x + i \sin x$  te schrijven, waarna makkelijk de exponent bepaald kan worden. Dit levert:  $l = e^{4\pi i/5}$ .

Als matrixelementen worden dus gevonden:  $[R_{\tau\tau}^\tau]_\tau^\tau = -e^{2\pi i/5}$  en  $[R_{\tau\tau}^1]_1^1 = e^{4\pi i/5}$ . De R-matrix die zo wordt gevonden is:

$$R = \begin{pmatrix} e^{4\pi i/5} & 0 \\ 0 & -e^{2\pi i/5} \end{pmatrix} \quad (34)$$

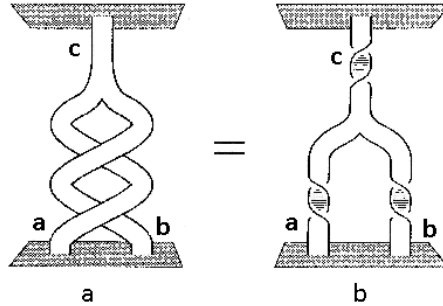
Dit is de matrix die op de vector van de golf functie werkt wanneer twee anyonen eenmaal verwisseld worden, het is een imaginaire unitaire  $2 \times 2$ -matrix [11].

### 3.2 Spin van anyonen

Nu de R-matrix bepaald is, wordt het mogelijk een belangrijke eigenschap van deeltjes vast te stellen: de spin. Ofwel de niet-Abelse generalisatie van de spinstatistiekrelatie te bepalen. In het algemeen wordt spin gedefinieerd als de exponent in de fasefactor waarmee de golf functie van een deeltje wordt vermenigvuldigd bij rotatie van het deeltje



over  $2\pi$  over een willekeurige as. De fasefactor is gedefinieerd als:  $\theta = e^{2\pi hi}$  met  $h$  de spin. In  $(3 + 1)$  dimensies kunnen identieke nietonderscheidbare deeltjes of heeltallige spin (bosonen) of halftallige spin (fermionen) hebben. In  $(2 + 1)$  dimensies kan de spin echter elke reële waarde aannemen. Anyonen kunnen dus een fractionele spin hebben. Om de spin te bepalen maak ik gebruik van een algemene consistentierelatie tussen het vlechten en het roteren van anyonen. Deze consistentierelatie stelt dat het twee keer met elkaar laten verwisselen van anyonen topologisch gezien identiek is aan het op een bepaalde wijze roteren van anyonen om hun eigen as (zie figuur 10).



Figuur 10: In deze afbeelding loopt de tijd verticaal omhoog. In de linker afbeelding worden twee anyonen twee maal met elkaar verwisseld, waarna ze fuseren. In de rechter afbeelding worden eerst de twee anyonen allebei eenmaal linksom gerotereerd over  $2\pi$ , waarna het fusieproduct van de twee deeltjes rechtsom wordt gerotereerd. Wanneer je deze twee situaties nabootst met bijvoorbeeld bretels, blijken ze topologisch identiek te zijn [1]!

Omdat de twee situaties topologisch identiek zijn en het roteren van een anyon om zijn as de spin van het anyon geeft kan deze relatie gebruikt worden om de spin te bepalen, mits bekend is wat het resultaat is van het tweemaal verwisselen van twee anyonen. Aangezien zojuist de R-matrix is vastgesteld, is bekend wat er gebeurt als twee deeltjes verwisseld worden. Het tweemaal met elkaar uitwisselen is dan gelijk aan het kwadraat van de R-matrix:  $(R^2)$ . Voor de situatie die is weergegeven in figuur (10b) geldt logischerwijs de formule:  $\theta_c \theta_a^{-1} \theta_b^{-1}$  [1]. Aangezien geconstateerd was dat beide situaties topologisch identiek zijn kan worden gesteld dat:

$$R^2 = \theta_c \theta_a^{-1} \theta_b^{-1} = e^{2\pi i(h_c - h_a - h_b)} \quad (35)$$

Voor  $R$  zijn, zoals in sectie (3.1) duidelijk werd, twee mogelijkheden: uitwisseling van twee anyonen wat leidt tot  $\tau$ , de waarde in de R-matrix die hier bij hoort luidt:  $R_{\tau\tau}^\tau = -e^{2\pi i/5}$  en uitwisseling resulterend in 1, met als waarde:  $R_{\tau\tau}^1 = e^{4\pi i/5}$ . Invullen in (35) geeft:

$$(R_{\tau\tau}^\tau)^2 = e^{2\pi i(h_\tau - h_\tau - h_\tau)} = e^{-2\pi i h_\tau}; R_{\tau\tau}^\tau = \pm e^{-\pi i h_\tau} = -e^{2\pi i/5} \quad (36)$$

en:

$$(R_{\tau\tau}^1)^2 = e^{2\pi i(h_1 - h_\tau - h_\tau)} = e^{2\pi i(h_1 - 2h_\tau)}; R_{\tau\tau}^1 = \pm e^{\pi i(h_1 - 2h_\tau)} = e^{4\pi i/5} \quad (37)$$

Deze vergelijkingen leveren voor de spin van het anyon  $2/5$ , een fractionele spin dus en voor de spin van het vacuum 0.

## 4 Topologisch quantumrekenen met Fibonaccianyonen

Nu zijn alle ingrediënten om te kunnen vlechten bekend. Maar er kan natuurlijk niet in het wilde weg met wereldlijnen van anyonen gevlochten worden. De vlechten moeten ergens uit opgebouwd worden én moeten ergens op kunnen werken. Daarom worden in dit hoofdstuk de elementaire vlechtoperaties en de quantum bits (qubits) besproken.

### 4.1 Qubits

Quantum bits, kortweg qubits, zijn de eenheden van een topologische quantumcomputer waarop operaties kunnen worden losgelaten. Een qubit is een eenheid van drie deeltjes. Het lijkt misschien logischer om een qubit simpelweg uit twee anyonen te laten bestaan. Echter, het is dan niet mogelijk om het totale quantumgetal van de qubit te veranderen door te vlechten binnen het qubit. Dit betekent dat als een qubit uit twee deeltjes zou bestaan het om elkaar winden van deze deeltjes nooit het quantumgetal zou kunnen veranderen van 1 naar  $\tau$  of omgekeerd. Bij het winden van twee deeltjes om elkaar in een groep van drie deeltjes kan dit echter wel.

De drie deeltjes kunnen zich in twee toestanden  $|0\rangle$  of  $|1\rangle$  bevinden, of in een superpositie van de toestanden:  $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$  [9]. De toestanden kunnen beïnvloed worden door het vlechten van de deeltjes. Wat deze toestanden inhouden zal ik in de volgende sectie verduidelijken.

### 4.2 Basistoestanden

De qubits kunnen pas gebruikt worden als bekend is in welke toestanden ze kunnen verkeren. Uit (1) is bekend dat twee anyonen slechts kunnen fuseren tot twee mogelijke orthogonale toestanden, een waarbij ze fuseren tot 1 en een waar ze fuseren tot  $\tau$ . Deze toestanden kunnen worden weergegeven als:  $|(\bullet, \bullet)_1\rangle$  en  $|(\bullet, \bullet)_\tau\rangle$ , waarbij een bullet voor een anyon staat. Wanneer er nu nog een deeltje wordt toegevoegd, kunnen opnieuw de fusieregels worden toegepast, waardoor de toestand die 1 bedraagt fuseert tot  $\tau$  en de toestand die  $\tau$  bedraagt fuseert tot 1 of tot  $\tau$ :

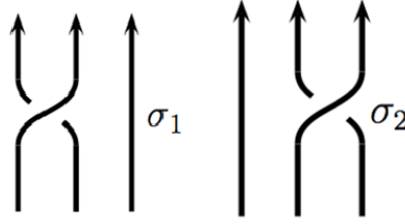
$$|((\bullet, \bullet)_1, \bullet)_\tau\rangle \equiv |0\rangle \quad (38)$$

$$|((\bullet, \bullet)_\tau, \bullet)_\tau\rangle \equiv |1\rangle \quad (39)$$

$$|((\bullet, \bullet)_\tau, \bullet)_1\rangle \equiv |N\rangle \quad (40)$$

De Hilbertruimte voor drie deeltjes is dus driedimensionaal. Er wordt een twee dimensionale deelruimte gekozen om een qubit mee te definiëren. Het blijkt dat de keuze van  $|0\rangle$  of  $|1\rangle$  een interessante keuze is, zoals later volgt. De derde toestand,  $|N\rangle$ , blijft tijdens operaties altijd onaangeroerd (dit zal in de volgende sectie duidelijk worden). Het is een niet computationele toestand: de qubit toestanden blijven ontkoppeld van deze extra toestand. Toch is het derde anyon van belang om te zorgen dat de vlechtoperaties genoeg verschillende acties op de qubit genereren.

### 4.3 Elementaire vlechtoperaties



Figuur 11: De twee elementaire vlechtoperaties waarmee elke willekeurige vlecht geconstrueerd kan worden.  $\sigma_1$  houdt een verwisseling van de eerste twee deeltjes in.  $\sigma_2$  houdt een verwisseling van de twee rechter deeltjes in.

Er zijn twee elementaire vlechtoperaties voor drie deeltjes:  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  (figuur 11). De vlechtoperaties worden gerepresenteerd door matrices:  $\rho(\sigma_1)$  en  $\rho(\sigma_2)$ . Deze matrices worden op hun beurt vastgelegd door de F en de R-matrix.

De operatie  $\sigma_1$  is een uitwisseling van de twee linker deeltjes. Het resultaat van een uitwisseling van twee deeltjes wordt, zoals bekend, voorgesteld door de R-matrix. Het gaat hier echter om een uitwisseling van twee deeltjes in een groep van drie deeltjes. Er moet in de elementaire vlechtoperatie dus rekening gehouden worden met het feit dat er drie basistoestanden zijn in plaats van twee. Uit (39) en (40) volgt dat de fase die voortkomt uit het omwisselen van de eerste twee deeltjes voor  $|1\rangle$  en  $|N\rangle$  hetzelfde is. De eerste elementaire vlechtoperatie wordt dan:

$$\rho(\sigma_1) = \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\pi i/5} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\pi i/5} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Dit is het resultaat voor de eerste elementaire vlechtoperatie. Er geldt dat  $\rho(\sigma_1)\rho(\sigma_1)^\dagger$  gelijk is aan de eenheidsmatrix. Het is dus inderdaad een unitaire matrix (wat moet, omdat het hier om een unitaire representatie van de vlechtgroep gaat). De uitwerking van een matrix op een qubit is echter niet duidelijk. Daarom moet de operatie geparametriseerd worden in de  $SU(2)$ -ruimte, op deze manier is namelijk wel duidelijk hoe de operatie op de qubit werkt. Voor  $\rho(\sigma_1)$  geldt:

$$\rho \in U(2) \sim U(1) \times SU(2) \quad (42)$$

Waarbij  $U(1)$  wordt voorgesteld door een matrix die evenredig is met de eenheidsmatrix en dezelfde determinant heeft als  $\rho(\sigma_1)$ .  $SU(2)$  wordt voorgesteld door een unitaire  $(2 \times 2)$ -matrix met determinant 1. Eerst moet de determinant van  $\rho(\sigma_1)$  berekend worden. Deze bedraagt:  $-e^{-6\pi i/5} = e^{-\pi i/5}$ . Omdat  $U(1)$  ook deze determinant moet hebben en evenredig moet zijn met de eenheidsmatrix, moet gelden dat de matrixelementen van  $U(1)$  gelijk zijn aan:  $\sqrt{\det(\rho(\sigma_1))} = e^{-\pi i/10}$ .  $U(1)$  wordt dan:

$$U(1) = \begin{pmatrix} e^{-\pi i/10} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/10} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Aangezien (58) geldt, kan de  $SU(2)$ -matrix berekend worden door  $\rho \times U(1)^{-1}$  te bepalen. Dan geldt:

$$SU(2) = \begin{pmatrix} e^{\pi i/10} & 0 \\ 0 & e^{\pi i/10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5} & 0 \\ 0 & -e^{-2\pi i/5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-7\pi i/10} & 0 \\ 0 & e^{7\pi i/10} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Welke ook determinant 1 heeft. (58) is uitgedrukt in exponenten gelijk aan:  $U(1) \sim e^{i\beta} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2} \in U(2)$ , waarbij inmiddels bekend is dat  $\beta$  gelijk is aan  $-\pi/10$ , wanneer vergeleken wordt met (43). In de  $SU(2)$ -term is  $\alpha$  de vector die de ruimte parametrizeert, waarbij  $\hat{\alpha} = a_1 + a_2 + a_3$  en  $\sigma$  de Paulimatrixes. Om de  $SU(2)$ -term als een matrix te schrijven moet het eerst geëxpandeerd worden:  $e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2} = 1 + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2 - \frac{1}{2!}(i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2)^2 - i\frac{1}{3!}(i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2)^3 + \dots + \dots - \dots - \dots = \cos \frac{\alpha}{2} \sigma_0 + i \sin \frac{\alpha}{2} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})$ . Dit kan geschreven worden als een matrix:

$$e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} + ia_3 \sin \frac{\alpha}{2} & ia_1 \sin \frac{\alpha}{2} + a_2 \sin \frac{\alpha}{2} \\ ia_1 \sin \frac{\alpha}{2} - a_2 \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} - ia_3 \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Door het gelijkstellen van deze matrix aan de gevonden matrix voor  $SU(2)$  (44), kunnen  $a_1$ ,  $a_2$  en  $a_3$  en zo  $\hat{\alpha}$  bepaald worden.  $a_2$  wordt bepaald door de reële gedeelten van de matrices aan elkaar gelijk te stellen:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & a_2 \sin \frac{\alpha}{2} \\ -a_2 \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{7\pi}{10} & 0 \\ 0 & \cos \frac{7\pi}{10} \end{pmatrix} \quad (46)$$

Hieruit blijkt dat  $a_2 = 0$ .  $a_1$  en  $a_3$  worden bepaald, door de imaginaire gedeelten van de twee matrices aan elkaar gelijk te stellen:

$$\begin{pmatrix} a_3 \sin \frac{\alpha}{2} & a_1 \sin \frac{\alpha}{2} \\ a_1 \sin \frac{\alpha}{2} & -a_3 \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{7\pi}{10} & 0 \\ 0 & \sin \frac{7\pi}{10} \end{pmatrix} \quad (47)$$

Hieruit volgt dat  $a_1 = 0$  en  $a_3 = -1$ . De vector die hieruit volgt voor  $\rho(\sigma_1)$  is dan:  $\hat{\alpha} = (0, 0, -1)$ .

De tweede elementaire vlechtoperatie is minder makkelijk te bepalen. Het gaat nu om een verwisseling van de twee rechter deeltjes in plaats van de linker deeltjes. Er moet dus eerst van basis worden gewisseld. Dit kan, zoals inmiddels bekend, door toepassen van de F-matrix. Daarna kan wel de R-matrix worden toegepast om de verwisseling van de twee rechter deeltjes te bewerkstelligen, om tot slot weer naar de oude basis terug te keren door de inverse F-matrix toe te passen. Dus de tweede elementaire vlechtoperatie kan worden genoteerd als:  $\rho(\sigma_2) = F^{-1}RF$ . De inverse F-matrix is gemakkelijk te bepalen, aangezien de F-matrix een unitaire matrix is en dus geldt dat:  $F^{-1} = F^\dagger$ .  $F^{-1}RF$  ziet er dan als volgt uit:

$$F^{-1}RF = \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau} & 0 \\ \sqrt{\tau} & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\pi i/5} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\pi i/5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau & \sqrt{\tau} & 0 \\ \sqrt{\tau} & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$= \begin{pmatrix} \tau^2 e^{4\pi i/5} - \tau e^{2\pi i/5} & \tau^{3/5}(e^{4\pi i/5} + e^{2\pi i/5}) & 0 \\ \tau^{3/2}(e^{4\pi i/5} + e^{2\pi i/5}) & -\tau e^{4\pi i/5} - \tau^2 e^{2\pi i/5} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2\pi i/5} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Tijdens de bepaling van de R-matrix, verkreeg ik bij het omschrijven naar sinus en cosinus van de variabele  $m$  de volgende relatie:  $1/\phi = \tau = 2 \cos 2\pi/5$ . Deze kan nu perfect gebruikt worden om (48) te vereenvoudigen. De hele matrix kan nu namelijk in termen van sinus en cosinus geschreven worden, waarna makkelijk elk matrixelement in exponent vorm geschreven kan worden. Het resultaat is:

$$\rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -e^{-\pi i/5}/\phi & -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} & 0 \\ -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} & -1/\phi & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\pi i/5} \end{pmatrix} \quad (50)$$

De reden om de tweede vlechtoperatie zo te schrijven is omdat dan later bij het nagaan van de unitariteit van de matrix de relatie:  $\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} = 1$ , wat gelijk is aan (13), kan worden toegepast.

Nu kan deze matrix ook geparametriseerd worden in de  $SU(2)$ -ruimte. Ik zal de berekening ingekort laten zien, omdat deze op precies dezelfde wijze kan worden uitgevoerd als bij  $\rho(\sigma_1)$ . Eerst wordt weer de determinant bepaald:  $\det(\rho(\sigma_2)) = e^{-\pi i/5}$ , waarbij bij het uitrekenen is gebruikt dat  $\frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} = 1$ . De  $U(1)$ -matrix moet dezelfde determinant hebben, maar ook evenredig zijn met de eenheidsmatrix en krijgt dus de vorm:

$$U(1) = \begin{pmatrix} e^{-\pi i/10} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/10} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Dit is dezelfde matrix als bij de eerste elementaire operatie.  $SU(2)$  wordt nu berekend door (51) en  $\rho(\sigma_2)$  in te vullen in (58). Hieruit volgt voor  $SU(2)$ :

$$SU(2) = \begin{pmatrix} -e^{-\pi i/10}/\phi & -i/\sqrt{\phi} \\ -i/\sqrt{\phi} & e^{\pi i/10}/\phi \end{pmatrix} \quad (52)$$

De determinant van deze matrix is 1 en hij is unitair, dus het is inderdaad een matrix die behoort tot de  $SU(2)$ -groep. Opnieuw kan gesteld worden dat:  $U(1) \sim e^{i\beta} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2} \in U(2)$ . Waarbij  $\beta$  wederom gelijk is aan  $-\pi/10$ , wanneer vergeleken wordt met (51). In de  $SU(2)$ -term kan  $\alpha$  weer worden uitgedrukt als:  $\hat{\alpha} = a_1 + a_2 + a_3$ . Door nu de  $SU(2)$ -matrix gelijk te stellen aan (45) kunnen  $a_1$ ,  $a_2$  en  $a_3$  bepaald worden voor de tweede elementaire vlechtoperatie en zo de parametrisatie in de ruimte.

De reële en imaginaire delen van de  $SU(2)$ -matrix worden bepaald door om te schrijven naar cosinussen en sinussen. Zo wordt voor het reële deel gevonden:

$$Re[SU(2)] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\phi} \cos \frac{\pi}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\phi} \cos \frac{\pi}{10} \end{pmatrix} \quad (53)$$

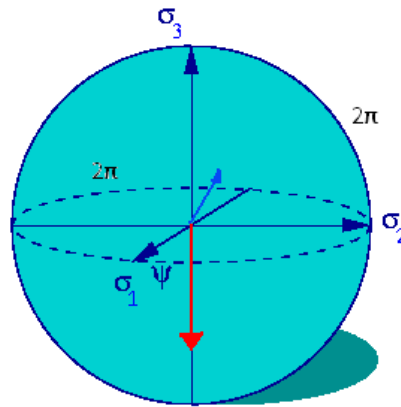
Gelijkstellen aan het eerder bepaalde reële deel van (45) levert:  $a_2 = 0$ . Voor het imaginaire deel van de  $SU(2)$ -matrix heb ik gevonden:

$$Im[SU(2)] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi} \sin \frac{\pi}{10} & \frac{-1}{\sqrt{\phi}} \\ \frac{-1}{\sqrt{\phi}} & -\frac{1}{\phi} \sin \frac{\pi}{10} \end{pmatrix} \quad (54)$$

Door deze matrix met het imaginaire deel van (45) te vergelijken kunnen  $a_1$  en  $a_3$  bepaald worden.  $a_1$  kan bepaald worden uit de vergelijking:  $a_1 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\sqrt{\phi}}$ . Dan volgt dat  $a_1 = -2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$ .  $a_3$  kan uit  $a_3 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\phi} \sin \frac{\pi}{10}$  bepaald worden:  $a_3 = -\frac{-3+\sqrt{5}}{\sqrt{2(3+\sqrt{5})}}$ . Nu moet nog nagegaan worden of de gevonden waarden kloppen door te bedenken dat de eenheidsvector  $\hat{\alpha}$  lengte 1 heeft en inderdaad:  $a_1^2 + a_3^2 = 1$ .

De vector is dus:  $\hat{\alpha} = (-2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}, 0, -\frac{-3+\sqrt{5}}{\sqrt{2(3+\sqrt{5})}})$ .

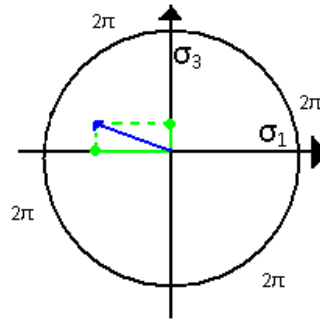
Verkregen zijn nu twee matrices die de elementaire vlechtoperaties representeren [3]. Aangezien met de twee elementaire vlechtoperaties alle mogelijke vlechten moeten worden geconstrueerd, moeten (41) en (55) gebruikt kunnen worden om de unitaire operatie te bepalen die volgt uit elke willekeurige vlecht. Om na te gaan of de twee elementaire operaties daadwerkelijk elke vlecht construeren, moeten de zojuist bepaalde vectoren die horen bij de elementaire operaties in de  $SU(2)$ -ruimte worden geplaatst, om vervolgens na te gaan of ze elk punt in deze ruimte parametriseren. De  $SU(2)$ -ruimte wordt voorgesteld als een bol met een driedimensionaal vlak, zie figuur (12).



Figuur 12: De  $SU(2)$ -ruimte: een bol met een driedimensionaal vlak en straal  $2\pi$ . De elementaire vlechtoperaties zijn geparametriseerd zodat ze in deze bol als vectoren kunnen worden weergegeven. De rode vector stelt  $\rho(\sigma_1)$  voor en de blauwe vector  $\rho(\sigma_2)$  [13].

De vector behorend bij  $\rho(\sigma_1)$ ,  $\hat{\alpha} = (0, 0, -1)$ , ligt op de verticale as en wijst in de negatieve richting (rode vector in de figuur). De vector behorend bij  $\rho(\sigma_2)$ ,  $\hat{\alpha} = (-2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}, 0, -\frac{-3+\sqrt{5}}{\sqrt{2(3+\sqrt{5})}})$ , ligt in het verticale vlak dat loodrecht op het papier staat (blauwe vector in de figuur), zie ook de doorsnede van de bol, figuur (13). De hoek van deze vector heb ik bepaald door de arctangens te nemen van  $a_1/a_3$ .

Er doet zich echter een probleem voor: mijn resultaat voor de parametrisatie van  $\rho(\sigma_2)$  wijkt af van dat wat onder andere verkregen is door Bonesteel et al. De parametrisatie die ik heb verkregen voor  $\rho(\sigma_2)$  ligt in het  $a_1 - a_3$ -vlak, evenals de parametrisatie voor  $\rho(\sigma_1)$  die op de  $a_3$ -as ligt, er is dus geen enkele component in de richting van de  $a_2$ -as. Zo is het niet mogelijk de gehele bol en dus de gehele  $SU(2)$ -ruimte te parametriseren. Iets wat wel mogelijk is als de vectoren die door Bonesteel et al. zijn gevonden met elkaar worden verenigd. De matrices voor de twee elementaire vlechtoperaties die ik heb gevonden,



Figuur 13: Doorsnede van de  $SU(2)$ -ruimte over het  $\sigma_1\sigma_3$ -vlak. De groene ondoorbroke lijnen geven de coördinaten van  $a_1$  en  $a_3$  aan. De blauwe vector is de vector die de elementaire vlechtoperatie in de  $SU(2)$ -ruimte representeert.

komen echter wel overeen met die gevonden door verscheidene anderen. Er gaat dus iets mis tijdens het parametriseren. Wanneer de parametrisaties die ik heb gevonden zouden kloppen, betekent dit dat het Fibonacci-model helemaal niet een set van operaties levert, die geschikt zijn voor topologisch quantumrekenen. Dit is zeer onwaarschijnlijk, daarom staat in de bijlage een uitwerking van mijn berekening van de parametrisatie van de tweede elementaire vlechtoperatie, zodat degene die zich geroepen voelt, kan nagaan wat er fout gaat. In het vervolg van mijn verhaal, houdt ik me vast aan een parametrisatie waarbij  $\rho(\sigma_2)$  wel een component langs de 2-as heeft, waardoor wel de gehele  $SU(2)$ -ruimte wordt gevuld.

#### 4.4 Quantumpoorten van één qubit


Nu de twee elementaire vlechtoperaties in vectorvorm zijn verkregen, wordt al snel duidelijk hoe de operaties op de qubit kunnen werken: de drie deeltjes in de qubit worden beschreven door een golf functie. Deze golf functie vormt een driedimensionale vector. Inmiddels is bekend welke  $3 \times 3$ -matrices corresponderen met de elementaire vlechtoperaties. Het uitvoeren van operaties op de toestandsvector van het anyon houdt dan het vermenigvuldigen van de verschillende matrices in. De twee elementaire vlechtoperaties kunnen op deze wijze allerlei vlechten van drie deeltjes bewerkstelligen, maar om een universele set te verkrijgen moeten ook de operaties op twee qubits bekeken worden.

#### 4.5 Quantumpoorten van twee qubits

Om een model te verkrijgen dat voldoet aan de voorwaarden voor universeel topologisch quantumrekenen, is het nodig ook 2-qubitoperaties te bekijken. Dit houdt in dat er operaties moeten worden uitgevoerd op twee verstrengelde qubits. Een dergelijke operatie zal dus inhouden dat de anyonen uit de twee qubits met elkaar vervlochten worden. Er bestaat altijd een vlecht op een 2-qubit systeem die overeenkomt met een unitaire operatie [9]. Het is echter vrij lastig zo'n vlecht te vinden.

Het probleem is dat de Hilbertruimte nu uit zes deeltjes bestaat, waardoor de dimensie van de ruimte niet 3 is maar 13. En om in zo'n grote ruimte de gewenste vlecht te vinden is zeer moeilijk. Er is echter een manier gevonden om het probleem aan te pakken [3]. De 2-qubitoperaties moeten worden opgebouwd uit de wel te bepalen simpele vlechten op drie deeltjes.

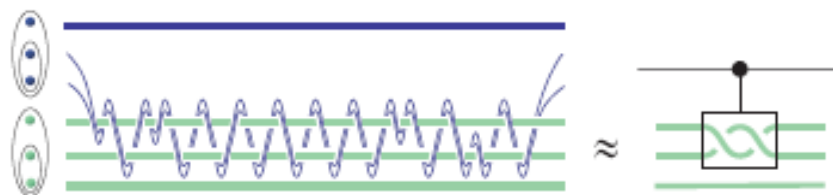
Eerst wordt een vlecht bekeken waarin een enkel deeltje (blauw) tussen twee stationaire deeltjes (groen) vlecht (figuur 14). De vlecht die gezocht wordt moet gelijk zijn aan een monodromie van de twee groene deeltjes waarbij de blauwe stationair is. Dit probleem is oplosbaar, omdat het nu om een vlecht van drie deeltjes gaat.



$$\sigma_{21}^3 \sigma_{12}^2 \sigma_{21}^{-4} \sigma_{12}^2 \sigma_{21}^{-2} \sigma_{12}^{-2} \sigma_{21}^{-2} \sigma_{12}^2 \sigma_{21}^2 \sigma_{12}^2 \sigma_{21}^{-2} \sigma_{12}^2 \sigma_{21}^{-2} \sigma_{12}^4 \sigma_{21}^{-2} \sigma_{12}^2 \sigma_{21}^4 \sigma_{12}^2 \sigma_{21}^{-2} \sigma_{12} \approx \sigma_{12}^2$$

Figuur 14: Een vlecht van drie deeltjes waaruit een 2-qubitprobleem moet worden opgelost. Het bewegen van het blauwe deeltje tussen de groene deeltjes heeft hetzelfde effect als de twee groene deeltjes tweemaal verwisselen [3].

Vervolgens moet dit probleem worden omgezet naar een probleem waarbij wél twee qubits betrokken zijn. Daarom wordt één qubit gedoopt tot controlerende qubit (blauw) en de andere qubit tot bedoelde qubit (groen). Nu worden twee deeltjes uit de controlerende qubit (het controlerende paar) als een eenheid gevlochten door de deeltjes in de bedoelde qubit op precies dezelfde wijze als zojuist in het 1-qubitprobleem is gedaan (figuur 15).



Figuur 15: Met dezelfde vlecht die eerder van drie deeltjes werd geconstrueerd wordt nu op analoge wijze een poort geconstrueerd die werkt met twee qubits. Opnieuw is de vlecht die ontstaat door een eenheid (twee blauwe deeltjes) te vlechten door de twee groene deeltjes heen, gelijk aan het tweemaal verwisselen van de groene deeltjes. De eenheid van de twee blauwe deeltjes kan dan gezien worden als een enkel deeltje met bepaald quantumgetal [3].

De twee qubits uit het controlerende paar kunnen in twee toestanden verkeren. Namelijk  $|0\rangle$  of  $|1\rangle$ , anders gezegd, ze hebben quantumgetal 1 of  $\tau$ . Wanneer het quantumgetal 1 bedraagt zal het vlechten van het paar door de bedoelde qubit niets meer dan een fase opleveren, aangezien vlechten met het vacuum hetzelfde is als niet vlechten. Wanneer



het paar echter quantumgetal  $\tau$  heeft, kan het paar worden gezien als een enkel deeltje  $\tau$ , waardoor de vlecht van de twee deeltjes equivalent is aan figuur (14).

Wat nu is geconstrueerd is een zogenaamde controlerende poort: de toestand van de bedoelde qubit verandert slechts als de controlerende qubit in de toestand  $|1\rangle$  verkeert. Wat er dan gebeurt is dat twee deeltjes van de bedoelde poort een monodromie ondergaan. Deze controlerende poort, samen met de 1-qubitoperaties vormen een universele set voor topologisch quantumrekenen [4].

## 5 Topologische quantumcomputer

Nu is een model verkregen dat een set van operaties omvat dat geschikt is voor universeel topologisch quantumrekenen. De vraag is echter hoe met dit model te werken en hoe berekeningen te simuleren.

### 5.1 Berekeningen uitvoeren

Door het vlechten van deeltjes kunnen unitaire operaties gesimuleerd worden. Elke unitaire operatie kan door een vlecht benaderd worden. Echter, hoe nauwkeuriger de benadering hoe langer de vlecht. De lengte die de vlecht moet hebben is evenredig met de log van de toegestane afwijking van de te simuleren operatie [10]. Het vinden van relatief korte vlechten is nog mogelijk door met een klassieke computer alle vlechten na te gaan tot op een bepaalde lengte en daaruit de vlecht te nemen die het dichtst bij de gewenste unitaire operatie ligt [6]. Het zoeken van alle vlechten tot op een bepaalde lengte groeit exponentieel met de lengte van de bepaalde lengte. Wanneer men dus een vlecht zoekt met een grote lengte, omdat hoge nauwkeurigheid gewenst is, moet een andere methode gebruikt worden.

Om lange vlechten toch te bepalen, wordt gebruik gemaakt van het algoritme van Solovay en Kitaev [5]. Volgens dit algoritme moeten vele korte vlechten samengevoegd worden om zo de lange vlecht (die nauwkeurig genoeg de operatie simuleert) te construeren. De vlecht die op deze wijze wordt geconstrueerd is in het algemeen niet de kortste vlecht die de operatie nauwkeurig genoeg simuleert, maar wel een vlecht die polylogaritmisch afwijkt van de gewenste nauwkeurigheid, in plaats van logaritmisch.

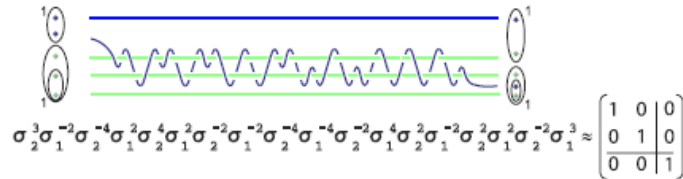
### 5.2 Poorten

Nu is inmiddels al heel wat bekend over hoe een berekening te simuleren met het Fibonacci-model: door middel van de twee elementaire operaties kunnen vlechten worden geconstrueerd, binnen een qubit kunnen zo vele unitaire operaties worden benaderd en ook 2-qubitoperaties blijken mogelijk.

In 'gewone' computers wordt door middel van poorten informatie verwerkt en daarom moeten voor een topologische quantumcomputer quantumpoorten worden geconstrueerd. Net is al een controlerende poort op twee qubits bepaald en daarmee een model voor universeel topologisch rekenen verkregen, maar er kunnen nog veel meer poorten worden gemaakt. Ik zal nu nog één voorbeeld van een andere poort geven die ook in gewone computers gebruikt wordt.

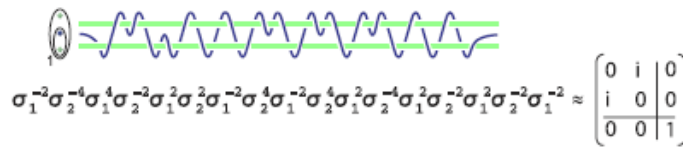
Een belangrijke logische poort is de gecontroleerde not-poort (CNOT). Deze poort verandert het quantumgetal van de bedoelde qubit van een 1 naar een  $\tau$  of omgekeerd slechts dan als de controlerende qubit de waarde  $\tau$  heeft. Deze poort wordt geconstrueerd uit twee andere vlechten [3]. De eerste heet de injectievlecht. Bij deze vlecht wordt net als in figuur (14) een deeltje door twee stationaire deeltjes gewoven, maar nu keert het wevende

deeltje niet terug naar zijn originele positie. Het product van de vlechtoperaties die deze vlecht vormen, benadert de eenheidsmatrix, waarbij de benadering nauwkeuriger wordt door de Solovay-Kitaev constructie toe te passen. Wat deze vlecht doet, is het injecteren van een anyon in de bedoelde qubit zonder dat één van de quantumgetallen van de drie deelnemende deeltjes verandert. Daarom kan deze vlecht worden gebruikt om een deeltje of elk ander object met quantumgetal  $\tau$  zonder gevolgen in een qubit te injecteren [7].



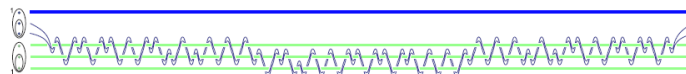
Figuur 16: Deze vlecht benadert een eenheidsmatrix en heeft als effect dat de quantumgetallen van de deelnemende deeltjes niet veranderen, daarom kan deze vlecht gebruikt worden om een deeltje veilig in een qubit te injecteren [3].

De tweede vlecht die nodig is, is een vlecht die een NOT-poort benadert die op het bedoelde qubit werkt. Een NOT-poort verandert een 1 in een  $\tau$  en omgekeerd.



Figuur 17: Deze vlecht benadert een NOT-poort en heeft als effect een quantumgetal de andere waarde te geven, dus een 1 wordt een  $\tau$  en omgekeerd [3].

Om nu de CNOT te construeren wordt eerst de injectievlecht gebruikt om twee anyonen uit de controlerende qubit in de bedoelde qubit te injecteren. Het effect hiervan als het paar controlerende anyonen quantumgetal  $\tau$  heeft is dat één deeltje in de bedoelde qubit wordt vervangen door het controlerende paar, maar de toestand van de qubit blijft onveranderd. Vervolgens wordt de NOT-vlecht toegepast door het controlerende paar op dezelfde wijze als in figuur (17) door de bedoelde qubit te weven. Tot slot wordt het controlerende paar afgestoten door de bedoelde qubit door de inverse van de injectievlecht toe te passen. Zo wordt de vlecht in figuur (18) verkregen.



Figuur 18: Een controlerende NOT-poort, geconstrueerd door eerst figuur (16) toe te passen, vervolgens figuur (17) en tot slot de inverse van figuur (16). Het resultaat is een NOT-poort die op de bedoelde qubit werkt en wordt 'gecontroleerd' door de controlerende qubit [3].

Als in dit hele proces het quantumgetal van het controlerende qubit 1 was, is het resultaat

van de gehele operatie slechts de identiteit, net als bij de controlerende poort in sectie (4.5). Als echter het controlerende qubit als quantumgetal  $\tau$  had, dan is een NOT-poort op de bedoelde qubit losgelaten. Omdat dit hele proces werd bewerkstelligd door gebruik te maken van een controlerende poort, construeert deze vlecht een controlerende NOT-poort. Ook voor deze operatie geldt dat het nauwkeuriger wordt naarmate de Solovay-Kitaev constructie vaker wordt toegepast [3]. Door in plaats van de NOT-vlecht een andere vlecht die een bepaalde poort representeert in te voegen in figuur (18) kan elke willekeurige controlerende poort worden opgesteld.

## 6 Conclusie

Het in dit artikel onder de loep genomen Fibonaccimodel werkt met slechts één deeltje: het anyon en één niet-triviale fusieregel. De wereldlijnen van de anyonen kunnen zo worden gevlochten, dat de ontstane vlechten elke willekeurige unitaire operatie met grote nauwkeurigheid kunnen benaderen. Door gebruik te maken van twee consistentierelaties worden de  $F$  en de  $R$ -matrix geconstrueerd. Met de  $F$  en de  $R$ -matrix worden twee elementaire vlechtoperaties verkregen. Hiermee kunnen alle vlechten van drie anyonen geconstrueerd worden. De operaties moeten op minstens drie deeltjes werken, om er berekeningen mee uit te voeren. De operaties moeten worden omgezet in vectoren om te kijken of het mogelijk is de  $SU(2)$ -ruimte te parametriseren. Wanneer het Fibonaccimodel een universele set voor quantumrekenen levert moeten deze twee vectoren de hele  $SU(2)$ -ruimte parametriseren. Echter, de parametrisatie die ik heb gevonden kan dit niet, omdat geen van beide vectoren, die volgen uit de elementaire vlechtoperaties, een component langs de  $a_2$ -as heeft. Dit zou betekenen dat het Fibonaccimodel niet geschikt is voor universeel topologisch quantumrekenen, wat onwaarschijnlijk is, gezien het feit dat andere papers wel melding maken van een parametrisatie die de gehele  $SU(2)$ -ruimte parametriseert. Ik ben in het verdere verloop van mijn onderzoek wel uitgegaan van die parametrisatie, ondermeer omdat de elementaire vlechtoperaties die ik heb gevonden wel kloppen.

De vectoren verkregen tijdens de parametrisatie werken op eenheden van drie deeltjes: de qubits. De twee elementaire vlechtoperaties kunnen alle unitaire operaties op één qubit vastleggen. Deze operaties, samen met de controlerende poort die opereert binnen twee qubits, vormen een universele set voor topologisch quantumrekenen. Met deze set zijn alle quantumpoorten die nodig zijn om gegevens te verwerken te construeren. Het Fibonaccimodel is een geschikt model als de tweede vector die ik heb gevonden wel een component langs de  $a_2$ -as heeft. Als mijn berekening wel klopt, is het Fibonaccimodel niet geschikt voor universeel topologisch quantumrekenen en moet er worden uitgeweken naar andere modellen, zoals het Isingmodel, om een universele topologische quantumcomputer te verkrijgen.

## 7 Bijlage: berekening parametrisatie $\rho(\sigma_2)$

In deze bijlage laat ik de berekening zien die ik heb gedaan om een parametrisatie van de tweede elementaire vlechtoperatie  $\rho(\sigma_2)$  te verkrijgen. Ik heb een volledige uitwerking toegevoegd aan mijn scriptie, omdat de parametrisatie die ik heb verkregen niet overeenkomt met die van bijvoorbeeld Bonesteel et al. en niet geschikt is om een universele set voor topologisch quantum rekenen te verkrijgen.

Er wordt gezocht naar een parametrisatie van de matrix  $\rho(\sigma_2)$ :

$$\rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -e^{-\pi i/5}/\phi & -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} & 0 \\ -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} & -1/\phi & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\pi i/5} \end{pmatrix} \quad (55)$$

Hierin is  $\phi = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$  de gulden snede.

Eerst moet de determinant bepaald worden:

$$-e^{-\pi i/5}/\phi \times -1/\phi - -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} \times -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} = e^{-\frac{i\pi}{5}} \quad (56)$$

Vervolgens moet nagegaan worden of  $\rho(\sigma_2)$  unitair is, daartoe moet gelden dat  $\rho(\sigma_2)^\dagger \times \rho(\sigma_2) = 1$ :

$$\begin{pmatrix} -e^{\pi i/5}/\phi & ie^{\pi i/10}/\sqrt{\phi} \\ ie^{\pi i/10}/\sqrt{\phi} & -1/\phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -e^{-\pi i/5}/\phi & -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} \\ -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} & -1/\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

Nu moet  $\rho(\sigma_2)$  geschreven worden als:

$$\rho \in U(2) \sim U(1) \times SU(2) \quad (58)$$

Hierin is  $U(1)$  een matrix evenredig met de eenheidsmatrix en moet een determinant hebben gelijk aan de determinant van  $\rho(\sigma_2)$ . Dus:

$$U(1) = \begin{pmatrix} e^{\frac{-\pi i}{10}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-\pi i}{10}} \end{pmatrix} \quad (59)$$

Om te parametriseren moet ik dit schrijven als  $e^{i\beta}$ . Waarbij,  $\beta = -\frac{\pi}{10}$ . Nu kan uit (58)  $SU(2)$  bepaald worden door  $\rho \times U(1)^{-1}$  te berekenen:

$$SU(2) = \begin{pmatrix} e^{\pi i/10} & 0 \\ 0 & e^{\pi i/10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -e^{-\pi i/5}/\phi & -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} \\ -ie^{-\pi i/10}/\sqrt{\phi} & -1/\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-\pi i/10}/\phi & -i/\sqrt{\phi} \\ -i/\sqrt{\phi} & e^{\pi i/10}/\phi \end{pmatrix} \quad (60)$$

Om te kunnen parametriseren wordt (58) geschreven als:  $U(1) \sim e^{i\beta} e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2}$ , waarin  $\beta$  al hierboven is bepaald.  $\sigma$  representeert de paulimatrices. Nu moet  $\alpha$  bepaald worden. Ik neem  $\hat{\alpha} = a_1 + a_2 + a_3$ . Om  $\alpha$  te kunnen bepalen moet de  $SU(2)$ -term als een matrix geschreven worden, hiertoe moet er eerst geëxpandeerd worden:  $e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2} = 1 + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2 -$

$\frac{1}{2!}(i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2)^2 - i\frac{1}{3!}(i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2)^3 + \dots + \dots - \dots - \dots = \cos \frac{\alpha}{2} \sigma_0 + i \sin \frac{\alpha}{2} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})$ . Dit kan geschreven worden als een matrix:

$$e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} + ia_3 \sin \frac{\alpha}{2} & ia_1 \sin \frac{\alpha}{2} + a_2 \sin \frac{\alpha}{2} \\ ia_1 \sin \frac{\alpha}{2} - a_2 \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} - ia_3 \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (61)$$

Door deze matrix gelijk te stellen aan de matrix gevonden voor  $SU(2)$  (60) kan  $a$  bepaald worden. Eerst bepaal ik  $a_2$  door de reële gedeelten van de twee matrices aan elkaar gelijk te stellen:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & a_2 \sin \frac{\alpha}{2} \\ -a_2 \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\phi} \cos \frac{\pi}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\phi} \cos \frac{\pi}{10} \end{pmatrix} \quad (62)$$

Hieruit blijkt meteen dat  $a_2 = 0$ . Om  $a_1$  en  $a_3$  te bepalen, stel ik de imaginaire gedeelten van de twee matrices aan elkaar gelijk:

$$\begin{pmatrix} a_3 \sin \frac{\alpha}{2} & a_1 \sin \frac{\alpha}{2} \\ a_1 \sin \frac{\alpha}{2} & -a_3 \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\phi} \sin \frac{\pi}{10} & \frac{-1}{\sqrt{\phi}} \\ \frac{-1}{\sqrt{\phi}} & -\frac{1}{\phi} \sin \frac{\pi}{10} \end{pmatrix} \quad (63)$$

$a_1$  kan bepaald worden uit de vergelijking:  $a_1 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\sqrt{\phi}}$ . Dan volgt dat  $a_1 = -2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$ .

$a_3$  kan uit  $a_3 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\phi} \sin \frac{\pi}{10}$  bepaald worden:  $a_3 = -\frac{-3+\sqrt{5}}{\sqrt{2(3+\sqrt{5})}}$ . Nu moet nog nagegaan worden of de gevonden waarden kloppen door te bedenken dat de eenheidsvector  $\hat{\alpha}$  lengte 1 heeft en inderdaad:  $a_1^2 + a_3^2 = 1$ .

De vector is dus:  $\hat{\alpha} = (-2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}, 0, -\frac{-3+\sqrt{5}}{\sqrt{2(3+\sqrt{5})}})$ .

Een vector zonder component in de  $a_2$ -richting...

## Referenties

- [1] F.A. Bais en J.K. Slingerland, 2008, Condensate induced transitions between topologically ordered phases (to be published)
- [2] P.H. Bonderson, 2007, Non-Abelian Anyons and interferometry, PhD thesis, California Institute of Technology
- [3] N.E. Bonesteel, L. Hormozi, et al., 2005, Braid Topologies for Quantum Computation, *Phys.Rev.Lett.*95(14), 140503
- [4] M.J. Bremner, C.M. Dawson, 2002, Practical Scheme for Quantum Computation with Any Two-Qubit Entangling Gate, *PhysRevLett.*89.247902
- [5] C.M. Dawson en M.A. Nielsen, 2008, The Solovay-Kitaev Algorithm, *arXiv:quant-ph/0505030v2*
- [6] L. Hormozi en G. Zikos, 2007, Topological Quantum Compiling, *PhysRevLett.*89.483
- [7] P. Metelitsyn, 2006, Topological Quantum Computer, seminar Quantum Computing op 17 juli 2006, Johannes Gutenberg University, Mainz
- [8] G. Moore en N. Seiberg, 1989, Classical and quantum conformal field theory, *Comm.Math.Phys.*123, 171-254
- [9] C. Nayak, S.H. Simon, et al., 2008, Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation, *arXiv:0707.1889v2*
- [10] M.A. Nielsen en I.L. Chuang, 2000, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press
- [11] J. Preskill, 2004, Lecture Notes for the course Physics 219/ Computer Science 219: Quantum Computation, California Institute of Technology
- [12] K. Shtengel, 2007, Non-Abelian Anyon Interferometry, seminar op 9 november 2007, University of California, Riverside
- [13] <http://www.computers.howstuffworks.com>